

Kinetiniai socio-ekonominių sistemų modeliai

Aleksejus Kononovičius

Pagal M. Patriarca ir A. Chakraborti “Kinetic exchange models: From molecular physics to social science” (American Journal of Physics **81**, p. 618-623, 2013)

2013-11-15

COMPUTATIONAL PHYSICS

The Computational Physics Section publishes articles that help students and their instructors learn about the physics and the computational tools used in contemporary research. Most articles will be solicited, but interested authors should email a proposal to the editors of the Section, Jan Tobochnik (jant@kzoo.edu) or Harvey Gould (hgould@clarku.edu). Summarize the physics and the algorithm you wish to include in your submission and how the material would be accessible to advanced undergraduates or beginning graduate students.

Kinetic exchange models: From molecular physics to social science

Marco Patriarca^{a)}

National Institute of Chemical Physics and Biophysics, Rāvala 10, Tallinn 15042, [Estonia](#)

Anirban Chakraborti^{b)}

Laboratoire de Mathématiques Appliquées aux Systèmes, École Centrale Paris, 92290 Châtenay-Malabry, France

(Received 12 March 2013; accepted 14 May 2013)

We discuss several multi-agent models that have their origin in the kinetic exchange theory of statistical mechanics and have been recently applied to a variety of problems in the social sciences. This class of models can be easily adapted for simulations in areas other than physics, such as the modeling of income and wealth distributions in economics and opinion dynamics in sociology.

© 2013 American Association of Physics Teachers.

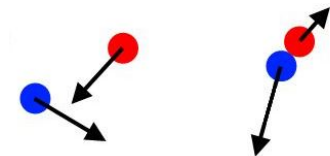
[<http://dx.doi.org/10.1119/1.4807852>]

Kinetinių modelių vieta fizikoje

XIX a. antroje pusėje būtent kinetiniai modeliai leido suformuluoti empirinį termodinamikos dėsnių suvokimą ir padėjo pagrindą statistinei mechanikai.

Šiuolaikiniame kontekste labai įdomu tai, kad Maksvelo ir Bolcmano darbams pagrindą padėjo demografinių duomenų analizė.

Bolcmanas, formuluodamas statistinės mechanikos pagrindus, rašė “Molekulės itin primena individus - jos juda pačiomis įvairiausiomis trajektorijomis”.

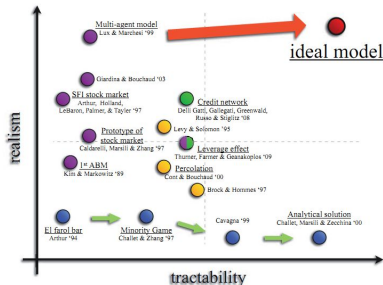


Šiuolaikinis agentų modeliavimas

Vienas pagrindinių akcentų -
“įvairiarūšių” (angl.
heterogeneous) agentų
modeliavimas.

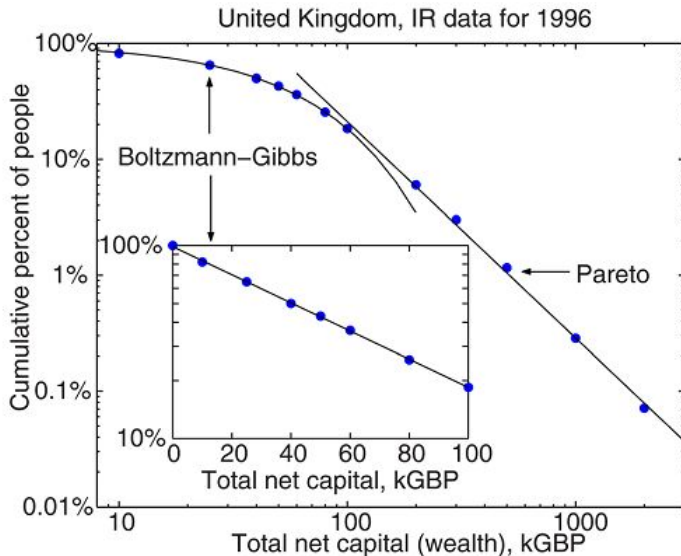
Kinetiniai modeliai:

- savo esme yra paprasti ir skaitmeniškai nesudėtingai realizuojami ir sprendžiami,
- bet gali atkurti įdomias statistines savybes.



