Atitiktis tarp erdvinio ir klasikinio rinkėjo modelio

Aleksejus Kononovicius
Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 3, 10257 Vilnius
aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt, http://kononovicius.lt, http://rf.mokslasplius.lt

Įvadas

Pastaruosius kelis dešimtmečius fizikai bando taikyti sau būdingą mąstymą ir metodologiją siekdami modeliuoti, aiškinti ir prognozuoti socialinių sistemų reiškinius. Viena kertinių šios srities tematikų yra nuomonių dinamika, kuri siekia aprašyti tokius procesus kaip rinkimai, demografiniai pokyčiai ar kariniai konfliktai [1].

Rinkėjo (angl. *voter*) modelis [2] yra vienas plačiausiai nuomonių dinamikos srityje nagrinėjamų modelių. Tokį populiarumą lemia tiek modelio paprastumas, tiek atitikimas empiriniams duomenims, tiek tai, kad jis yra itin panašus į Izingo modelį.

Visgi klasikinio rinkėjo modelio, kaip ir daugumos kitų geriau žinomų modelių, taikymas empiriniams rinkimų ar gyventojų surašymo duomenims turi esminį trūkumą. Šie modeliai aprašo laikinę dinamiką, kuri vyksta viename viename teritoriniame vienete. Tuo tarpu didžioji dalis empirinių duomenų yra surinkti fiksuotu laiko momentu (pvz., rinkimų dieną) daugelyje erdvinių vienetų (pvz., rinkimų apylinkėje). Kitaip tariant duomenys byloja apie dinamiką erdvėje. Taigi taikant rinkėjo modelį tokiems duomenims netiesiogiai daroma prielaida, kad teritoriniai vienetai yra tarpusavyje nepriklausomi. Visgi gana akivaizdu, kad ši prielaida yra neteisinga [3].

Šiame stende mes pristatome modelį, kuris yra panašus į rinkėjo modelį, bet jo dinamika vyksta ne vieno erdvinio vieneto viduje, bet tarp daugelio erdvinių vienetų. Taigi jei klasikinį rinkėjo modelį lygintume su Izingo modelio Glauberio arba Metropolio formulavimais, tai mūsų pristatomas modelis galėtų būti lyginamas Izingo modelio Kawasaki formulavimu [4, 5].

Šis pranešimas yra paremtas [6] darbu. Minėtame darbe buvo atlikta ir empirinių duomenų analizė, kuri šiame stendiniame pranešime nėra atspindėta.

Klasikinis rinkėjo modelis

Kaip minėta įvade, klasikinis rinkėjo modelis yra be galo paprastas. Jis aprašo daugelio agentų sistemą, kurioje agentai (dalelės) yra patalpinti į tam tikro grafo ar tinklo mazgus. Paprasčiausias atvejis galėtų būti dvimatė gardelė, kurios kiekvienoje ląstelėje būtų po agentą. Kiekvienu laiko momentu pasirenkamas atsitiktinis agentas ir vienas jo atsitiktinis kaimynas. Pasirinktas agentas nukopijuoja savo kaimyno būseną. Šis modelis dažnai papildomas įvedant išorinį triukšmą – t.y. agentui leidžiama keisti būseną nesąveikaujant su kaimynu.

Užrašyti formules galime tik padarę tam tikras prielaidas. Tegu agentai gali turėti tik dvi būsenas (0 ir 1), tada globali sistemos būsena yra pilnai nusakoma agentų esančių būsenoje 1 skaičiumi X. Globaliai sistemos būsenai galime užrašyti perėjimo tikimybes laiko intervale Δt:

$$P(X \rightarrow X+1) = \frac{N-X}{N}\left(\varepsilon_1 + \frac{X}{N}\right)\Delta t, \tag{1}$$
$$P(X \rightarrow X-1) = \frac{X}{N}\left(\varepsilon_0 + \frac{N-X}{N}\right)\Delta t, \tag{2}$$
$$P(X \rightarrow X) = 1 - P(X \rightarrow X+1) - P(X \rightarrow X-1), \tag{3}$$

o kiti perėjimai nėra leistini. Čia N yra visų agentų skaičius, o ε yra išorinio triukšmo stipris (savaiminių perėjimų tarp būsenų sparta). Svarbu turėti mintyje, kad Δt turėtų būti mažas.

Šis modelis yra vieno žingsnio (gimimo–mirties) procesas, tad jį galima nesunkiai perrašyti tolydžiam laikui atitinkamai apibrėžus X didėjimo (generacijos, gimimo) ir mažėjimo (rekombinacijos, mirties) spartas. Jos trivialiai matosi perėjimo tikimybėse (tereikia numesti Δt).

Čia klasikinį rinkėjo modelį su išoriniu triukšmu užrašėme ekstensyvioje interpretacijoje, bet egzistuoja ir neekstensyvi interpretacija. Šios interpretacijos skiriasi tik tuo kaip įskaičiuojama agentų tarpusavio sąveikos įtaka. Ekstensyvioje interpretacijoje įtaką turi koncentracijos, o neekstensyvioje – absoliutūs skaičiai. Tai įneša kokybinį skirtumą: ekstensyvus modelis konverguoja į stacionarų tašką, o neekstensyvus į stacionarų skirstinį.

