Tolydūs procesai, diskretūs procesai ir burbulų statistika

Aleksejus Kononovicius

Pagal [AK & VG, recenzuojamas (2019)] ir [VG, AK & SR, ACS 15: 1250071 (2012)].

Bendras tikslas

Paradoksas!

Ilgą atmintį,

$$S(f) \sim f^{-\beta}, \quad C(\tau) \sim \tau^{1-\beta}, \quad \beta \approx 1,$$

gauname naudodami Markovo procesą (netiesinę SDL):

$$\mathrm{d}x = \left(\eta - \frac{\lambda}{2}\right) x^{2\eta-1}\mathrm{d}t + x^{\eta}\mathrm{d}W. \qquad (\star)$$

Paradokso sprendimas

Būna "tikros" ilgos atminties[1] ir netikros ilgos atminties[2] procesai.

[1] pvz., trupmeninis Brauno judėjimas (angl. fractional Brownian motion; trump. fBm)

[2] angl. spurious long–range memory

Bendras tikslas

Tikslas:

Rasti metodą, kuris atskirtų "tikros" ilgos atminties procesus nuo netikros ilgos atminties procesų.

Įgyvendinimo idėja:

Yra tokia stochastinių procesų savybė vadinama pirmo kirtimo laiku[3], T. fBm atveju yra gerai žinoma, kad:

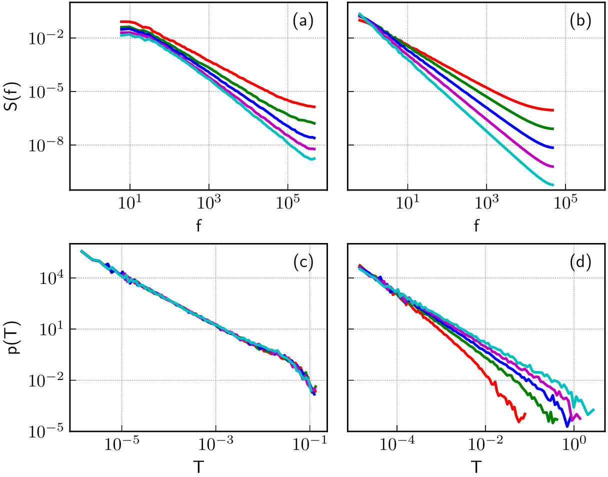
$$p(T) \sim T^{H-2},$$

čia H yra fBm Hursto rodiklis. Vienmačiams Markovo procesams yra žinoma, kad $p(T) \sim T^{-3/2}$.

$$T_{x_0,h} = \mathrm{Inf}\left\{t > 0 : x\left(t\right) = h | x\left(0\right) = x_0\right\}.$$

[3] angl. first passage time

Idėjos iliustracija



Netiesinės SDL ($\star$) ir fBm spektriniai tankiai ir pirmo kirtimo laikai. Iš [VG & AK, Entropy 19: 387 (2017)].

Konkretus uždavinys

Išvystyti metodiką

SDL ($\star$) ir kitų Markovo procesų pirmo kirtimo laikų skirstiniams aproksimuoti.

Netiesinės SDL ($\star$) pirmo kirtimo laikai

Tiesiogiai spręsti uždavinį sunku,

bet galime netiesinę SDL ($\star$) transformuoti į Besselio procesą:

$$\mathrm{d}R = \frac{N-1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{R} + \mathrm{d}W = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{R} + \mathrm{d}W.$$

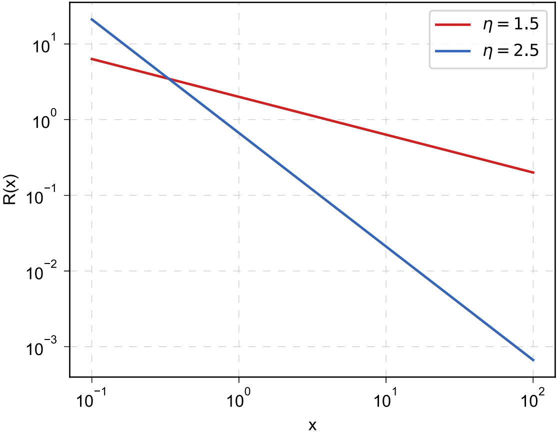
Čia R yra N-mačio Brauno judėjimo padėties vektoriaus modulis (Euklidinė norma), o ν vadinamas proceso indeksu.