M. Cristelli and others. *Critical Overview of Agent-Based Models for Economics*. Proc. Sch. Phys. “E. Fermi”, CLXXVI, psl. 235 - 282, 2012.

Turto skirstinių modeliavimas - kame problema?



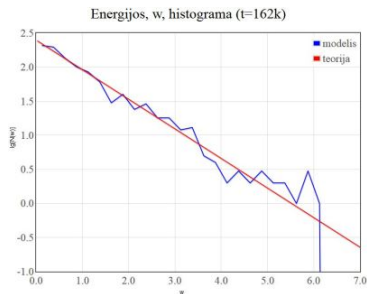
Tarkime, kad turime N molekulių sudarančių dujas, kurios tarpusavyje nesąveikauja, o jų kinetinės energijos yra lygios $w_i(t)$.

- 1 atsitiktinai pasirenkame dvi daleles i ir j ,
- 2 įvertiname mainų mastą, Δw_{ij} ,
- 3 atnaujiname dalelių kinetines energijas:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij},$$

$$w_k(t+1) = w_k(t) \quad (\forall k \neq i, j).$$



Atsitiktinio “padalinimo” modelis: $\Delta w_{ij} = (1 - \varepsilon)w_i(t) - \varepsilon w_j(t)$.

Analizinis elementaraus modelio sprendimas

Pagal (Calbet *et al.*, Phys Rev E, 036108, 2011)

$$\partial_t f(u) = [\partial_t f(u_i) + \partial_t f(u'_i) + \partial_t f(u_j) + \partial_t f(u'_j)]_{u_i, u_j, u'_i, u'_j = u}$$

Dėl to, kad agentai su u_i ir u_j yra pasirenkami ir pakeis savo būseną:

$$\partial_t f(u_i) \sim -f(u_i).$$

Taip pat žinome, kad $u'_i \in [0, u_i + u_j]$,

$$\partial_t f(u'_i) \sim \int_{u'_i}^{\infty} \frac{dU}{U} \int_0^U du_i f(u_i) f(U - u_i).$$

$$N \partial_t f(u) = 0 = -2f_0(u) + 2 \int_u^{\infty} \frac{dU}{U} \int_0^U du_i f_0(u_i) f_0(U - u_i).$$

Relaksacija: $N \partial_t f(u) \simeq -2f(u) + 2f_0(u), \quad \Rightarrow \quad \tau = N/2.$

Modelio papildymas taupymu

Realiose rinkose agentai gali nenorėti “lošti” iš viso savo turto. Jie gali turėti polinkį taupyti, κ :

$$\Delta w_{ij} = (1 - \kappa)[(1 - \varepsilon)w_i(t) - \varepsilon w_j(t)].$$

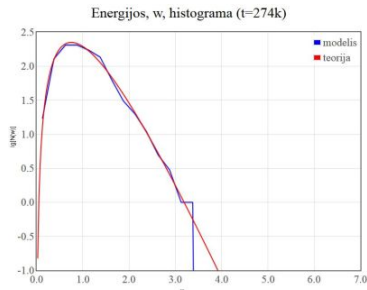
Tokiu atveju skirstinys:

$$p(w) \sim w^{n-1} \exp(-nw),$$

kur $n = 1 + \frac{3\kappa}{1-\kappa}$.

