

Įvadas į tinklų modeliavimą

Aleksejus Kononovičius

Parengta pagal

A. L. Barabasi “Network Science” (<http://barabasilab.neu.edu/networksciencebook/>),
M. O. Jackson “Social and Economic Networks” (Stanford MOOC @ Coursera),
M. Kearns “Networked Life” (Penn MOOC @ Coursera)

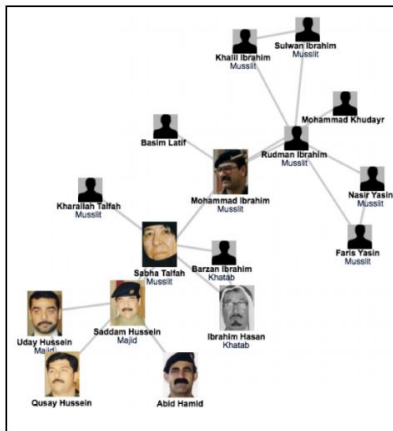
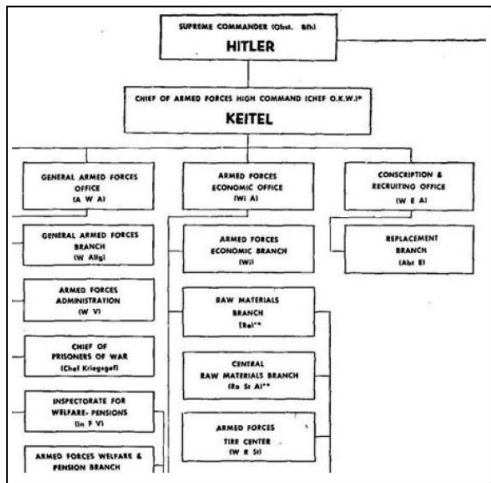
2014-04-29

Įvado sudedamosios dalys

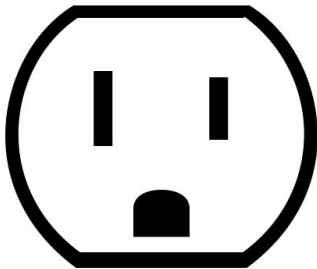
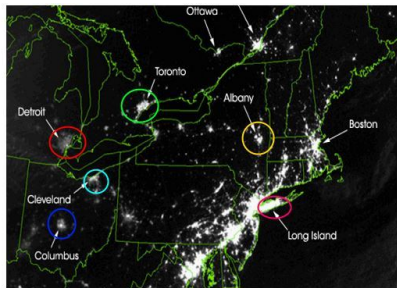
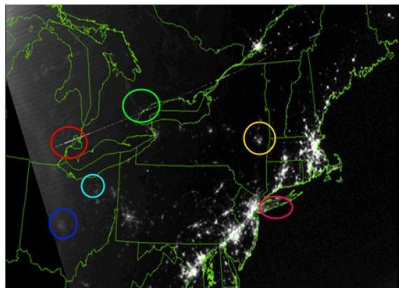
- 1 Kontekstas
- 2 Terminologija
- 3 Atsitiktinio tinklo modeliai
- 4 Mažas pasaulis ir jo modeliai
- 5 Mastelio nebuvimas ir laipsniniai skirstiniai tinkluose
- 6 Bemastelio tinklo modeliai
- 7 Tankėjantis pasaulis ir jo modeliai

Kontekstas

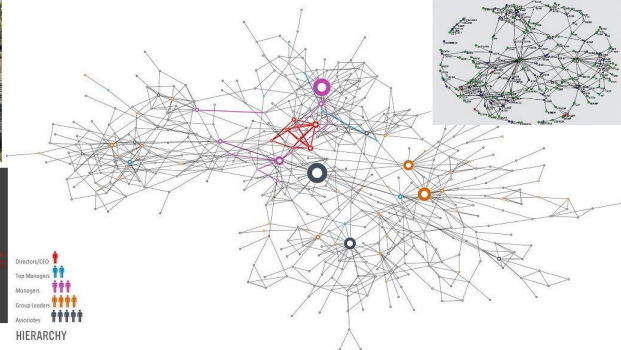
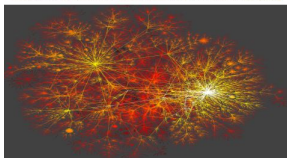
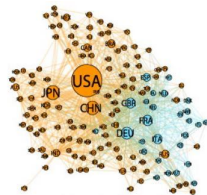
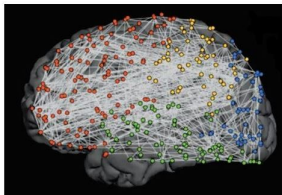
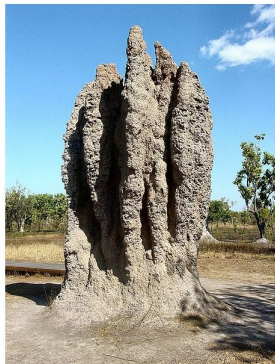
Kaip buvo pagautas Hussein?



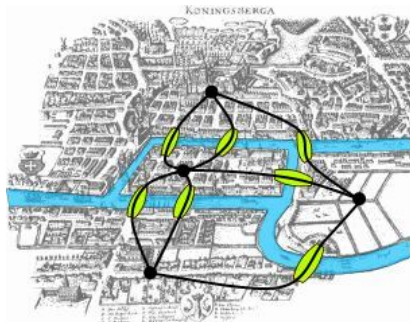
2003 metų JAV elektros tinklo gedimas



“Už kiekvienos sudėtingos sistemos slypi sąveikų tinklas”



Kodėl dabar?



- ~1735 L. Euler: septynių Karaliaučiaus tiltų problema
- XVIII a. vidurys A. Komte: socialinė fizika
- ~1930 J. Moreno: Pirmieji grafai socialiniuose moksluose
- 1960-1980: pirmieji ekologinių, komunikacijų tinklų tyrimai

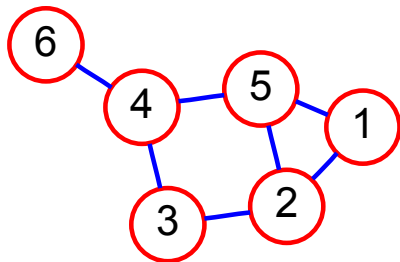
- duomenų perteklius (internetinės duomenų bazės, socialiniai tinklai, internetiniai kompiuteriniai žaidimai, ...).
- universalumas - tinklai yra visur, o ir jų statistinės savybės yra panašios.
- (skubus) poreikis suprasti - potencialūs taikymai kuriant stabilesnę infrastruktūrą (nuo logistikos iki finansų).

Terminologija

Visa sistema gali būti vadinama **grafu** (angl. graph) arba **tinklu** (angl. network).

Sistemos sudedamosios dalys vadinamos **mazgais** arba **viršūnėmis** (angl. vertices, nodes).

Sąryšiai tarp mazgų vadinami **briaunomis** arba **ryšiais** (angl. edge, link).

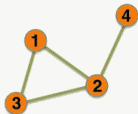


Gretimi mazgai yra tie mazgai, kuriuos jungia briauna. **Gretimoms briaunoms** yra tos briaunos, kurios turi bendrą mazgą.

Mazgo laipsnis yra lygus jam gretimų mazgų skaičiui.

