

Netiesiškumas stochastiniuose finansų rinkų modeliuose

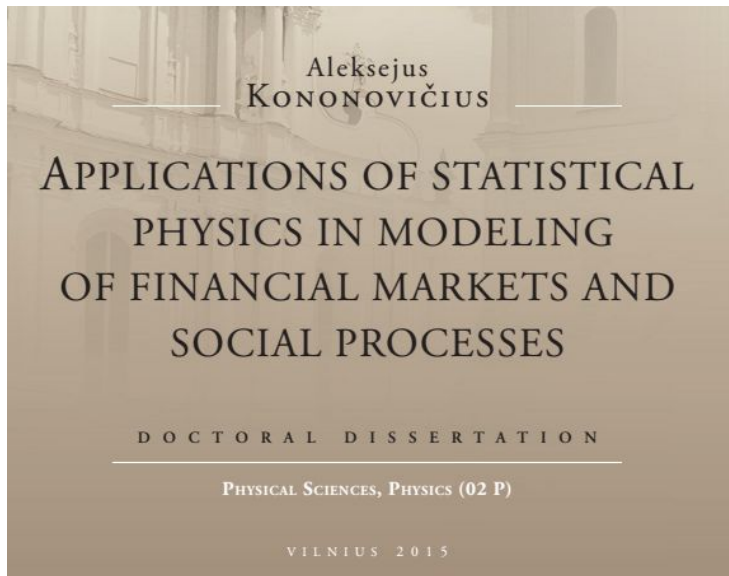
Aleksejus Kononovičius

Jaunesnysis mokslo darbuotojas

@

Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas

2015-11-18



Kolegos ir bendraautoriai



V. Gontis



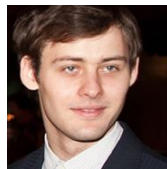
B. Kaulakys



J. Ruseckas



M. Alaburda

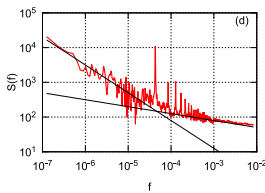
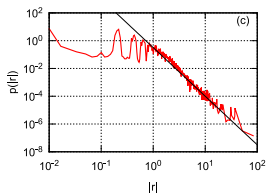
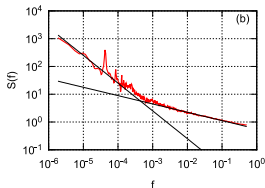
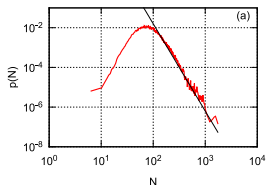


R. Kazakevičius

Tyrimų interesas - laipsninės statistinės savybės

“Storos” uodegos ir ilga atmintis finansų rinkose ir ne tik

$$p(x) \sim x^{-\lambda}, \quad S(f) \sim f^{-\beta}.$$



- Internetas
- Žodžiai
- Muzika
- Biologija
- Geologija
- ...

Prekybos aktyvumo (IBM; 5 min), (a) ir (b), ir absoliučios grąžos (MMM; 1 min), (c) ir (d), tikimybės ir spektriniai tankiai.

- ➊ Stochastinė dif. lygtis atkurianti laipsnines statistines savybes
- ➋ Netiesinis GARCH(1,1) ir ilga atmintis
- ➌ Bandos jausmo modelis
- ➍ Netiesiniai finansų rinkų agentų modeliai
- ➎ Netiesiškumas ir fluktuacijų suvaldymas

Stochastinė diferencialinė lygtis atkurianti laipsnines statistines savybes

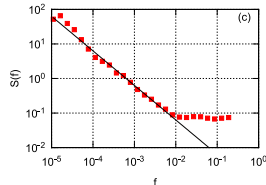
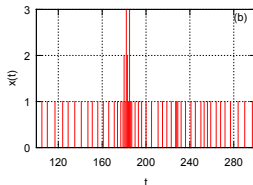
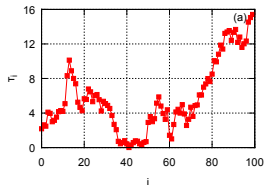
Taškinis procesas atkuriantis $1/f$ triukšmą

$$x(t) = \sum_j \delta(T_j - t), \quad T_j = \sum_{k=0}^j \tau_k,$$

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \gamma \tau_k^{2\mu-1} + \tau_k^\mu \zeta_k,$$

čia $\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Paprasčiausiu atveju ($\gamma = 0$, $\mu = 0$):