O dujose turime skirtingus energetinių lygmenų tankius:

$$g_{d=3}(w) \sim \sqrt{w}, \quad g_{d=2} \approx \text{const}, \quad g_{d=1} \sim 1/\sqrt{w} \quad \Rightarrow \quad n = d/2.$$



Analizinis modelio su taupymu sprendimas

Pagal (Lallouache, Msc 2, Ecole Centrale Paris, 2010)

Reikia arba skaitmeniškai arba ieškoti atskirų skirstinio momentų:

$$\langle X^m \rangle = \langle [\lambda X_1 + \varepsilon(1 - \lambda)(X_1 + X_2)]^m \rangle.$$

Perrašom:

$$\langle X^m \rangle = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\lambda^{m-k} (1 - \lambda)^k}{k + 1} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \langle X^{m-p} \rangle \langle X^p \rangle,$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{2 + \lambda}{1 + 2\lambda} = \langle x_\gamma^2 \rangle, \quad \langle X^3 \rangle = \frac{3(2 + \lambda)}{(1 + 2\lambda^2)} = \langle x_\gamma^3 \rangle,$$

$$\langle X^4 \rangle \neq \langle x_\gamma^4 \rangle, \quad \left| 1 - \frac{\langle x_\gamma^4 \rangle}{\langle X^4 \rangle} \right| < 10^{-3}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Nepavykęs bandymas apibendrinti d -matį modelį I

Tai kas atrodo gerai - pamąstymai apie greičius

Pasinaudoję judesio kiekio tverme:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}, \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \Delta\vec{v}.$$

Pasinaudojame energijos tverme:

$$v'^2_1 + v'^2_2 = v^2_1 + v^2_2, \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{v}^2 + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \Delta\vec{v} = 0,$$

$$\Delta v = r_2^{(v)} v_2 - r_1^{(v)} v_1, \quad r_i^{(v)} = \cos \alpha_i = \frac{\vec{v}_i \cdot \Delta\vec{v}}{v_i \Delta v}.$$

Atlikę algebrinę ekvilibristiką (Chakraborti ir Patriarca, 2008) gauname:

$$\left\langle \left[r_i^{(v)} \right]^2 \right\rangle \sim \frac{1}{d}.$$

Nepavykęs bandymas apibendrinti d -matį modelį II

Kas negerai - nekorektiškas perėjimas prie energijos

$$\Delta w_{21} = r_2^{(w)} w_2 - r_1^{(w)} w_1, \quad r_i^{(w)} = \left[r_i^{(v)} \right]^2 = \cos^2 \alpha_i.$$

STOP! Iš tiesų $r_i^{(w)} \neq \left[r_i^{(v)} \right]^2$: $w_i = v_i^2/2$,

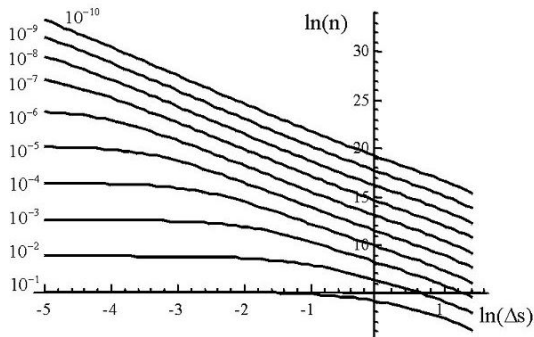
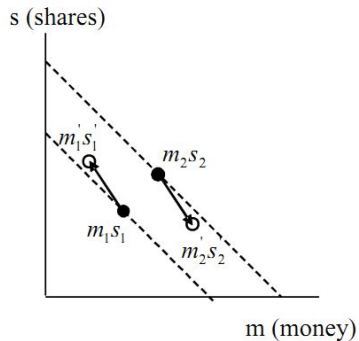
$$\vec{v}'_1 = \left(1 - r_1^{(v)} \right) \vec{v}_1 + r_2^{(v)} \vec{v}_2, \quad w'_1 = \left(1 - r_1^{(w)} \right) w_1 + r_2^{(w)} w_2,$$

$$\begin{aligned} (\vec{v}'_1)^2 &= \left(1 - r_1^{(v)} \right)^2 \vec{v}_1^2 + \left[r_2^{(v)} \right]^2 \vec{v}_2^2 + 2 \left(1 - r_1^{(v)} \right) r_2^{(v)} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \\ &= 2 \left[\left(1 - \sqrt{r_1^{(w)}} \right)^2 w_1 + r_2^{(w)} w_2 + \left(1 - \sqrt{r_1^{(w)}} \right) \sqrt{r_2^{(w)}} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \right] = \\ &= 2 \left[\left(1 - r_1^{(w)} \right) w_1 + r_2^{(w)} w_2 + \dots \right] \neq 2w'_1 \end{aligned}$$

Įdomu tai, kad modelis neveikia ir skaičiuojant per greičius.