Tinklų įvairovė ir gretimumo matrica (angl. adjacency matrix)

Undirected

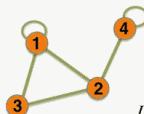


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Self-interactions

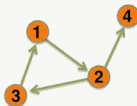


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} \neq 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j \neq i}^N A_{ij} + \sum_{i=1}^N A_{ii} \quad ?$$

Directed

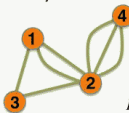


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0 \quad A_{ij} \neq A_{ji}$$

$$L = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{L}{N}$$

Multigraph (undirected)

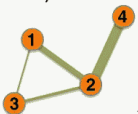


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \text{nonzero}(A_{ij}) \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Weighted (undirected)

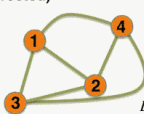


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \text{nonzero}(A_{ij}) \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Complete Graph (undirected)



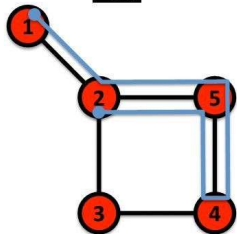
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0 \quad A_{i \neq j} = 1$$

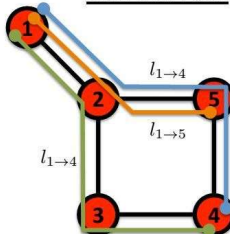
$$L = L_{\max} = \frac{N(N-1)}{2} \quad \langle k \rangle = N-1$$

Kelias, geodezė, ciklas, diametras

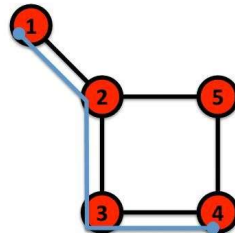
Path



Shortest Path



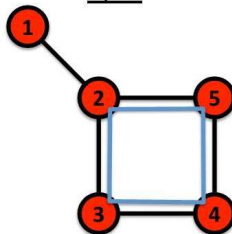
Diameter



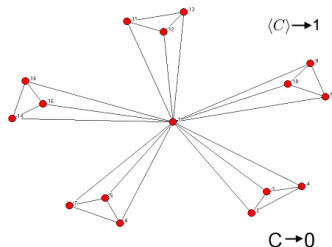
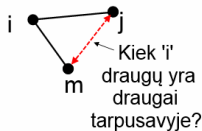
Average Path Length

$$\begin{aligned} & (l_{1 \rightarrow 2} + l_{1 \rightarrow 3} + l_{1 \rightarrow 4} + \\ & + l_{1 \rightarrow 5} + l_{2 \rightarrow 3} + l_{2 \rightarrow 4} + \\ & + l_{2 \rightarrow 5} + l_{3 \rightarrow 4} + l_{3 \rightarrow 5} + \\ & + l_{4 \rightarrow 5}) / 10 = 1.6 \end{aligned}$$

Cycle



Klasterizacija - grafo "tankumo" įvertinimas



$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)},$$

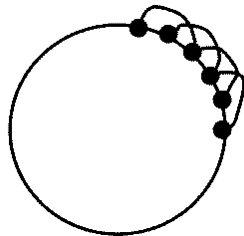
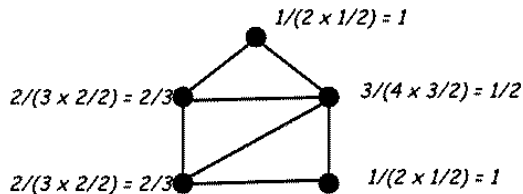
L_i yra briaunų jungiančių mazgus, gretimus i -tajam, skaičius.

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i.$$

$$C = \frac{3 \times \text{unikalių uždarų trikampių skaičius}}{\text{trigubų grandinių skaičius}}.$$

Kas yra aukšta klasterizacija?

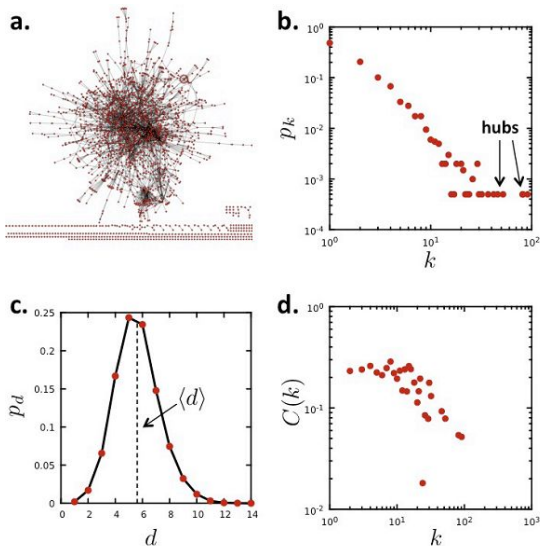
Kokie tinklai yra tankūs?



Tinklas kairėje: $\langle C \rangle = 0.7(6)$, $\langle k \rangle = 2.8$, $p = 0.7$.

Tinklas dešinėje: $\langle C \rangle = 0.5$, $\langle k \rangle = 4$, $p = \frac{4}{N}$.

Pavyzdys: Proteinų tarpusavio sąveikos tinklas

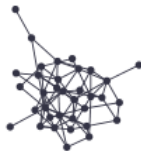


Atsitiktinio tinklo modeliai

Erdoš-Renyi (atsitiktinio tinklo) modelis

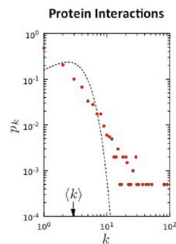
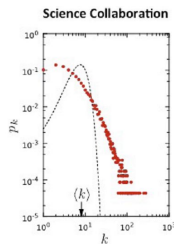
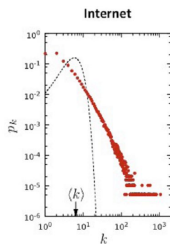
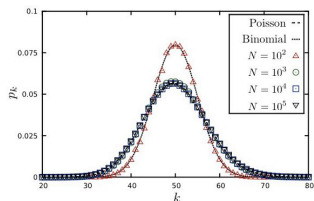
Algoritmas:

- 1 Pradėkime su tuščiu N mazgų grafu.
- 2 Pasirinkime dviejų mazgų porą ir su tikimybe p sukurkime tarp jų briauną.
- 3 Kartokime 2 žingsnį su visomis galimomis mazgų poromis, $N(N - 1)/2$.



<http://mokslasplius.lt/rizikos-fizika/erdos-renyi-model>

Erdoš-Renyi modelio savybės

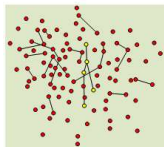
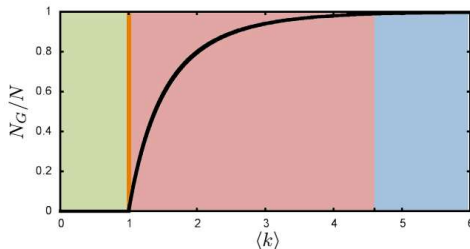


Klasterizacija: $\langle C \rangle = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$.