Perėjimui reikalinga transformacija

yra Lamperti transformacija:

$$R(x) = -\int \frac{1}{x^\eta}\mathrm{d}x = \frac{1}{(\eta-1)x^{\eta-1}}.$$

Transformacija



$$x \in (0, \infty), \qquad R \in (0, \infty), \qquad R(x) \xrightarrow{x \to 0} \infty.$$

Besselio proceso pirmo kirtimo laikai

yra gerai žinomi:

$$p_{R_0,h}^{(\nu)}(T) = \frac{h^{\nu-2}}{R_0^{\nu}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,k} J_{\nu}\left(\frac{R_0}{h} j_{\nu,k}\right)}{J_{\nu+1}(j_{\nu,k})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,k}^2}{2h^2} T\right).$$

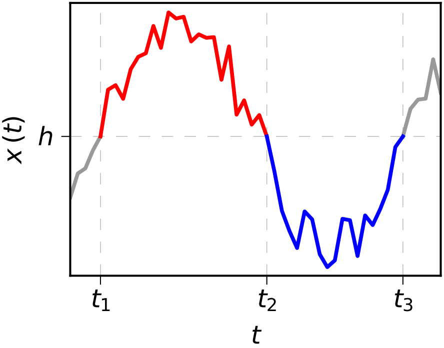
Būtų džiugu, bet:

- Suma yra begalinė.
- Joje yra Besselio funkcija $J_\nu(x)$.
- Joje yra Besselio funkcijos nuliai $j_{\nu,k}$ $(J_\nu(j_{\nu,k}) = 0)$.
- Ji galioja tik $R_0 < h$.

Dalį šių problemų galime apeiti aproksimuodami specifinį atvejį, kai $R_0 \to h$. Šį atvejį vadinsime pikų (kai $R_0 \downarrow h$) ir duobių (kai $R_0 \uparrow h$) statistika.

Pirmą kartą įvesti [Kaulakys and Alaburda, J. Stat. Mech. P02051 (2009)].

Pikai ir duobės (pavyzdys)



Formalus apibrėžimas, $\epsilon > 0$:

$$\tau_h = \mathrm{Inf}\left\{t > 0 : x(t) \leq h | x(0) = h + \epsilon\right\},$$
$$\theta_h = \mathrm{Inf}\left\{t > 0 : x(t) \geq h | x(0) = h - \epsilon\right\}.$$

Besselio proceso duobių trukmių skirstinys

vis dar yra begalinė suma:

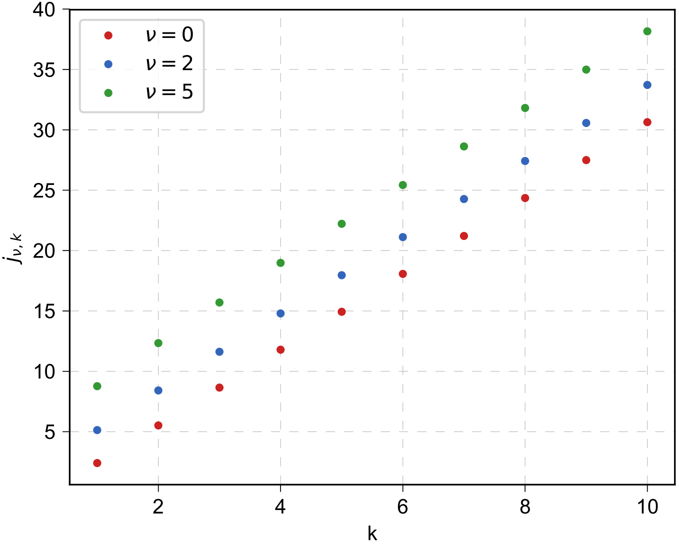
$$p_h^{(\nu)}(\theta) \approx C_1 \sum_{k=1}^{\infty} j_{\nu,k}^2 \exp\left(-\frac{j_{\nu,k}^2}{2h^2}\theta\right).$$