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \zeta_k.$$



Kaulakys (Phys Lett A, 1999); Ruseckas et al. (Lit J Phys, 2003); Alaburda ir Kaulakys (Lit J Phys, 2003)

Netiesinė stochastinė diferencialinė lygtis

B. Kaulakio, J. Rusecko, V. Gončio ir M. Alaburdos darbuose buvo išvesta ir nagrinėjama stochastinė diferencialinė lygtis (Ito prasme):

$$dx = \left(\eta - \frac{\lambda}{2} \right) x^{2\eta-1} dt + x^\eta dW. \quad (\star)$$

Pagrindinės šios lygties generuojamų laiko eilučių savybės:

$$p(x) \sim x^{-\lambda}; \quad S(f) \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\lambda - 3}{2\eta - 2}.$$

Panaši lygtis užrašyta Marsh–Rosenfeld darbe.

Kaulakys ir Ruseckas (Phys Rev E, 2004); Gontis ir Kaulakys (Phys A, 2004); Kaulakys et al. (Phys Rev E, 2005); Kaulakys et al. (Phys A, 2006); Marsh ir Rosenfeld (J Fin, 1983)

Atlikime kintamųjų keitimą:

$$R = \frac{1}{(\eta - 1)x^{\eta-1}}, \quad \Rightarrow \quad dR = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{dt}{R} + dW,$$

$$\text{čia } \nu = \frac{\lambda - 2\eta + 1}{2(\eta - 1)} \quad (N = \frac{\lambda - 1}{\eta - 1}).$$

SDL R atžvilgiu yra Beselio procesas. R yra N -mačio Brauno judėjimo Euklidinė norma.

Skaitmeninis (★) sprendimas

Kintamo žingsnio metodas:

$$x_{i+1} = x_i + \kappa^2 \left(\eta - \frac{\lambda}{2} \right) x_i + \kappa x_i \zeta_i,$$
$$t_{i+1} = t_i + \kappa^2 x_i^{2-2\eta}.$$

“Sprogimų” ir “absorbavimo” išvengimas:

- Atspindinčios ribos (naudojant $\min(x_i, x_{max})$ ir $\max(x_i, x_{min})$),
- Eksponentiniai nukirtimai:

$$dx = \left(\eta - \frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} \left[\frac{x_{min}^m}{x^m} - \frac{x^m}{x_{max}^m} \right] \right) x^{2\eta-1} dt + x^\eta dW,$$

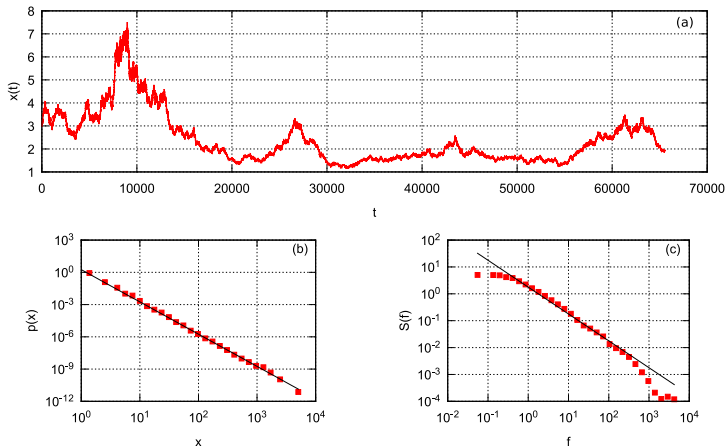
- Nuliniai svyravimai:

$$dx = \left(\eta - \frac{\lambda}{2} - \frac{m}{2} \cdot \frac{x^m}{x_{max}^m} \right) (1+x^2)^{\eta-1} x dt + (1+x^2)^{\frac{\eta}{2}} dW.$$

$1/f$ triukšmas paprasčiausiu atveju:

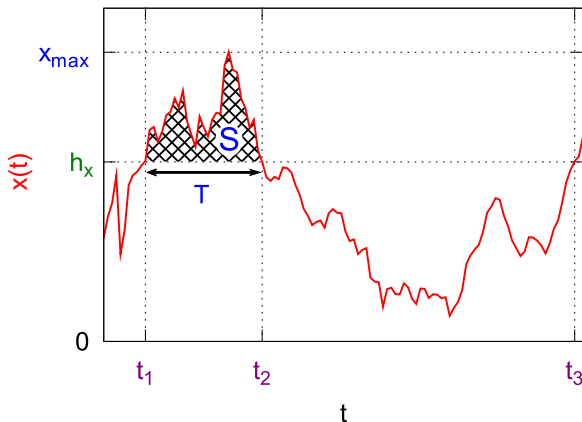
Kai $\eta = 3/2$ ir $\lambda = 3$ (atspindinčios ribos $x_{min} = 1$, $x_{max} = 10^5$):