Erdvinis rinkėjo modelis

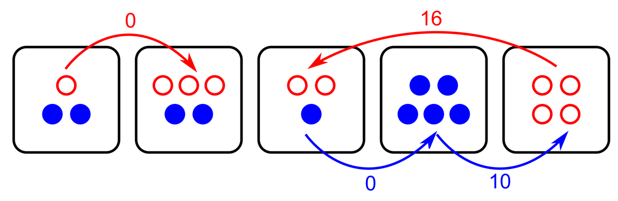
Izingo modelio Kawasaki formulavime dalelių sukiniai yra fiksuoti ir nekinta modeliavimo metu, bet dalelėms leidžiama keistis vietomis. Dalelių apsikeitimai vietomis yra atsitiktiniai, o apsikeitimo įvykio tikimybės yra analogiškos sukinio apvertimo įvykio tikimybei pagal Glauberio arba Metropolio formulavimą. Perkelkime šias idėjas į rinkėjo modelį.

Tarkime, kad turime N agentų (dalelė). Kiekvienas agentas priklauso vienam iš T tipų (būsena) ir yra viename iš M erdvinių vienetų. Erdviniai vienetai tarpusavyje iš esmės niekuo nesiskiria, o jų maksimali talpa yra C.

Tegu agentų tipai yra fiksuoti ir nekinta modeliavimo metu. Tegu agentai gali keisti savo erdvinį vienetą, jei perėjimas neviršija naujojo erdvinio vieneto talpos. Tegu perėjimo spartos (k-tajam agentų tipui iš i-tojo erdvinio vieneto į j-tąjį) turi formą analogišką neekstensyviam rinkėjo modeliui su išoriniu triukšmu:

$$\lambda_{(k)}^{i\to j} = \begin{cases} X_i^{(k)}\left(\varepsilon^{(k)} + X_j^{(k)}\right) & \text{jei } i \neq j \text{ ir } N_j < C, \\ 0 & \text{kitu atveju}, \end{cases} \tag{4}$$

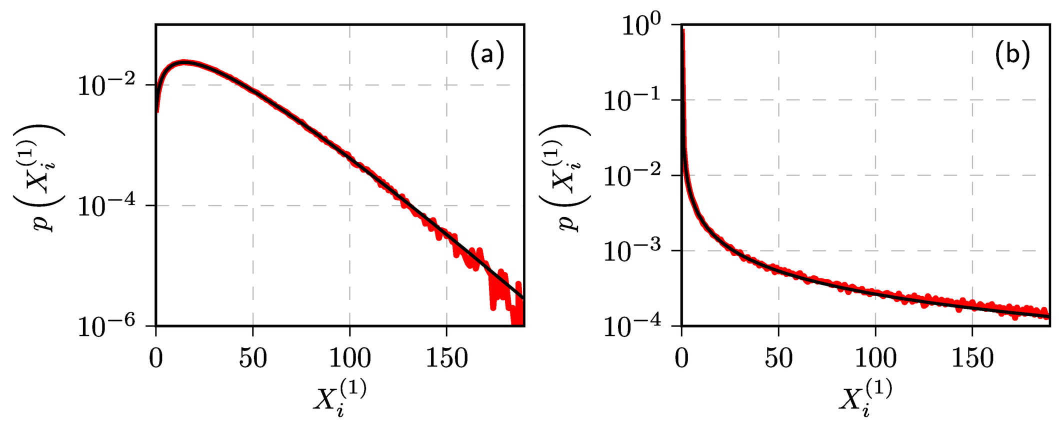
čia $X_i^{(k)}$ yra k-tojo tipo agentų skaičius esantis i-tajame erdviniame vienete, $\varepsilon^{(k)}$ yra savaiminio perėjimo sparta būdinga k-tojo tipo agentams, N_j yra bendras agentų skaičius esantis j-tajame erdviniame vienete.



1 pav.: Galimi ir neįmanomi perėjimai, kai $N = 10$, $T = 2$, $M = 5$, $C = 5$ ir $\varepsilon = 2$.