Šią begalinę suma galime traktuoti kaip Rymano sumą ir pakeisti sumą integralu:

$$p_h^{(\nu)}(\theta) \approx C_2 \int_{j_{\nu,1}}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2h_y^2}\theta\right) \mathrm{d}x.$$

Tokį pakeitimą daryti mums leidžia Besselio nulių savybė, kad jie auga beveik tiesiškai.

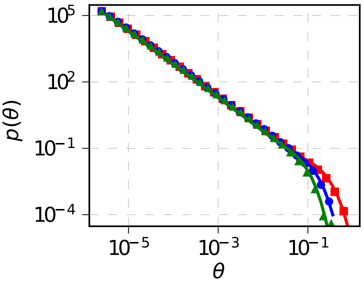
Besselio nuliai



Besselio proceso duobių trukmių skirstinys

galiausiai užrašomas taip:

$$p_h^{(\nu)}(\theta) \approx C_3 \left[j_{\nu,1} \frac{\exp\left(-\frac{j_{\nu,1}^2}{2h^2}\theta\right)}{\theta} + h\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{j_{\nu,1}}{\sqrt{2}h}\sqrt{\theta}\right)}{\color{red}{\theta^{3/2}}} \right].$$



Aproksimacija veikia gana gerai,

bet C_3 nustatyti neįmanoma, nes normavimo integralas diverguoja, kai $\theta \to 0$.

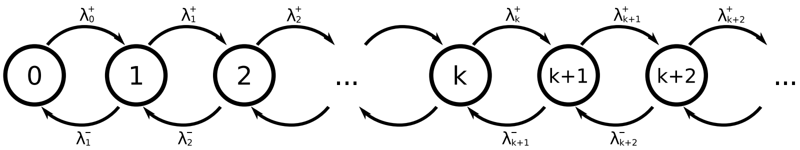
Kodėl diverguoja?

Nes procesą startuojame begalo arti ribos h.

Diskretaus kintamojo procesai

Gimimo–mirties procesai

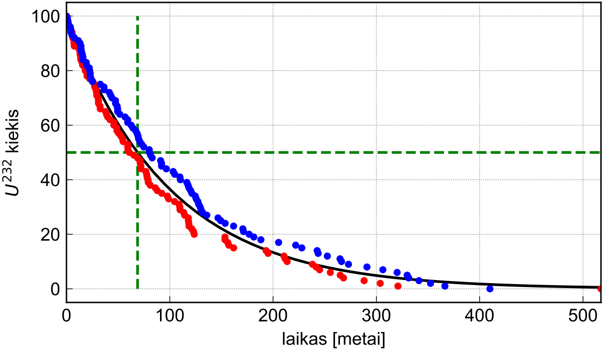
- Markovo procesai (grandinės)
- Būsena yra diskreti ir keičiasi tik per vieną žingsnį
- Gali turėti baigtinį būsenų skaičių, gali turėti begalinį
- Pilnai apibrėžti gimimo, λ_X^+, ir mirimo, λ_X^-, spartų



Radioaktyvaus skilimo gimimo–mirties procesas

$$\lambda_X^+ = 0, \qquad \lambda_X^- = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} X.$$

Mes žinome, kad U^{232} izotopo $t_{1/2} = 2.17 \cdot 10^9$ sekundžių.