Diametras:

$$N = 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \dots + \langle k \rangle^d = \frac{\langle k \rangle^{d+1} - 1}{\langle k \rangle - 1} \approx \langle k \rangle^d \Rightarrow d \sim \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}.$$

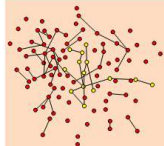
Fazinis “virsimas” Erdoš-Renyi modelyje



$$\langle k \rangle < 1$$

Subcritical regime

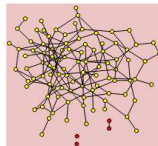
- No giant component.
- Cluster size distribution:
 $P(s) \sim e^{-\alpha s}$
- The size of the largest cluster:
 $N_G \sim \ln N$
- The clusters are trees.



$$\langle k \rangle = 1$$

Critical point

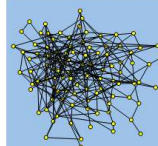
- No giant component.
- Cluster size distribution:
 $P(s) \sim s^{-3/2}$
- Size of the largest cluster:
 $N_G \sim N^{2/3}$
- The clusters may contain loops.



$$\langle k \rangle > 1$$

Supercritical regime

- Single giant component.
- Cluster size distribution:
 $P(s) \sim e^{-\alpha s}$
- Size of the giant component:
 $N_G \sim (p - p_c)N$
- The small clusters are trees.
- GC has loops.



$$\langle k \rangle \geq \ln N$$

Fully connected regime

- Single giant component.
- No isolated nodes or clusters.
- Size of the giant component:
 $N_G = N$
- GC has many loops.

* Didžiosios komponentės dydis, $S = N_G/N$

Jeigu mazgas i yra didžiojoje komponentėje, tai jam gretimas mazgas j taip pat turi būti didžiojoje komponentėje. Tad yra dvi priežastys kodėl i gali nebūti didžiojoje komponentėje:

- Nėra briaunos tarp i ir j - tikimybė $1 - p$,
- Briauna tarp i ir j yra, bet j nepriklauso didžiajai komponentei - tikimybė pu (čia $u = 1 - N_G/N$).

Bendrai paėmus:

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}, \quad \Rightarrow \quad \ln u = (N-1) \ln \left[1 - \frac{\langle k \rangle}{N-1} (1 - u) \right],$$

$$\ln[1 - \varepsilon] \approx -\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad S = 1 - e^{-\langle k \rangle S}.$$



* Perėjimas prie pilnai sujungto tinklo

Beveik visi mazgai turėtų priklausyti didžiajai komponentei ($N_G \approx N$), tad likusių izoliuotų mazgų skaičius yra:

$$N_i \approx N(1-p)^{N_G} \approx N(1-p)^N = N \left(1 - \frac{Np}{N}\right)^N \approx Ne^{-pN},$$

$$Ne^{-pN} = 1, \quad \Rightarrow \quad p \sim \frac{\ln N}{N}, \quad \Rightarrow \quad \langle k \rangle \sim \ln N.$$

Mažas pasaulis ir jo modeliai

Šeši atskirties laipsniai: Milgram'o eksperimentas

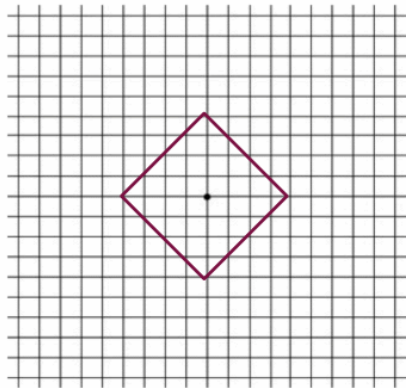
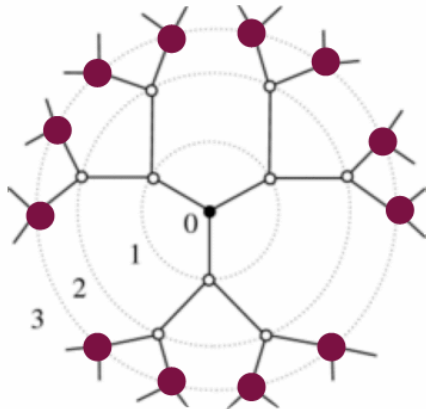
Stanley Milgram 1967 metais pasiūlė tokį eksperimentą:

- ➊ Išsiųskime laišką atsitiktinai parinktam žmogui (Omaha ir Vičita).
- ➋ Šiam žmogui suteikime bazinės informacijos apie pageidaujamą galutinį laiško adresatą, bet nesakykim jo adreso.
- ➌ Eksperimente sutinkantis dalyvauti žmogus turėtų persiųsti laišką kitam žmogui, kurį pažįsta tiesiogiai ir kuris galėtų galbūt pažinoti galutinį adresatą.
- ➍ Kiekvienas kitas gavėjas turi kartoti turėtų laišką persiųsti toliau, kol galų gale laišką pasiektų galutinį adresatą.



“Atsitiktinė” struktūra prieš lokalią struktūrą

Kaip greitai pasieksime pageidaujamą mazgą?



Laipsninis augimas - $V(d) \sim \langle k \rangle^d$. Polinominis augimas - $V(d) \sim d^D$.

Mūsų pasaulis yra lokalus, bet mažo diametro

“It’s a small world after all” (Sherman Brothers)

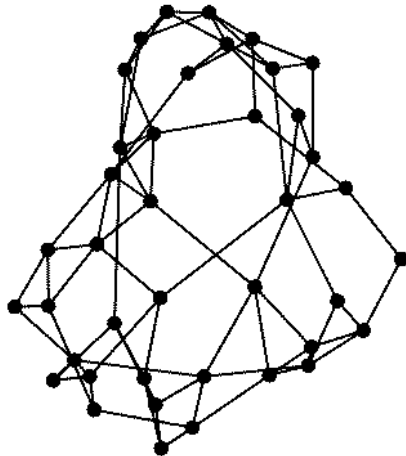
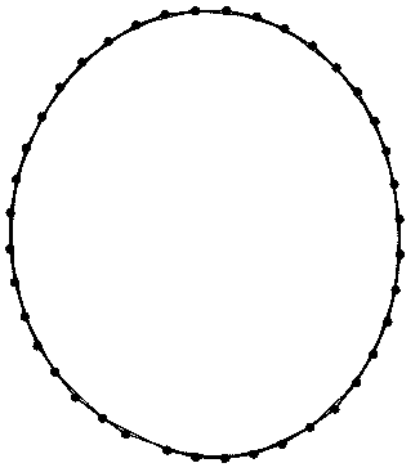
Kaip taip gali būti?



Tereikia įterpti kelias atsitiktines briaunas.

Watts-Strogatz (mažo pasaulio) modelis

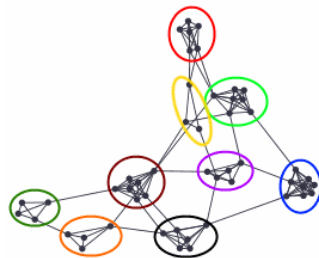
Drastiškas vidutinio kelio sumažėjimas per nežymų klasterizacijos sumažėjimą



Ląsteliniai (angl. cellular) tinklai

Algoritmas:

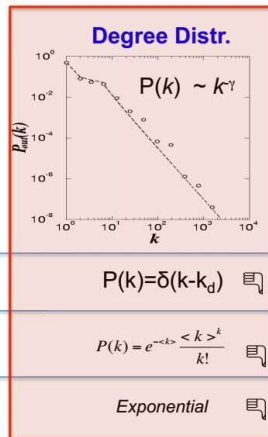
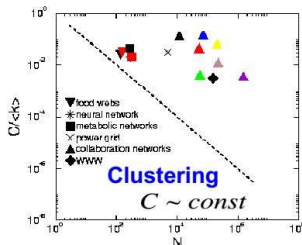
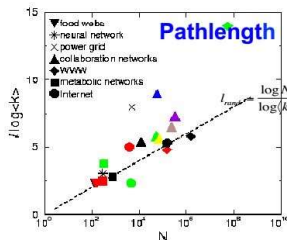
- 1 Pradėkime su tuščiu N mazgų grafu.
- 2 Kiekvienam mazgui atsitiktinai sugeneruokime atsitiktinį x_i . Pagal x_i vertes priskirkime mazgui “grupe”.
- 3 Pasirinkime dviejų mazgų porą ir su tikimybe p_{ic} , jei jie priklauso vienai grupei, arba p_{bc} , jei jie priklauso skirtingoms grupėms, sukurkime tarp jų briauną.
- 4 Kartokime 2 žingsnį su visomis galimomis mazgų poromis, $N(N-1)/2$.