$$dx = x^{3/2}dW.$$



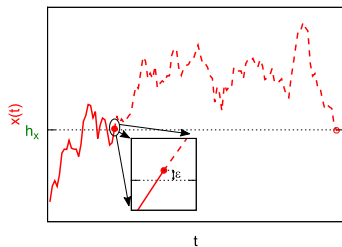
Įdomios (★) laiko eilučių savybės

Laipsninė burbulų statistika



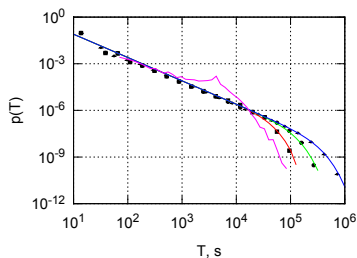
Alaburda ir Kaulakys (JDySES, 2011); Gontis, Kononovicius ir Reimann (ACS, 2012)

Burbulo trukmių, T , skirstinys



Burbulo trukmė yra analogiška pirmo kirtimo laikui.

Beselio proceso pirmo kirtimo laiko skirstinys yra žinomas, tad galime sužinoti ir burbulų trukmės skirstinį.

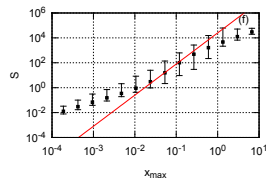
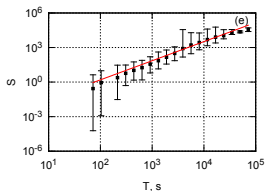
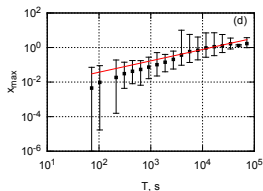
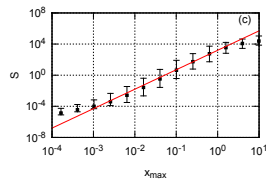
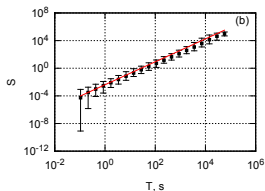
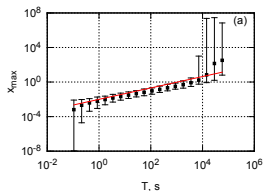


($\star$) lygties ($\eta = 1.5$, $\eta = 2$, $\eta = 2.5$) ir empirinių 1 min absoliučios gražos laiko eilučių burbulų trukmių pasiskirstymai.

Mažiams T – $T^{-3/2}$ dėsnis.
Dideliems T – eksponentinis nukirtimas.

Gontis, Kononovicius ir Reimann (ACS, 2012)

Laipsninė burbulų geometrija

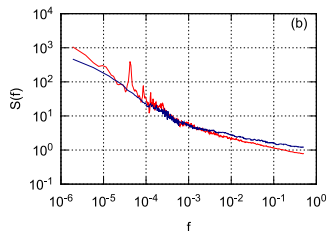
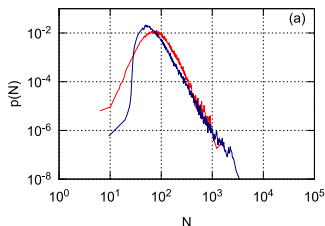


Trijų burbulo geometriją nusakančių dydžių, T , $x_{\max}$ ir S , laipsniniai tarpusavio sąryšiai. Viršuje - ($\star$) lygties laiko eilutės ($\eta = 2.5$), apačioje - empirinės absoliučios gražos laiko eilutės.

Sudėtingesnis prekybos aktyvumo modelis

Modelio pagrindas - SDL su dviem multiplikatyvumo laipsniais:

$$dn = \left(\eta - \frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} n^{-m} \right) \frac{n^{2\eta-1}}{(\epsilon n + 1)^2} dt + \frac{n^\eta}{\epsilon n + 1} dW.$$



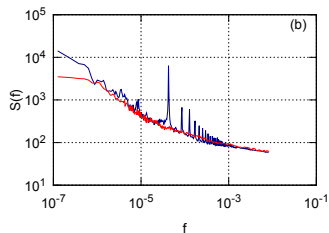
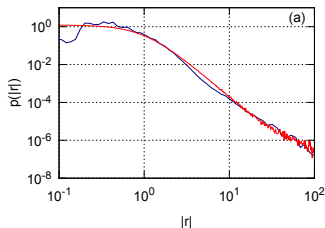
Empirinis (mėlynai) ir modelinis (raudonai) sandorių skaičiaus per 10 min skirstinys (a) ir spektras (b).