Skaitmeninis gimimo–mirties procesų sprendimas

Vieno žingsnių tikimybių metodas:

1. $t = 0$, $X = X_0$ ir pasirenkame Δt.
2. $t \rightarrow t + \Delta t$.
3. X pokytis ($\{-1, 0, 1\}$): $p(X \rightarrow X \pm 1) = \lambda_X^{\pm} \Delta t$.
4. Jei $t < t_{max}$ grįžtame į antrą žingsnį.

Gillespie metodas:

1. $t = 0$, $X = X_0$.
2. Generuojame $\tau \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda_X^{+} + \lambda_X^{-}\right)$.
3. $t \rightarrow t + \tau$.
4. X pokytis ($\{-1, 1\}$): $p(X \rightarrow X \pm 1) = \frac{\lambda_X^{\pm}}{\lambda_X^{+} + \lambda_X^{-}}$.
5. Jei $t < t_{max}$ grįžtame į antrą žingsnį.

Ekvivalentūs tolydūs procesai

Žinant gimimo ir mirties spartas

nesunku išvesti SDL ekvivalenčią gimimo–mirties procesui:

$$\mathrm{d}x = \Delta x(\lambda_X^+ - \lambda_X^-)\mathrm{d}t + \sqrt{\Delta x^2(\lambda_X^+ + \lambda_X^-)}\mathrm{d}W,$$

čia $x = X/N$ ($N \to \infty$), atitinkamai $\Delta x = 1/N$.

Atvirkštinis perėjimas,

nuo SDL prie gimimo–mirties proceso, yra įmanomas, bet jis nevisada yra paprastas ir vienareikšmis. Toliau tą darysime du kartus: kursime Besselio proceso ir Ornstein–Uhlenbeck proceso atitikmenis.

Gimimo–mirties procesų pirmo kirtimo laikai

Keilsono teorema sako, kad $X_O < H$ atveju:

$$\mathcal{L}\left\{p\left(T_{X_0,H}\right)\right\} = \left\langle e^{-sT_{X_0,H}} \right\rangle = \frac{\prod_{i=1}^{H} \frac{\lambda_i^{(H)}}{s+\lambda_i^{(H)}}}{\prod_{i=1}^{X_0} \frac{\lambda_i^{(X_0)}}{s+\lambda_i^{(X_0)}}}, \quad s \geq 0.$$

Čia $\lambda_i^{(H)}$ yra neigiamo H-tojo rango proceso generatoriaus matricos teigiamos tikrinės vertės. Džiūgu, bet:

- Bendru atveju padaryti atvirkštinę Laplaso transformaciją yra neįmanoma.
- Bet mus domina tik $X_0 = H - 1$. Atvirkštinė transformacija yra vis tiek problematiška. Mathematica susidoroja tik su mažais H.

Tikrinių verčių gavimas

Gimimo mirties proceso generatoriaus matrica

yra tri–diagonali matrica, kurios diagonalėse yra mirties spartos, neigiamos suminės spartos ir gimimo spartos:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\lambda_0^+ & \lambda_0^+ & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1^- & -\lambda_1^- - \lambda_1^+ & \lambda_1^+ & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2^- & -\lambda_2^- - \lambda_2^+ & \lambda_2^+ & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$$

Skaitmeniškai suskaičiuoti $-\mathcal{G}$

tikrines vertes su fiksuotu H nėra didesnės problemos. Tačiau bendro analizinio rezultato gauti nepavyksta.

Netyčinis pastebėjimas

Kadangi

nemokame tvarkytis su dideliais H, tai belieka įdėmiau patyrinėti rezultatus su mažais H:

- Atvirkštinės Laplaso transformacijos rezultatas yra eksponenčių suma.
- Eksponenčių laipsnio rodikliai yra $-\lambda_i^{(H)}\theta$.
- Eksponenčių koeficientai yra problematiškesnis klausimas.

Metodikos prielaidos

Tegu

mūsų metodika tolydžiam Besselio procesui beveik tinka ir gimimo–mirties procesų atveju.

Ką tai reiškia?