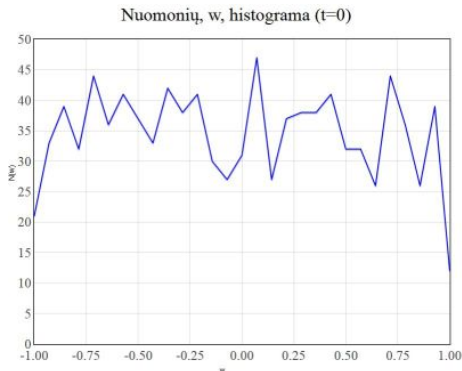
Staliūno darbas - Božė-Einšteino kondensacija

(Nonlinear Analysis: Modelling and Control 10, p. 247-256, 2005)



$$w'_i = \kappa w_i + \mu \varepsilon_1 w_j, \quad w'_j = \kappa w_j + \mu \varepsilon_2 w_i,$$

kur w'_k vertes kartais reikia pataisyti, kad nepabėgtų iš $[-1, 1]$.



Modelis turėtų poliarizuotis, kai $\kappa > 1 - \mu/2$.

Daugelio dalelių sąveika

Pagal (Gallam, Int J Mod Phys C 19, p. 409-440, 2008)

Modeliukas pagal (MP ir AC, AJP 81, 2013).

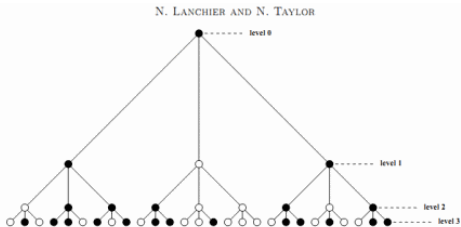


FIGURE 1. Schematic illustration of the bottom-up hierarchical system with $s = 3$ and $N = 3$. Black dots represent individuals supporting opinion +1 and white dots individuals supporting opinion -1.

GALAM'S BOTTOM-UP HIERARCHICAL SYSTEM AND PUBLIC DEBATE MODEL REVISITED

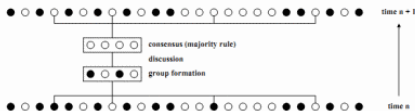
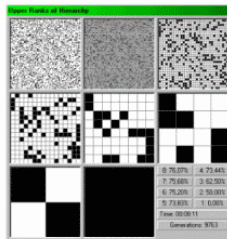
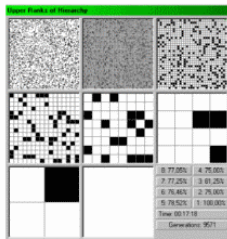


FIGURE 2. One time step in the non-spatial public debate model with $s = 4$ and $N = 25$. Black dots represent individuals supporting opinion +1 and white dots individuals supporting opinion -1.



76.1%



77.1%

Kitos galimos “vienarūšės” modelio versijos

- Kitokios sąveikos taisyklės: **fiksuotos vertės mainai** $\Delta w_{ij} = w_0$, **minimumo mainai** $\Delta w_{ij} = \min(w_i, w_j)$.
- **Sąveikų apmokestinimas** - “socializmas”.
- **Įsiskolinimai**:
 - galima pasiskolinti iki w_{max} , dalelė yra “skoloje” ir tiek,
 - galima pasiskolinti iki w_{max} , **bet skolą padengia likusios dalelės** - “kapitalizmas”.
- **Fiksuotos santaupos** - dalelės visada pasilieka bent w_0 energijos.