Sudėtingesnis absoliučios gražos modelis

Modelio pagrindas – SDL su dviem multiplikatyvumo laipsniais:

$$dx = \left(\eta - \frac{\lambda}{2} - \frac{x^2}{x_{max}^2} \right) \frac{(1+x^2)^{\eta-1}}{(\epsilon\sqrt{1+x^2}+1)^2} x dt + \frac{(1+x^2)^{\frac{\eta}{2}}}{\epsilon\sqrt{1+x^2}+1} dW.$$

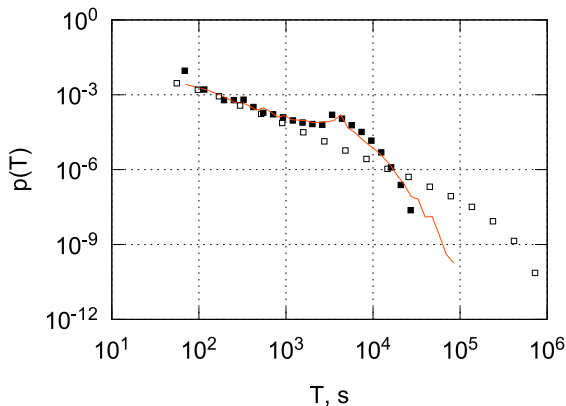
Papildomai – išorinis triukšmas: $r = f(x)\zeta_q$.



Empirinis (mėlynai) ir modelinis (raudonai) absoliučios gražos skirstinys (a) ir spekt-ras (b).

Burbulų trukmių, T , skirstinys

Sudėtingesnio gražos modelio atvejais



Empirinis (oranžinė kreivė) ir sudėtingesnio gražos modelio burbulo trukmių pasiskirstymas (kvadratai). Tušti kvadratai – tik SDL, užpildyti – SDL + triukšmas.

Netiesinis GARCH(1,1) ir ilga atmintis

(G)ARCH modeliavimas

Engle ir Bollerslev idėja:

$$z_t = \sigma_t \omega_t,$$

kur $\omega_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ir

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^p b_i z_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q c_i \sigma_{t-i}^2.$$

Mus domins GARCH(1,1) kintamumo procesas:

$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^2 \omega_{t-1}^2 + c\sigma_{t-1}^2.$$

Engle (Econometrica, 1982); Bollerslev (J Econometrics, 1986)

GARCH(1,1) difuzijos riba: COGARCH(1,1)

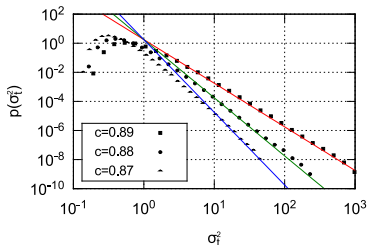
$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle h^{-1} (\sigma_{t+h,h}^2 - \sigma_{t,h}^2) \rangle = f(\sigma_t^2), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \langle h^{-1} (\sigma_{t+h,h}^2 - \sigma_{t,h}^2)^2 \rangle = g(\sigma_t^2),$$

$$d(\sigma_t^2) = f(\sigma_t^2)dt + \sqrt{g(\sigma_t^2)}dW.$$

GARCH(1,1) atveju:

$$f(y) = A - Cy, \quad g(y) = B^2 y^2,$$

$$\lambda = 2 + \frac{1 - b - c}{b^2}.$$



Nelson (J Econometrics, 1990); Kluppelberg et al. (J App Prob, 2004)

Naudodami:

$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^\mu \omega_{t-1}^\mu + c_{\blacksquare} \sigma_{t-1}^2, \quad (\blacksquare)$$

$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^\mu |\omega_{t-1}|^\mu + \sigma_{t-1}^2 - c_{\odot} \sigma_{t-1}^\mu, \quad (\odot)$$

kur $\mu \geq 2$ (($\blacksquare$) atveju μ turi būti nelyginis), difuzijos riboje gauname:

$$(\blacksquare) \quad \Rightarrow \quad d(\sigma_t^2) = [A - C_{\blacksquare} \sigma_t^2] dt + B \sigma_t^\mu dW,$$

$$(\odot) \quad \Rightarrow \quad d(\sigma_t^2) = [A + C_{\odot} \sigma_t^2] dt + B \sigma_t^\mu dW.$$