- Tegu atvirkštinės Laplaso transformacijos rezultatas turi specifinį pavidalą.
- Tegu šaknis iš gimimo–mirties proceso neigiamo generatoriaus teigiamos tikrinės vertės auga tiesiškai tam tikrame (kiek galima platesniame) intervale.
- Tegu pirmoji aproksimacija dažnai nebus gera. Leiskite mums padaryti pataisą, kuri sutapintų pirmus tikrojo skirstinio ir aproksimacijos momentus.

Specifinis pavidalas atvirkštinei transformacijai aproksimuoti:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{H}\frac{\lambda_i^{(H)}}{s+\lambda_i^{(H)}}}{\prod_{i=1}^{X_0}\frac{\lambda_i^{(X_0)}}{s+\lambda_i^{(X_0)}}}\right\} \approx \sum_{i=1}^{H}\lambda_i^{(H)}\exp(-\lambda_i^{(H)}\theta)}$$

Jo aproksimavimas:

$$\boxed{\approx \rho\lambda_1^{(H)}\exp(-\lambda_1^{(H)}\theta) + (1-\rho)I(\theta,\lambda_2^{(H)},\lambda_H^{(H)})},$$

$$I(\theta,\lambda_2,\lambda_H) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_H}-\sqrt{\lambda_2}}\int_{\sqrt{\lambda_2}}^{\sqrt{\lambda_H}} x^2\exp(-x^2\theta)\mathrm{d}x,$$

$$\rho = \frac{\lambda_1^{(H)}\left(1-\sqrt{\lambda_2^{(H)}\lambda_H^{(H)}}\bar{\theta}_{\mathrm{teor}}\right)}{\lambda_1^{(H)}-\sqrt{\lambda_2^{(H)}\lambda_H^{(H)}}}.$$

Besselio gimimo–mirties procesas

Tegu:

$$\lambda_X^+ = \frac{N^2}{2}\left(1 + \frac{\nu'}{X}\right), \quad \lambda_X^- = \frac{N^2}{2}\left(1 - \frac{\nu'}{X}\right).$$

Nesunku įsitikinti, kad:

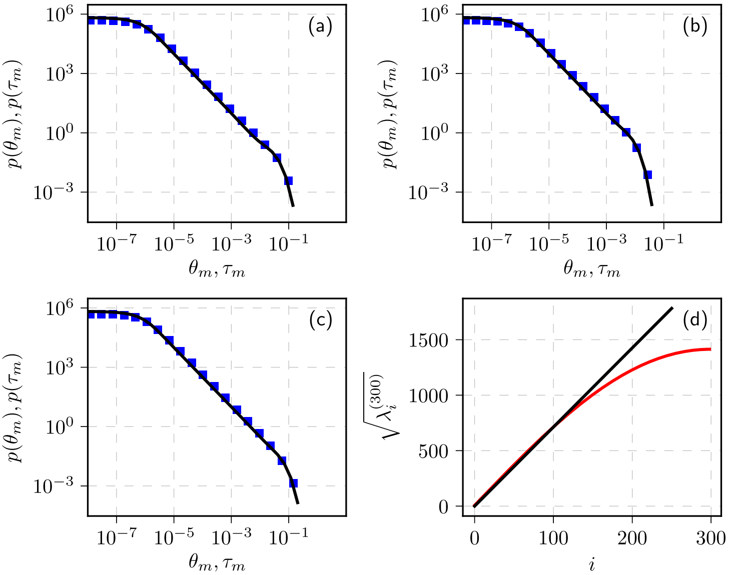
$$\Delta x \left(\lambda_X^+ - \lambda_X^-\right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N^2}{2} \cdot \frac{2\nu'}{X} = \frac{\nu'}{x},$$

$$\Delta x^2 \left(\lambda_X^+ + \lambda_X^-\right) = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N^2}{2} \cdot 2 = 1.$$

Čia $\nu' = \nu + 1/2$.

Nepasižymi X ir $N - X$ simetrija.