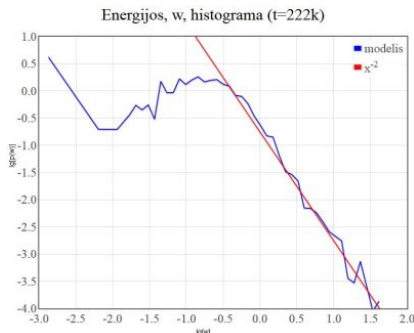


Įvairiarūšis taupymo modelis

Juk ne visi agentai privalo būti vienodi:

$$\Delta w_{ij} = (1 - \varepsilon)(1 - \kappa_i)w_i(t) - (1 - \kappa_j)\varepsilon w_j(t),$$

kur $\varepsilon \in (0, 1)$ yra atsitiktinis dydis generuojamas kiekvienos naujos sąveikos metu, o $\kappa_k \in (0, 1)$ yra modeliavimo pradžioje atsitiktinai pasirenkamas agento k -tojo “taupumas”.



Kodėl pavyko gauti laipsninį skirstinį?

Kiekvieno agento turto skirstinys yra B-G tipo, bet jei skirtingi agentai turi skirtingus κ_i , tai kolektyvinis skirstinys gali būti ir laipsninis:

$$\sum_{i=1}^N x^{\frac{3\kappa_i}{1-\kappa_i}} \exp \left[- \left(1 + \frac{3\kappa_i}{1-\kappa_i} \right) x \right] \sim x^{-\lambda}$$

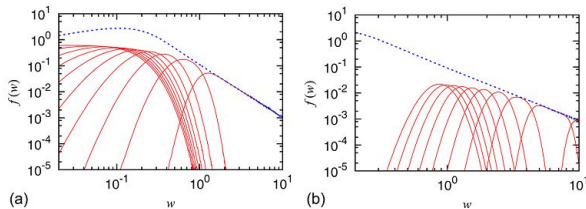
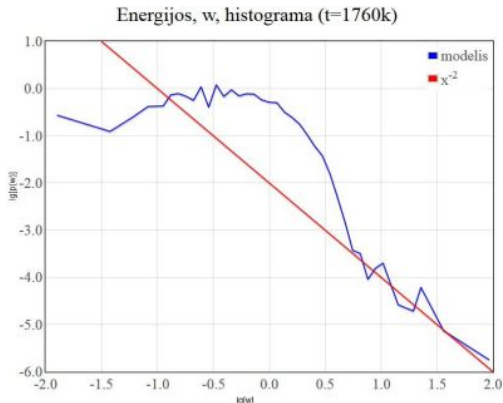


Fig. 3. (Color online) Wealth distribution $f(w)$ for uniformly distributed κ_i (or λ_i) in the interval $(0,1)$; $f(w)$ is decomposed into partial distributions $f_i(w)$, where each $f_i(w)$ is obtained by counting the statistics of those agents with parameter λ_i in a specific sub-interval (from Ref. 36). The left panel shows the decomposition of $f(w)$ into ten partial distributions in the λ -subintervals $(0, 0.1)$, $(0.1, 0.2)$, ..., $(0.9, 1)$. The right panel decomposes the final partial distribution in the λ -interval $(0.9, 1)$ into partial distributions obtained by counting the statistics of agents with λ -subintervals $(0.9, 0.91)$, $(0.91, 0.92)$, ..., $(0.99, 1)$. Note how the power law appears as a consequence of the superposition of the partial distributions.

Sklandaus perėjimo iš B-G į laipsninį skirstinį gavimas

Ne visi agentai turi būti skirtingi! Tarkim 99% agentų turi fiksuotą $\kappa_k = \kappa_0$, o likęs 1% gali turėti atsitiktines κ_k vertes.



Ačiū už dėmesį

Medžiaga padėta: <http://spektras.itpa.lt/~alius/seminaras131115/>

Bus tekstukas ar du ir [Rizikos fizikoje](#)