Šių lygčių pavidalas iš esmės panašus į ($\star$). Iš panašumo seka, kad:

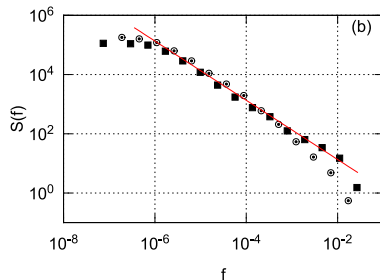
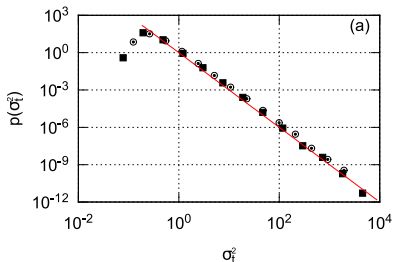
$$p(\sigma_t^2) \sim (\sigma_t^2)^{-\mu}, \quad S(f) \sim f^{-\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\mu - 3}{\mu - 2}.$$

Kononovicius ir Ruseckas (Phys A, 2015)

$\mu = 3$ atvejis ir parametru įtaka

$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^3\omega_{t-1}^3 + c_{\blacksquare}\sigma_{t-1}^2, \quad (\blacksquare)$$

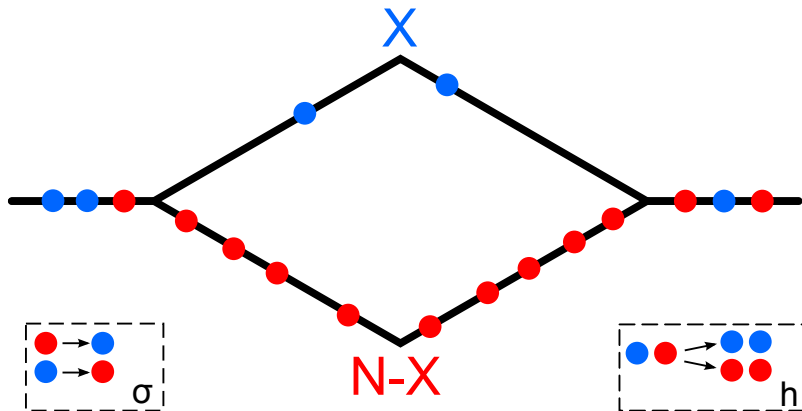
$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^3|\omega_{t-1}|^3 + \sigma_{t-1}^2 - c_{\odot}\sigma_{t-1}^3, \quad (\odot)$$



$$b \ll 1, \quad \frac{a}{b^2} \approx 1, \quad C_{\blacksquare} = C_{\odot} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{\blacksquare} = 1, \quad \frac{c_{\odot}}{b} = \langle |\omega|^\mu \rangle = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Bandos jausmo modelis

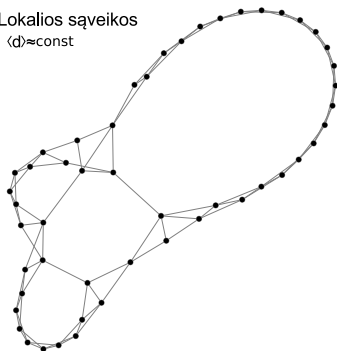
Kirmano bandos jausmo modelis



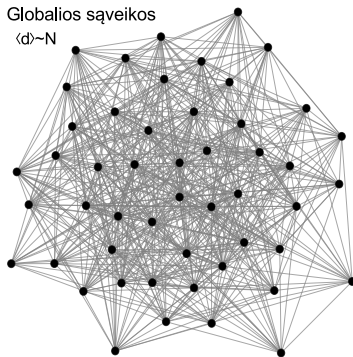
Kirman (Q J Eco, 1993)

Bandos jausmo sąveikų interpretavimas

Lokalias sąveikos
 $\langle d \rangle \approx \text{const}$



Globalios sąveikos
 $\langle d \rangle \sim N$



$$\frac{p_i(X \rightarrow Y)}{\Delta t} = [\sigma_Y + h n_i(Y)], \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle p_i(X \rightarrow Y) \rangle}{\Delta t} = \sigma_Y + h \langle d \rangle \frac{N_Y}{N}.$$

Alfarano ir Milakovic (J Eco Dyn Con, 2009)