Besselio gimimo–mirties procesas



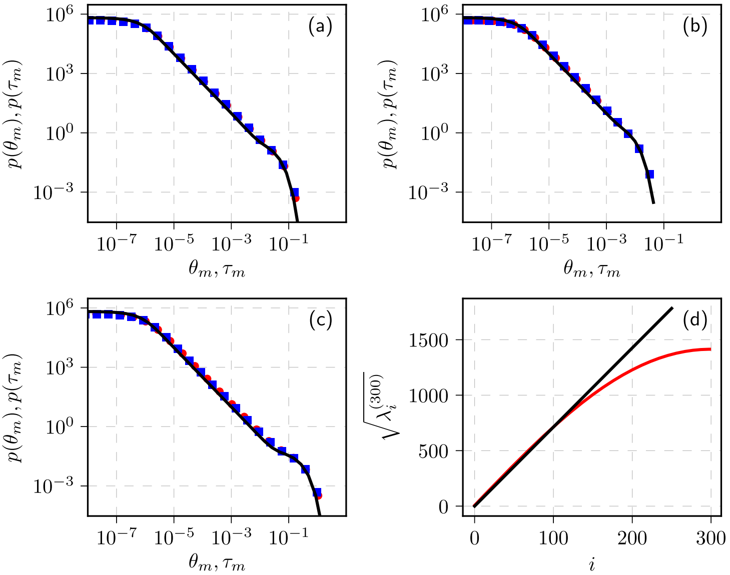
Simetrinis Besselio gimimo–mirties procesas

Tegu:

$$\lambda_X^+ = \frac{N^2}{2}\left(1 + \frac{\nu'}{X} - \frac{\nu'}{N-X}\right), \quad \lambda_X^- = \frac{N^2}{2}\left(1 - \frac{\nu'}{X} + \frac{\nu'}{N-X}\right).$$

Procesas pasižymi X ir $N - X$ simetrija.

Simetrinis Besselio gimimo–mirties procesas



Ornstein–Uhlenbeck gimimo–mirties procesas

Tegu:

$$\lambda_X^+ = N^2 \left(1 - \frac{X}{N}\right), \quad \lambda_X^- = N^2 \cdot \frac{X}{N}.$$

Nesunku įsitikinti, kad:

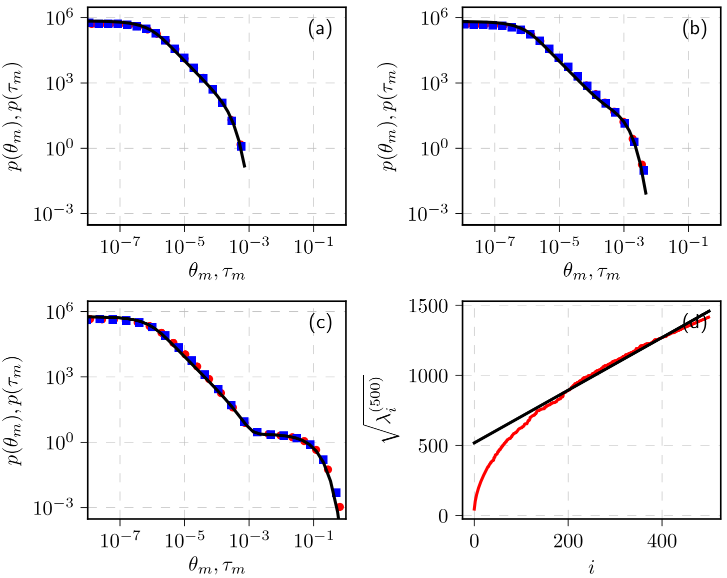
$$\Delta x \left(\lambda_X^+ - \lambda_X^-\right) = \frac{1}{N} \cdot N^2 \cdot \left(1 - 2\frac{X}{N}\right) = 2N \left(\frac{1}{2} - x\right),$$
$$\Delta x^2 \left(\lambda_X^+ + \lambda_X^-\right) = \frac{1}{N^2} \cdot N^2 \cdot 1 = 1.$$

Tolydus O–U procesas:

$$\mathrm{d}x = \theta(\mu - x)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W.$$

Procesas pasižymi X ir $N - X$ simetrija.