<http://mokslasplius.lt/rizikos-fizika/cellular-network>

Mastelio nebuvimas ir laipsniniai skirstiniai
tinkluose

Kas negerai su ankstesniais modeliais?



Regular network

$$l \approx N^{1/D}$$



$$C \sim const$$



$$P(k) = \delta(k - k_d)$$



Erdos-Renyi

$$l_{rand} \approx \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$



$$C_{rand} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$$



$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$



Watts-Strogatz

$$l_{rand} \approx \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}$$



$$C \sim const$$

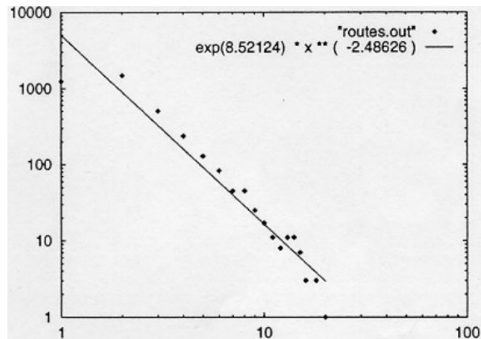
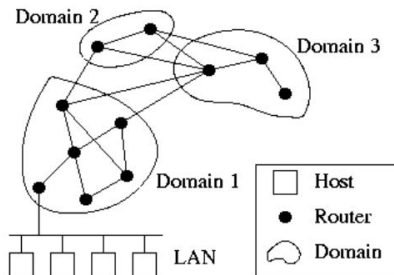


Exponential



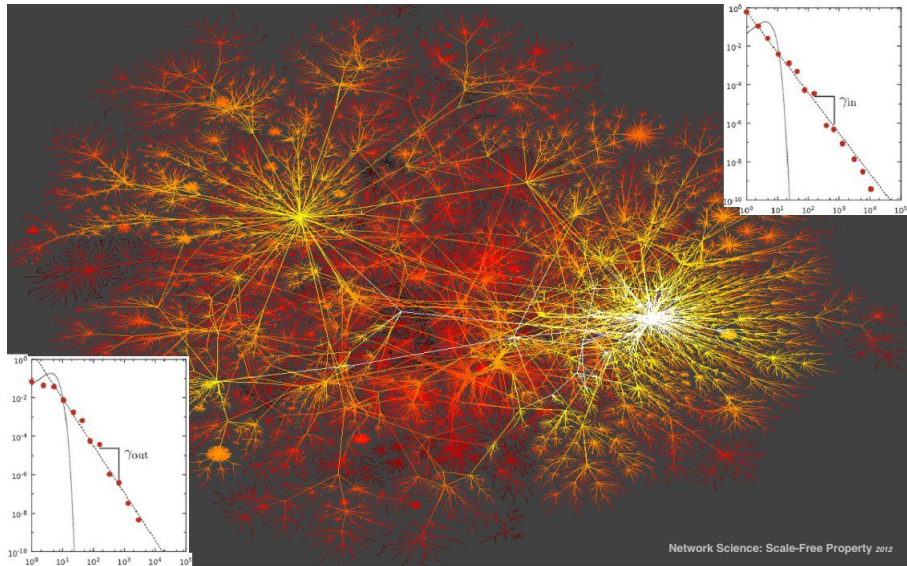
Laipsninių skirstinių paplitimas

Maršrutizatorių jungtys



Laipsninių skirstinių paplitimas

Nuorodos tarp svetainių internete



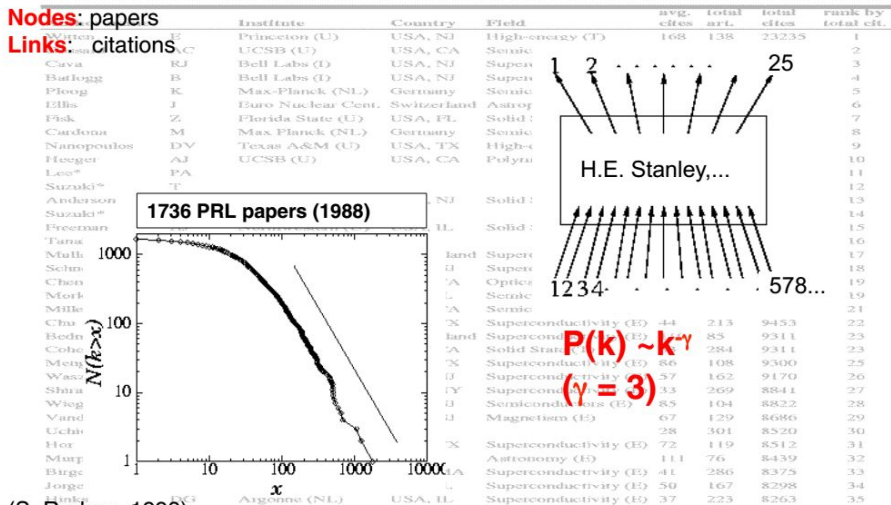
Laipsninių skirstinių paplitimas

PRL straipsnių cituojamumas

Out of over 500,000 Examined
(see <http://www.sst.nrl.gov>)

Nodes: papers

Links: citations



(S. Redner, 1998)

* citation total may be skewed because of multiple authors with the same name

Network Science: Scale-Free P

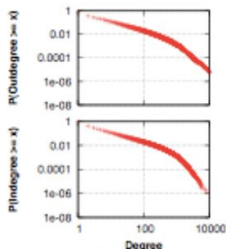
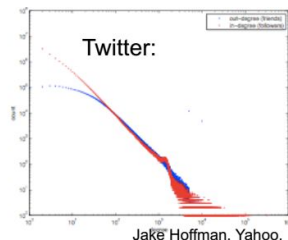
Laipsninių skirstinių paplitimas

Socialiniai tinklai

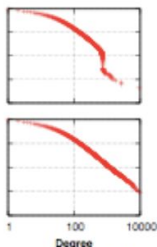
Nodes: online user
Links: email contact

All distributions show a fat-tail behavior:
there are orders of magnitude spread in the degrees

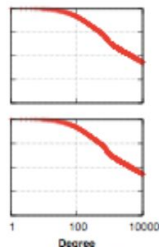
Alan Mislove, Measurement and Analysis of Online Social Networks