Pakankamai trumpiems laiko intervalams galima užrašyti vieno žingsnio tikimybes:

$$p(X \rightarrow X \pm 1) = N^2 \pi^\pm \Delta t.$$

Didelių N riboje iš vieno žingsnio procesų formalizmo seka:

$$dx = N(\pi^+ - \pi^-)dt + \sqrt{\pi^+ + \pi^-}dW.$$

Bendru bandos jausmo modelio atveju:

$$dx = [\sigma_1(1-x) - \sigma_2x]dt + \sqrt{2\frac{\langle d \rangle}{N}}hx(1-x)dW.$$

van Kampen (North Holland, 2007)

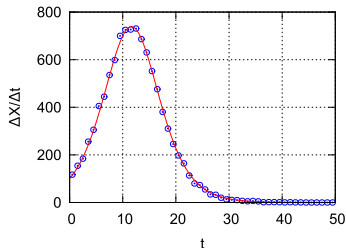
Lokalis sąveikos – Baso difuzijos lygtis

Tegu:

$$p(X \rightarrow X + 1) = (N - X) \left(\sigma + h \frac{X}{N} \right) \Delta t, \quad p(X \rightarrow X - 1) = 0.$$

Tada:

$$\frac{dX}{dt} = (N - X) \left(\sigma + h \frac{X}{N} \right)$$

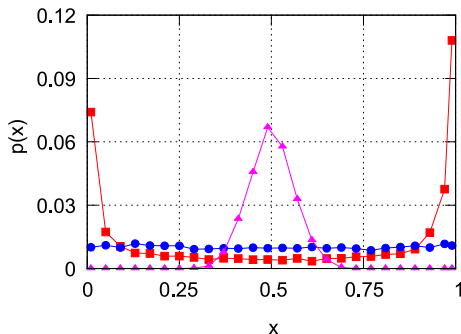


Globalios sąveikos – stochastinė lygtis

Kai sąveikos globalios ir turint mintyje $\varepsilon_i = \sigma_i/h$ bei $t_s = ht$:

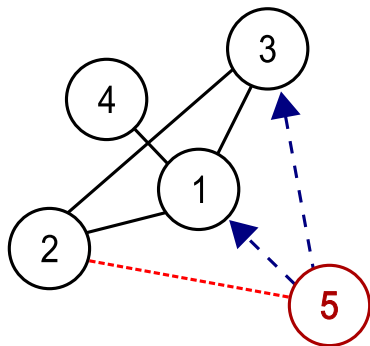
$$dx = [\varepsilon_1(1-x) - \varepsilon_2x]dt_s + \sqrt{2x(1-x)}dW_s, \quad (\Delta)$$

$$p(x) \sim x^{\varepsilon_1-1}(1-x)^{\varepsilon_2-1} \sim \text{Beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

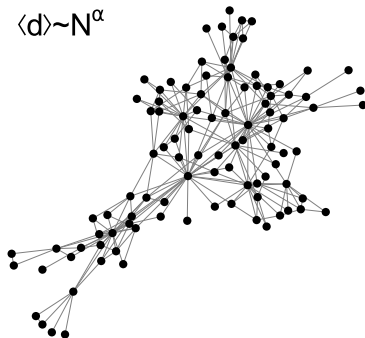


“Tarpinės” sąveikos – tarp globalumo ir lokalumo

Galima sugeneruoti “tarpinės” topologijas. Mes įprastą bemastelio tinklo generavimo algoritmą papildome nauju žingsniu – atsitiktinai suformuojami ryšiai su kaimynais.

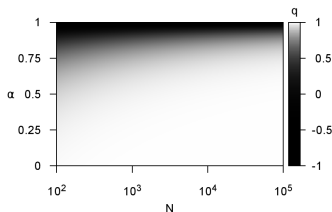
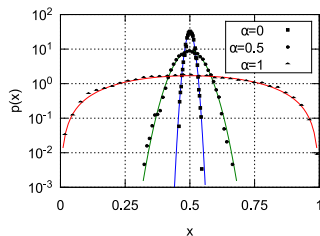
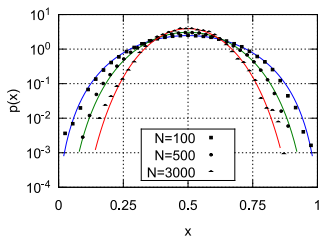


$$\langle d \rangle \sim N^\alpha$$



Kononovicius ir Ruseckas (EPJ B, 2014)