Ornstein–Uhlenbeck gimimo–mirties procesas



Imitacinis gimimo–mirties procesas

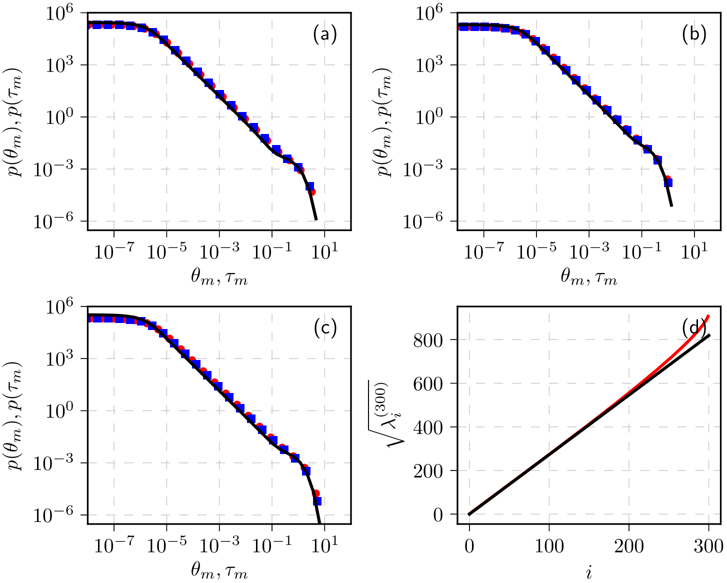
Tegu:

$$\lambda_X^+ = (N - X)(\varepsilon + X), \quad \lambda_X^- = X(\varepsilon + [N - X]).$$

Šis procesas yra analogiškas simetriniam Kirmano modeliui bei Rinkėjo modeliui su išoriniu triukšmu.

Procesas pasižymi X ir $N - X$ simetrija.

Imitacinis gimimo–mirties procesas

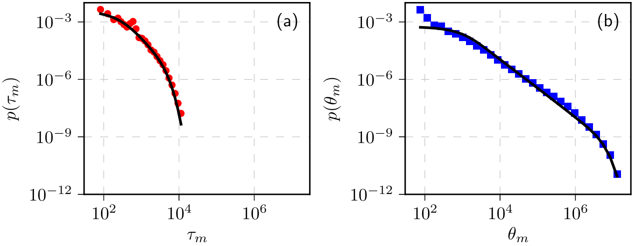


Pritempimas prie duomenų

ir sudėtingesnių modelių

Gautą aproksimaciją galime ir "pritempti" prie duomenų parinkdami parametrus: ρ, λ_1, λ_2, λ_n. Galime ją taikyti tiek pikams, tiek duobėms.

Pavyzdys su sandorių knygos modelio [AK & JR, recenzuojamas (2019)] pikų ir duobių statistika. Parametrai parinkti derinant pirmus keturis momentus.



Potencialūs ateities uždaviniai

Susiję su tikslu uždaviniai:

- Prielaida apie tikrinių verčių spektrą yra labai stipri. Būtų įdomu pabandyti ją sulaužyti.
- Tikslas platus, uždaviniai yra smulkmeniški. Reikia imti plačiau – sukonstruoti ar surasti lygiavertį “konkurentą”.
- Ar galima atsisakyti burbulų statistikos?

Nesusiję su tikslu uždaviniai:

- Rinkinys gimimo–mirties procesų, kurių stacionarūs skirstiniai būtų iš pagrindinių naudojamų skirstinių.
- Rinkinys gimimo–mirties procesų analogiškų dažniausiai naudojamiems stochastiniams procesams.

Dėkui už dėmesį!