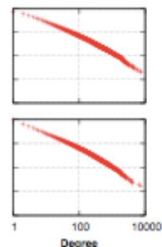
(a) Flickr



(b) LiveJournal

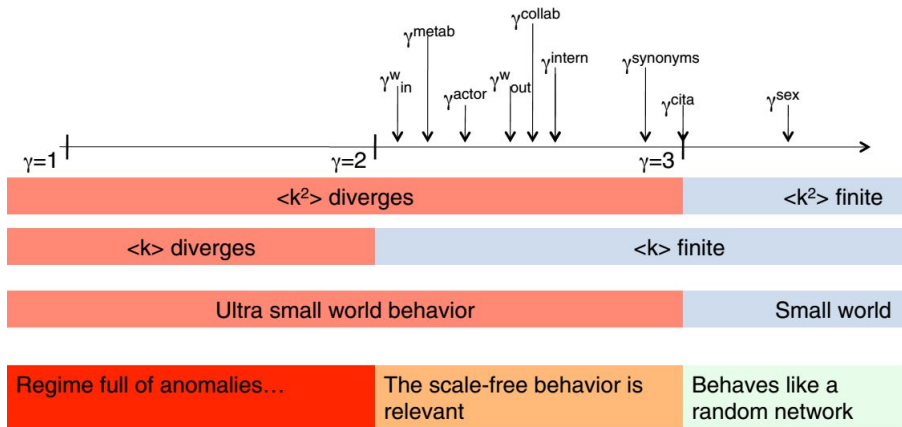


(c) Orkut

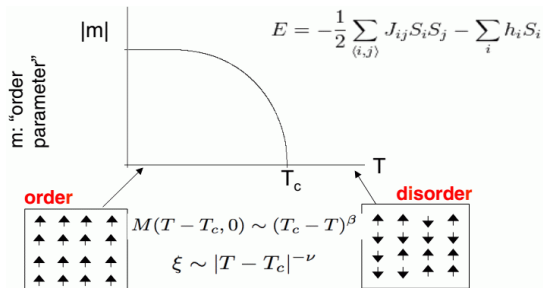


(d) YouTube

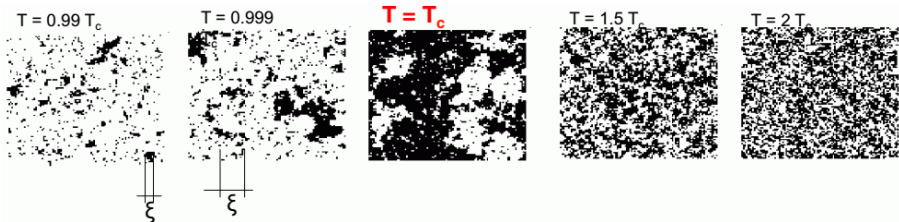
Laipsninių skirstinių paplitimas



Mastelio nebuvinimas - fizika (Izingo modelis)



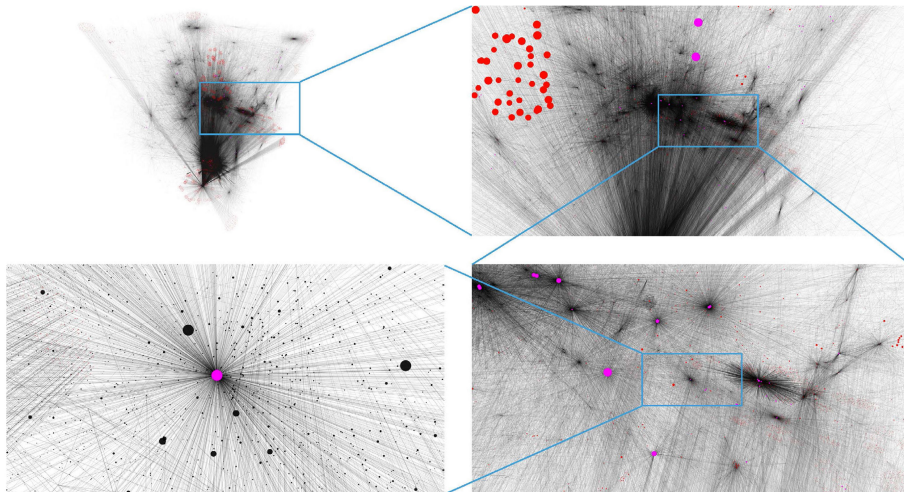
- Kai $T \gg T_c$, $\xi = 0$ dėl šiluminių svyravimų.
- Kai $T \ll T_c$, $\xi = 1$ dėl sąveikų lokalumo.
- Kai $T \rightarrow T_c$, ξ tampa neapibrėžtas.



Atsitiktinio tinklo (ER modelis) atveju vidurkis yra informatyvus dydis - galime tikėtis, kad mazgai turės laipsnius artimus $\langle k \rangle \pm \sigma_k$. Arba $\langle k \rangle \pm 3\sigma_k$? Ar $\langle k \rangle \pm 5\sigma_k$? σ_k apibrėžia fliktuacijų mastą - proceso charakteringą skalę.

Žinome, kad laipsninio skirstinio σ_k yra neapibrėžtas, kai $\gamma < 3$. Dauguma žinomų tinklų turi $2 < \gamma < 3$, tad jie neturi charakteringos skalės.

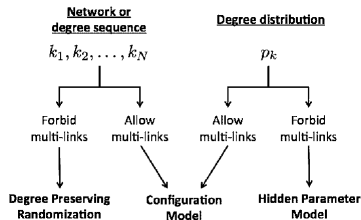
Mastelio nebuvimas - vizualiai



Bemastelio tinklo modeliai

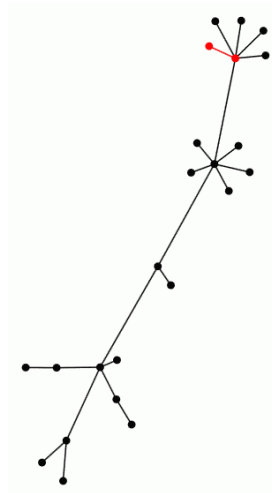
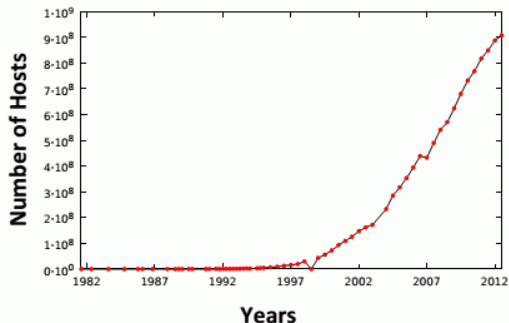
Dirbtiniai būdai gauti laipsninį (ir ne tik) skirstinį

- **Konfigūracinis modelis.** Sugeneruojam aibę mazgų su reikalingu laipsniu. Atsitiktinai sujungiam “palaidus galus”.
- **Jungčių sukeitimo “modelis”.** Atsitiktinai sukeičiame sugeneruoto tinklo briaunas.
- **Paslėpto parametro modelis.** Mazgams priskiriame paslėptą parametą, η_i . Jungiame mazgus i ir j su tikimybe proporcinga $\eta_i \eta_j$.



Barabasi-Albert (bemastelio tinklo) modelis

- Realūs tinklai **auga**.
- O mažai jungiasi prie **populiarių mazgų** - $p_i \sim k_i$.