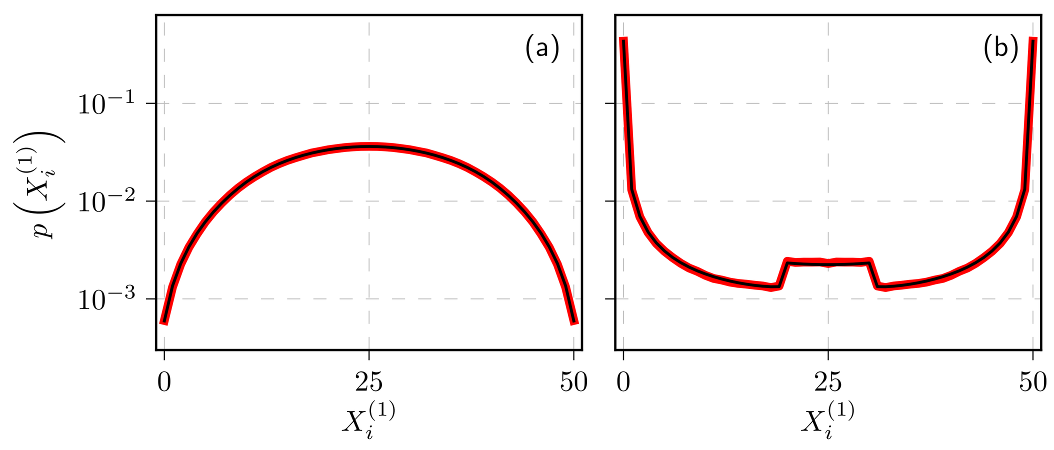
Erdvinio rinkėjo modelio savybės

Jei erdvinių vienetų talpa yra begalinė, $C = N$, tai galime užrašyti sumines išėjimo ir atėjimo į erdvinį vienetą spartas. Šios spartos yra ekvivalenčios spartoms iš neekstensyvaus rinkėjo modelio su išoriniu triukšmu, todėl $X_i^{(k)}$ stacionarus skirstinys (skirstinys per laiką) turėtų būti Beta–binominis (parametrai $\alpha = \varepsilon^{(k)}$, $\beta = (M-1)\varepsilon^{(k)}$ ir $N = N^{(k)}$).



2 pav.: Stacionarus skirstinys: $N = 3000$, $T = 1$, $M = 100$ ir $C = N$ (visi atvejai), $\varepsilon = 2$ (a) ir 0.03 (b).

Jei erdvinių vienetų talpa yra baigtinė, $C < N$, tai suminių spartų išraiškos tampa gana sudėtingos ir sunkiai analiziškai interpretuojamos. Tačiau stacionarų pasiskirstymą galima suskaičiuoti atskiriems atvejams pasinaudojus arba detalaus balanso sąlyga arba tuo, kad erdvinis rinkėjo modelis yra Markovo grandinė.

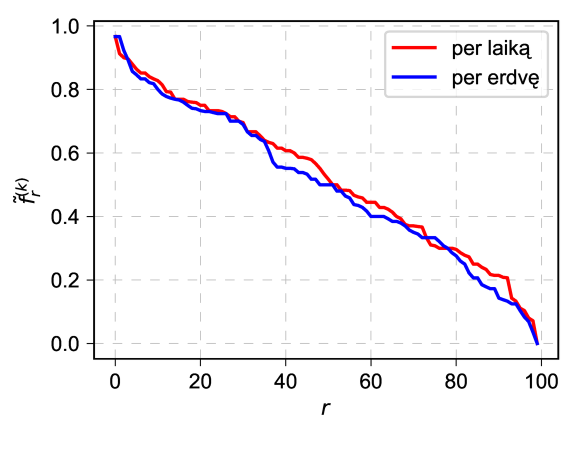


3 pav.: Stacionarus skirstinys: $N = 100$, $T = 2$ ir $M = 2$ (visi), $C = 60$ ir $\varepsilon = 2$ (a), $C = 80$ ir $\varepsilon = 0.03$ (b).

Modelis pasižymi laikinės ir erdvinės dinamikos simetrija. Kitaip tariant, rezultatai gaunami stacionariam pasiskirstymui (per laiką) tinka ir erdviniams rango–dydžio skirstiniams. Tą galima parodyti tiek analiziškai (erdvinius skirstinius galima suskaičiuoti pasinaudojus detaliojo balanso sąlyga), tiek skaitmeniškai.

$X_1 =$	analiziškai	(per erdvę)	(per laiką)
2 arba 9	0.1730	0.1787	0.1723
3 arba 8	0.2358	0.2397	0.2391
4 arba 7	0.2830	0.2815	0.2835
5 arba 6	0.3082	0.3001	0.3051

1 lentelė: Analizinių tikimybių palyginimas su skaitmeniniu rezultatu per erdvę ir per laiką: $N = 11$, $T = 1$, $M = 2$, $C = 9$ ir $\varepsilon = 3$



4 pav.: Agentų tankio rango–dydžio skirstiniai, $\tilde{f}_r^{(k)}$, (per laiką ir per erdvę): $N = 2600$, $T = 2$, $M = 100$, $C = 30$ ir $\varepsilon = 2$.

Literatūra

[1] C. Castellano, *et al.*, Rev. Mod. Phys. **81**: 591–646 (2009).
[2] P. Clifford, A. Sudbury, Biometrika **60**: 581–588 (1973).
[3] J. Fernandez–Garcia, *et al.*, PRL **112**: 158701 (2014).
[4] K. Kawasaki, Phys. Rev. **145**: 224–230 (1966).
[5] K. Kawasaki, Phys. Rev. **148**: 375–381 (1966).
[6] A. Kononovicius, J. Stat. Mech. (priimtas), arXiv: 1906.01842 [physics.soc-ph].

Padėka: Tyrimai finansuoti Europos socialinio fondo lėšomis (projekto Nr. 09.3.3-LMT-K-712-0026) pagal dotacijos sutartį su Lietuvos mokslo taryba.

2014-2020 Operational Programme for the European Union Funds Investments in Lithuania