Perėjimas nuo laipsninio skirstinio prie normaliojo

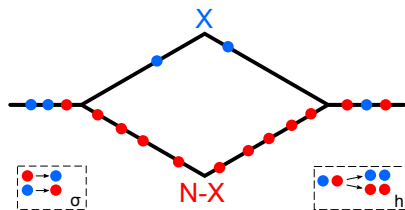


$$p(x) \sim [1 - (1 - q)A_q(x - 0.5)^2]^{\frac{1}{1-q}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \exp[-A_1(x - 0.5)^2].$$

Netiesiniai finansų rinkų agentų modeliai

Bandos jausmo modelio interpretavimas

Finansų rinkų kontekste



Tegu yra dvi prekybos strategijos:

- Grafiniai prekyautojai:
 $D_c = r_0 X_c \xi,$
- Fundamentalistai:
 $D_f = X_f [\ln P_f - \ln P(t)].$

$$\frac{1}{\beta N P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = \frac{D_c + D_f}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} r = r_0 \frac{x_c}{x_f} \Delta \xi.$$

Tegu sąveikų intensyvumas yra kintamas ir nulemtas $\left(\frac{x_c}{x_f}\right)^\gamma$.

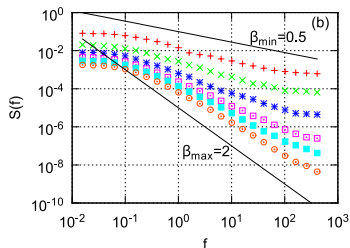
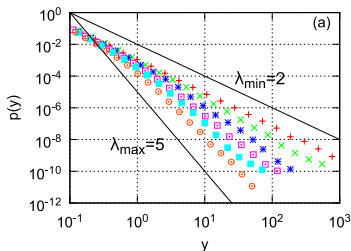
Alfarano et al. (Comp Eco, 2005); Kononovicius ir Gontis (Phys A, 2012)

Stochastinė lygtis aprašanti ilgalaikį grąžos kitimą

Tada atlikę kintamųjų keitimą, iš (Δ) gauname SDL $y = \frac{x_c}{x_f}$ atžvilgiu:

$$dy = [\varepsilon_{fc} + (2 - \varepsilon_{cf})y^{1+\gamma}](1+y)dt_s + \sqrt{2y^{1+\gamma}}(1+y)dW_s. \quad (\diamond)$$

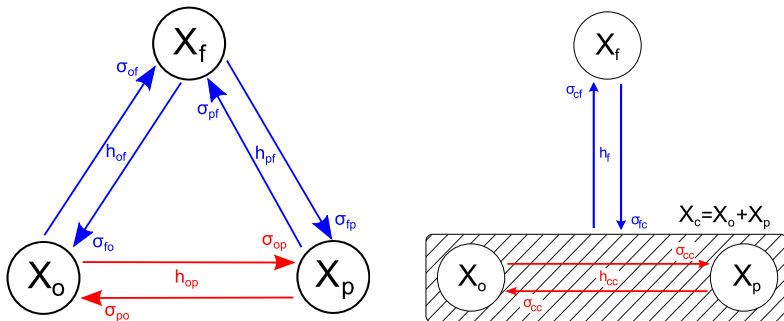
Lyginant su $(\star)$ lygtimi: $\eta = \frac{3+\gamma}{2}$, $\lambda = \varepsilon_{cf} + \gamma + 1$.



Kononovicius ir Gontis (Phys A, 2012)

Trijų būsenų modelis

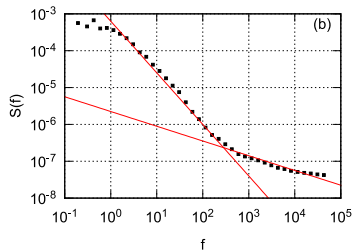
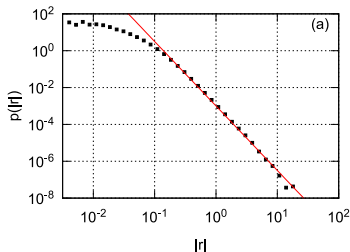
Optimizmo–pesimizmo svyravimų aprašymas bandos jausmo modeliu



Pilnas modelis (a) ir modelis adiabatiniame artėjime (b).

Stochastiniame aprašyme turime dvi lygtis: vieną y (arba x_f) atžvilgiu, kitą - nuotaikos, $\xi = \frac{X_o - X_p}{X_o + X_p}$.