<http://mokslasplius.lt/rizikos-fizika/barabasi-albert-model>

* BA modelio sprendimas “kontinuumo” metodu

Kiekvienu diskrečiu laiko momentu t į tinklą atkeliauja naujas mazgas ir sukuria m briaunų:

$$\partial_t k_i = m p_i = m \frac{k_i}{\sum_i k_i}.$$

Taigi mazgų laipsnių suma kiekviename žingsnyje paauga per $2m$:

$$\sum_i k_i = 2mt, \quad \Rightarrow \quad \partial_t k_i = \frac{k_i}{2t}, \quad k_i(i) = m \quad \Rightarrow \quad k_i(t) = m \sqrt{\frac{t}{i}}.$$

Kelių mazgų laipsnis yra mažesnis už k ? $m \sqrt{\frac{t}{i}} < k, \quad \Rightarrow \quad i > \frac{m^2 t}{k^2},$

$$\text{PDF: } p_k \sim \partial_k \left(\frac{t - \frac{m^2 t}{k^2}}{t} \right) = \partial_k \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right) = \boxed{\frac{2m^2}{k^3}}.$$

* BA modelio sprendimas “kinetiniu” metodu I

$k \rightarrow k + 1$ sparta:

$$r_- = \frac{k}{2mt} \times Np(k, t) \times m = \frac{k}{2}p(k, t).$$

$k - 1 \rightarrow k$ sparta:

$$r_+ = \begin{cases} \frac{k-1}{2mt} \times Np(k-1, t) \times m = \frac{k-1}{2}p(k-1, t) & k > m \\ 1 & k = m \end{cases}.$$

Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$(N+1)p(k, t+1) = r_0 + r_+ - r_- = Np(k, t) + \frac{k-1}{2}p(k-1, t) - \frac{k}{2}p(k, t),$$

$$(N+1)p(m, t+1) = Np(m, t) + 1 - \frac{m}{2}p(m, t).$$

* BA modelio sprendimas “kinetiniu” metodu II

Imkime ribą $t \rightarrow \infty$. Kai $k > m$:

$$(N+1)p(k, \infty) - Np(k, \infty) = p(k) = \frac{k-1}{2}p(k-1) - \frac{k}{2}p(k),$$

$$p(k) = \frac{k-1}{k+2}p(k-1), \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(k+1) = \frac{k}{k+3}p(k)}.$$

Norint taikyt rekurentinę formulę, reikia žinoti pradinę vertę ($k = m$):

$$(N+1)p(m, \infty) - Np(m, \infty) = p(m) = 1 - \frac{m}{2}p(m),$$

$$\boxed{p(m) = \frac{2}{2+m}}.$$

* BA modelio sprendimas “kinetiniu” metodu III

$$p(m+1) = \frac{m}{m+3}p(m) = \frac{2m}{(m+2)(m+3)},$$

$$p(m+2) = \frac{m+1}{m+4}p(m+1) = \frac{2m(m+1)}{(m+2)(m+3)(m+4)},$$

$$p(m+3) = \frac{m+2}{m+5}p(m+2) = \frac{2m(m+1)\cancel{(m+2)}}{\cancel{(m+2)}(m+3)(m+4)(m+5)},$$

$$p(m+4) = \frac{m+3}{m+6}p(m+2) = \frac{2m(m+1)\cancel{(m+3)}}{\cancel{(m+3)}(m+4)(m+5)(m+6)},$$

...

$$\boxed{p(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \approx \frac{2m^2}{k^3}}.$$

Gal užteks tik tinklo augimo mechanizmo?

Tegu kiekvienas naujas mazgas prisijungia prie m visiškai atsitiktinių mazgų su tikimybe:

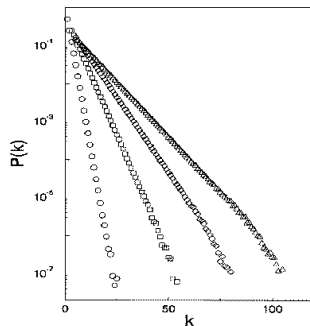
$$p_i = \frac{1}{m_0 + t - 1}.$$

$$\partial_t k_i = m p_i,$$

$$k_i(t) = m \left[\ln \left(\frac{m_0 + t - 1}{m_0 + t_i - 1} \right) + 1 \right],$$

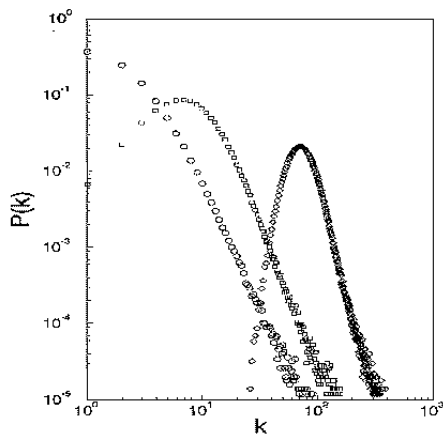
...

$$p(k) \sim e^{-k}.$$



Neužteks!

Gal užteks jungimosi prie populiarių mechanizmo?



Kol bendras jungčių skaičius mažas ($L \ll N^2$) pradeda formuotis bemastelio tinklo užuomazgos.

Didėjant jungčių skaičiui ($1 \gg L < N^2$) populiariausi mazgai dažnai nebegali “priimti” daugiau briaunų.

Susiformuoja pilnas grafas.

Tad - augimas irgi yra būtinas!

Empirinis svarbos parodymas

Reikia turėti kelis tinklo
“paveikslus” skirtingais laiko
momentais:

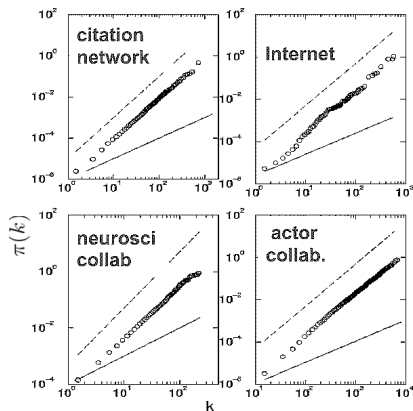
$$\frac{\Delta k_i}{\Delta t} \propto \Pi(k_i).$$

Jei $\Pi(k_i) = k_i$, tai šis mechanizmas
yra svarbus.

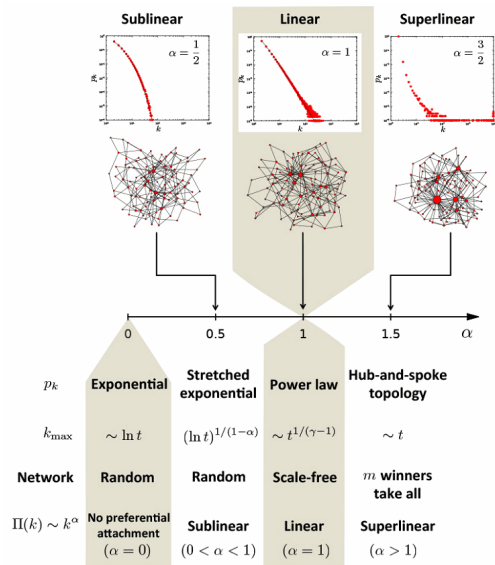
Realiai $\Pi(k_i)$ yra triukšmingas.
Patogiau naudoti:

$$\pi(k) = \sum_{k_i=0}^k \Pi(k_i).$$

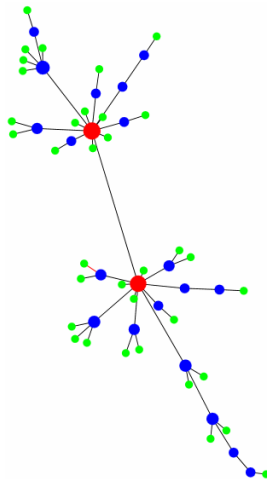
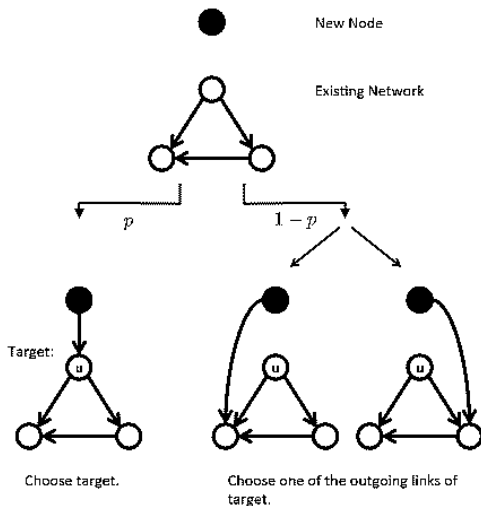
Jei $\pi(k) = k^2$, tai mechanizmas yra svarbus.



O jei... netiesinis prisijungimas prie populiariausių

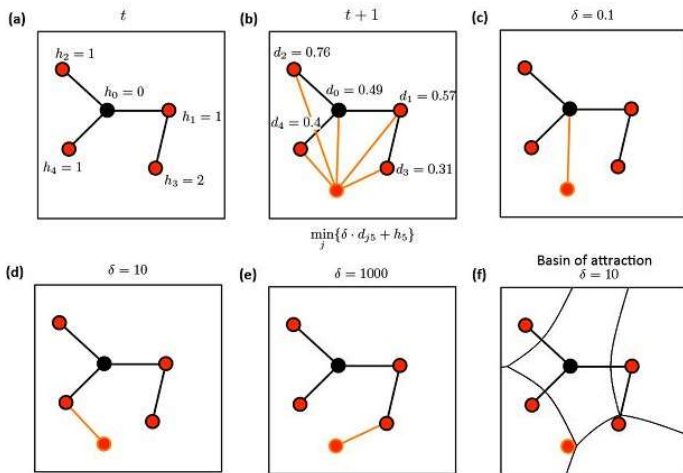


Briaunų nukreipimo (kopijavimo) modelis



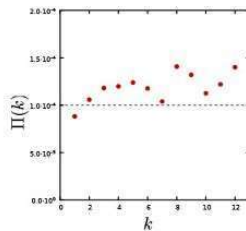
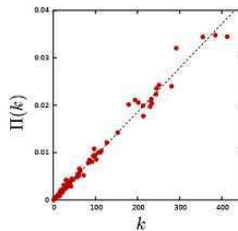
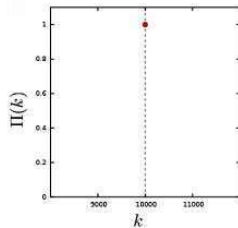
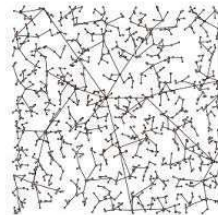
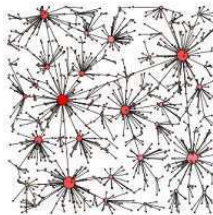
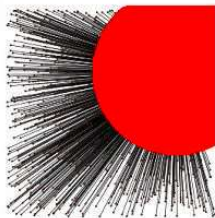
Maršrutizatorių jungimasis

Elementarus modeliuokas: $\min_j \{\delta d_{ij} + h_j\}$



Maršrutizatorių jungimasis

Elementaraus modeliuko rezultatai



** Klasterizacijos koeficientas Barabasi-Albert modelyje

Vidutinis egzistuojančių trikampių skaičius:

$$Nr_l(\triangleleft) = \int_1^N \int_1^N P(i, j)P(i, l)P(j, l)di dj.$$

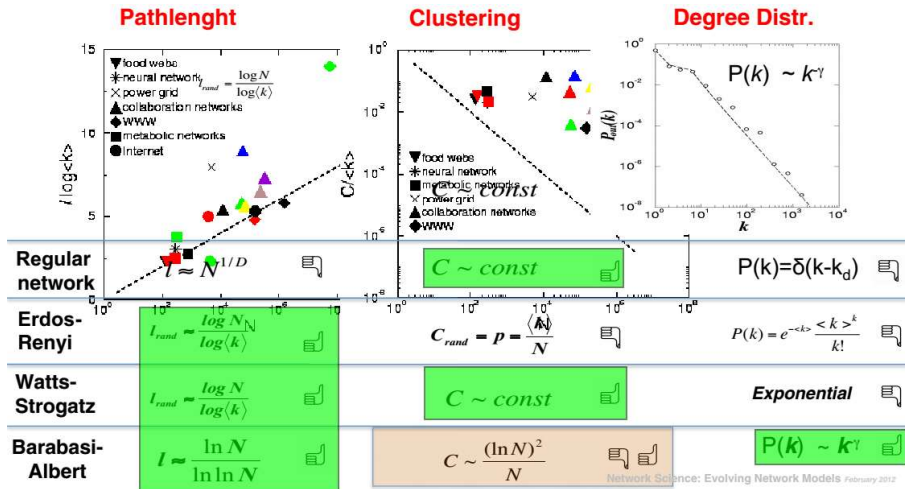
$$P(i, j) = m \frac{k_i(j)}{2m_j}, \quad k_i(t = j) = m \sqrt{\frac{t}{t_i}} = m \sqrt{\frac{j}{i}} \quad \Rightarrow \quad P(i, j) = \frac{m}{2\sqrt{ij}}.$$

$$Nr_l(\triangleleft) = \frac{m^3}{8l} \int_1^N \frac{di}{i} \int_1^N \frac{dj}{j} = \frac{m^3}{8l} (\ln N)^2.$$

Kl. coef. randame dalindami iš vidutinio visų galimų trikampių skaičiaus:

$$C = \frac{2Nr_l(\triangleleft)}{k_l(k_l - 1)}, \quad k_l(k_l - 1) \approx k_l^2 = m^2 \frac{N}{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{m(\ln N)^2}{4N}}.$$

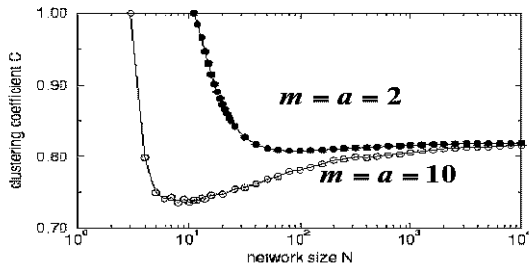
Taigi panagrinėjome ir Barabasi-Albert modelį...



Susitvarkome su klasterizacija (Klemm modelis)

Algoritmas:

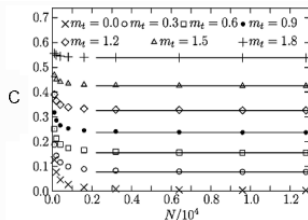
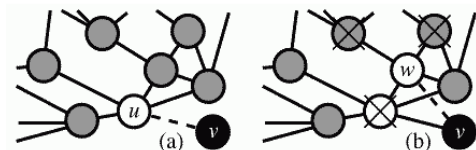
- 1 Pradėkime su pilnu m aktyvių mazgų grafu.
- 2 Pridėkime aktyvų mazgą ir sujunkime jį su m aktyvių senųjų mazgų.
- 3 “Išjunkime” vieną aktyvių mazgų su tikimybe $p_d(k_i) \propto \frac{1}{a+k_i}$.