“Perlūžęs” spektras trijų būsenų modelyje

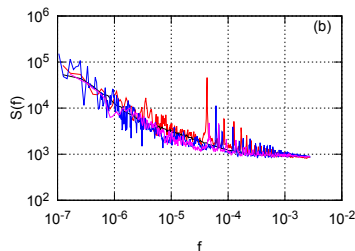
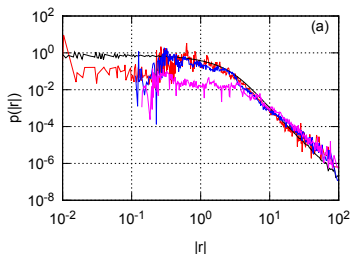


Spektro “lūžį” pavykstą gauti, kai $h_{cc} \gg h_f$ ir $\gamma = 2$. Bet spektro polinkiai yra sunkiai suderinami su empiriniu spektru.

Papildymas išoriniu triukšmu

Galima būtų tarti, kad trijų būsenų modelio dinamika nusako rinkos kintamumo (angl. volatility) kitimą, o išorinis triukšmas atspindi stebimas momentines gražos fluktuacijas:

$$r(t) = [1 + a|y(t)\xi(t)|]\zeta_q.$$



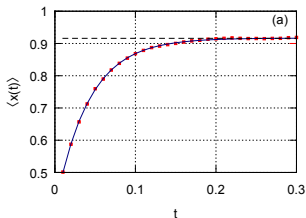
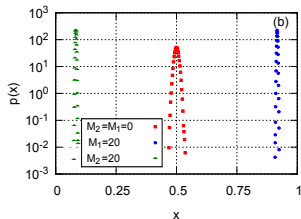
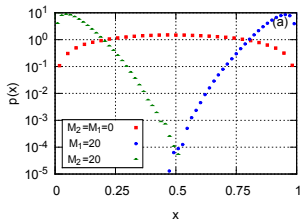
3 minučių absoliuti graža: papildyto modelio rezultatų (juoda) palyginimas su duomenimis iš Niujorko (raudona), Varšuvos (mėlyna) ir Vilniaus (violetinė) biržų.

Gontis ir Kononovicius (PLoS ONE, 2014)

Netiesiškumas ir fluktuacijų suvaldymas

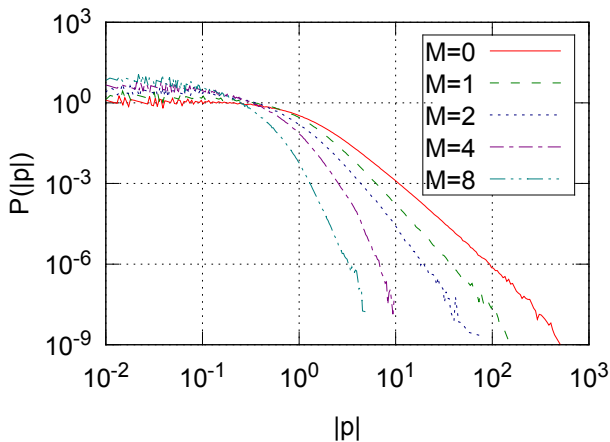
Valdomų agentų įtaka dviejų būsenų modeliui

Modelį papildome agentais, kurie nekeičia savo būsenos dėl vidinių sąveikų. Jų būseną valdoma kaip modelio parametras.



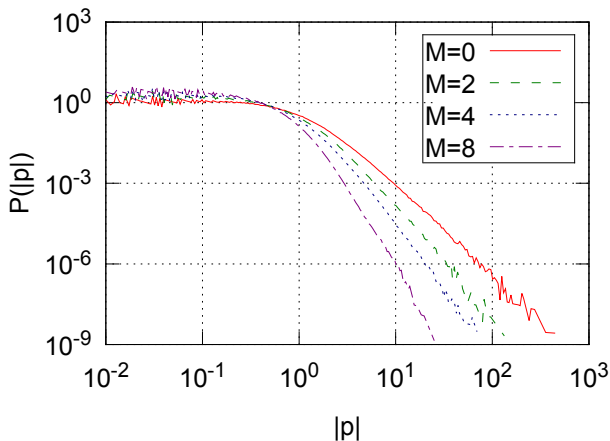
“Valdomi” fundamentalistai trijų būsenų modelyje

Valdomi agentai yra prekiauja kaip fundamentalistai.



Atsitiktinė prekyba trijų būsenų modelyje

“Simetrinis” valdomų agentų poveikis - visi agentai “mato”, kad pusė valdomų elgiasi taip pat kaip ir jie, o pusė elgiasi priešingai.



Ačiū už dėmesį!