Susitvarkome su klasterizacija (Holme modelis)

Algoritmas:

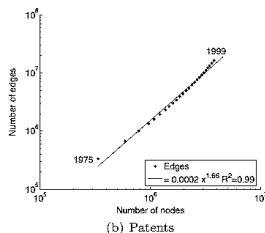
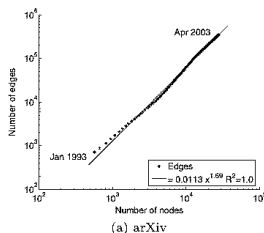
- 1 Pradedame su tuščiu m_0 mazgų grafu (???)
- 2 Kiekviename žingsnyje pridedame mazgą ir m briaunų:
 - Pirmoji briauna visada pridedama pagal “prisijungimo prie populiarių” mechanizmą (a).
 - Likusios $m - 1$ briaunų pridedamos jungiantis prie “populiaraus” mazgo “kaimynų” (su tikimybe p_t (b)) arba vėl renkamasi pagal “populiarumą” (a).



Tančējantis pasaulis ir jo modeļi

Realūs tinklai tankėja!

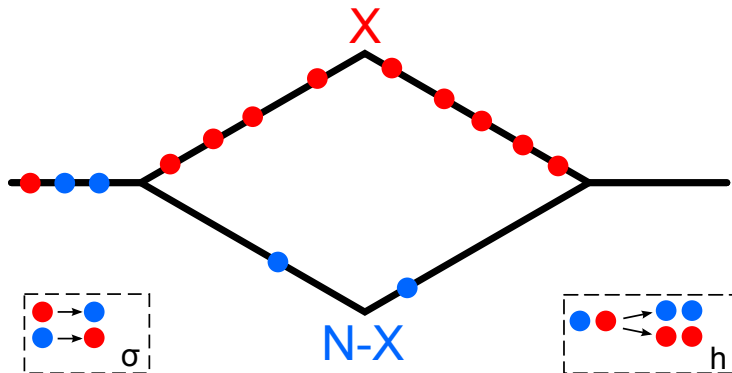
- 1998 metais vidutinis interneto svetainės laipsnis internete padidėjo nuo 3.42 iki 3.96.
- Per 5 mėnesius, 1999 metais, vidutinis interneto maršrutizatorių laipsnis padidėjo nuo 7.22 iki 7.86.
- Tankėja įvairūs su žmonių bendradarbiavimu susiję socialiniai tinklai.



R. Albert, A. L. Barabasi, Rev.Mod.Phys. 74, 47-97 (2002)

J. Leskovec et al., ACM Trans.Knowl.Discov.Data 1, Art. 2 (2007)

Kodėl (man) tai įdomu?



Yra patyrinėti du skirtingi Kirmano modelio variantai:

$$p(i \rightarrow j) = \sigma_j + hX_j, \quad p(i \rightarrow j) = \sigma_j + \frac{h}{N}X_j.$$

“Tiesiai į kaktą” modelis

Algoritmas:

- 1 Kiekviename žingsnyje pridedame naują mazgą.
- 2 Į šį mazgą nukreipiame n briaunų iš atsitiktinai parinktų mazgų.
- 3 Tarp visų mazgų sukuriame $c_0 t^\alpha$ naujų briaunų. Pradinis mazgas parenkamas atsitiktinai, o mazgas į kurį rodo briauna parenkamas pagal $p_{ij} \sim k_j^{(in)} + A$.

Rezultatas:

- Laipsninis skirstinys: $p(k) \sim k^{-1-1/(1+\alpha)}$.
- Tankėjimas: $\langle k \rangle \sim t^\alpha$.
- Tik esant laipsniniam tankėjimui įmanoma gauti laipsninį pasiskirstymą.

Dorogovtsev, Mendes, Phys.Rev.E 63, 025101 (2001)

Bendruomenėmis paremtas modelis

Algoritmas:

- 1 Pradžioje turime tinklą ir medį, kuriuos sudaro 1 mazgas. Medyje saugoma tinklo mazgų priklausomybė bendruomenei.
- 2 Kiekviename laiko žingsnyje t pridedame b^t mazgų (medyje jie užpildo naują, žemiausią, hierarchijos lygį).
- 3 Nauji mazgai gali prisijungti prie kitų tinklo mazgų su tikimybe proporcinga c^{-h} (čia h atstumas tarp dviejų mazgų medyje).

Rezultatas:

Jeigu $c < b$, tai tinklo tankėjimo laipsnis yra $2 - \log_b(c)$, o mazgo laipsnių skirstinys yra laipsninis (laipsnis - $\frac{1}{2} \log_b(c)$).

J. Leskovec et al., ACM Trans.Knowl.Discov.Data 1, Art. 2 (2007)

“Miško gaisro” modelis

Algoritmas:

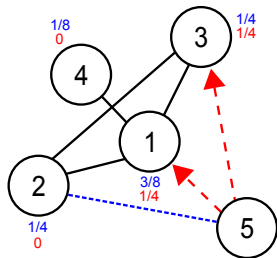
- ➊ Kiekvieniame žingsnyje pridedame naują mazgą, kuris atsitiktinai prisijungia prie vieno tinklo mazgo.
- ➋ Pagal geometrinį skirstinį parenkame briaunų, kurioms naujas mazgas nori sekti (tiek pirmyn, tiek atgal), skaičių.
- ➌ Atsitiktinai parenkame atitinkamą senojo mazgo kaimynų skaičių.
- ➍ Kartojame šiuos du žingsnius, kol yra mazgų prie kurių galima jungtis.

Rezultatas

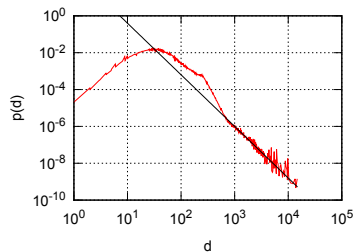
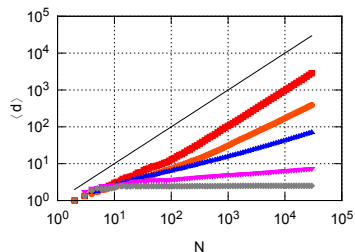
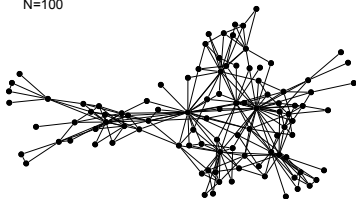
yra identiškas ankstesniam modeliui, tik tam tikriems parametrų rinkiniams tinklo diametras mažėja.

J. Leskovec et al., ACM Trans.Knowl.Discov.Data 1, Art. 2 (2007)

Tolydus perėjimas nuo BA prie ER modelio



N=100



Kas liko neaparta?

- Mazgų laipsnių koreliacijos [Barabasi 7 skyrius],
- Tinklų atsparumas atsitiktiniams įvykiams ir atakoms [Barabasi 8 skyrius],
- Mazgų “centriškumas” (=įtaka) [Jackson, Kearns],
- Strateginis tinklų formavimasis ir stabilumas [Jackson],
- Difuzija, mokymasis ir “žaidimai” ant tinklų [Jackson].

Ačiū už dėmesį

Medžiaga padėta: <http://spektras.itpa.lt/~alius/seminaras140429/>

Interaktyvūs modeliai arba jau yra paskelbti **Rizikos fizikoje** arba greitai laiku bus