Mikroskopinis stochastinių modelių aiškinimas

Aleksejus Kononovičius, Vygintas Gontis

Vilniaus universitetas Teorinės fizikos ir astronomijos institutas
aleksejus.kononovicius@gmail.com

2011-10-07

Motyvacija

Stochastiniai modeliai

dažniausiai yra fenomenologiniai. Tačiau nemažiau įdomu yra ir tai kas vyksta modeliuojamoje sistemoje.

Šiame žodiniame pranešime:

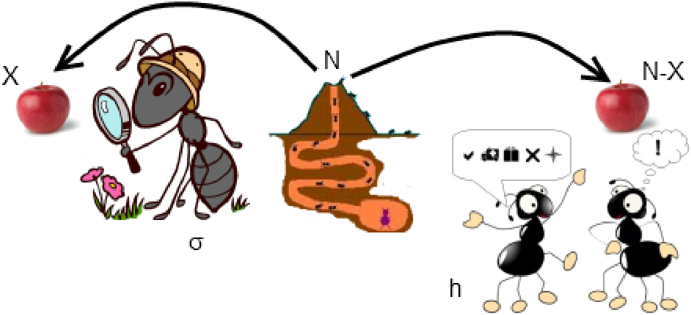
- Aptarsiu elementarų mikroskopinį modelį, kuriam įmanoma išvesti stochastines lygtis.
- Gautas lygtis palyginsiu su dviem labai bendrais modeliais.
- Išnagrinėsiu gaunamų laiko eilučių fraktališkumą.

Deneubourg eksperimentas

1 pav. Esant dviems vienodiems keliams link vieno maisto šaltinio skruzdės vistiek naudoja tik vieną jų!

Paimta iš Detrain & Deneubourg (2006).

Kirmano skruzdžių kolonijos modelis

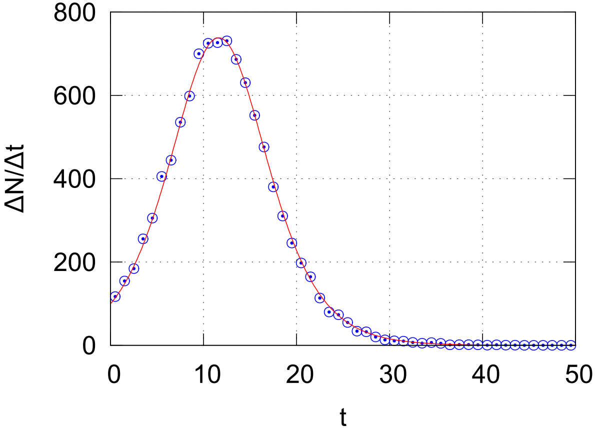


X dinamika

matematiškai aprašoma vieno žingsnio perėjimo tikimybėmis:

$$p(X \to X+1) = (N-X)\left[\sigma_1 + hX\right]\Delta t,$$
$$p(X \to X-1) = X\left[\sigma_2 + h(N-X)\right]\Delta t.$$

Taikymas pardavimų modeliavimui



2 pav. Vienakrypčio Kirmano modelio rezultatų palyginimas (mėlyni taškai) su Basso difuzijos modelio prognoze (raudona kreivė).

Perėjimas prie finansų rinkų

Akivaizdus skirstymas

būtų į bulius ir meškas. Tačiau šios grupės būtų identiškos!

Taigi skirstome

į grafinius prekiautojus,

$$D_c = -r_0 N_c(t) \xi(t),$$

ir fundamentalistus,

$$D_f = N_f(t) [\ln P_f - \ln P(t)].$$

Stochastinio absoliučios grąžos modelio gavimas

Stebimi dydžiai gali būti įvesti

padarius prielaidą, kad rinka yra nuolat stabilizuojama:

$$D_f + D_c = 0,$$
$$r(t) = \ln P(t) - \ln P(t-T) \approx r_0 \tfrac{N_c(t)}{N_f(t)} \zeta(t).$$

Pritaikę gyvybės-mirties procesų idėjas ir Ito kintamųjų keitimo formulę galime užrašyti:

$$\mathrm{d}y = \left[\varepsilon_1 + (2-\varepsilon_2) y^{1+\alpha}\right](1+y)\mathrm{d}t_s + \sqrt{2y^{1+\alpha}}(1+y)\mathrm{d}W_s.$$

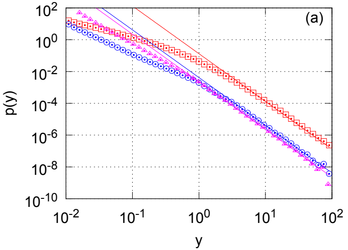
Kas didelių y riboje labai primena:

$$\mathrm{d}x = \sigma^2 \left(\eta - \frac{\lambda}{2}\right) x^{2\eta-1}\mathrm{d}t + \sigma x^{\eta}\mathrm{d}W.$$

Absoliučios grąžos modelis

Iš modelių palyginimo seka prognozės:

$$p(y) \sim y^{-\varepsilon_2-\alpha-1}, \quad S(f) \sim f^{-1-\frac{\varepsilon_2+\alpha-2}{1+\alpha}}.$$



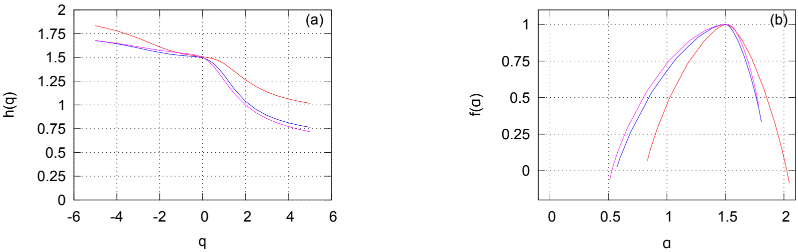
3 pav. $1/f$ triukšmo gavimas trimis skirtingais atvejais, $\alpha = 0$ (raudoni kvadratai), $\alpha = 1$ (mėlyni apskritimai) and $\alpha = 2$ (violetiniai trikampiai). Kiti modelio parametrai: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2 - \alpha$. Atitinkamų spalvų ištisinės kreivės aproksimuoja rezultatus: (a) $\lambda = 3$, (b) $\beta = 1$.

Fraktališkumas

Gamta dažnai nėra paprasta -

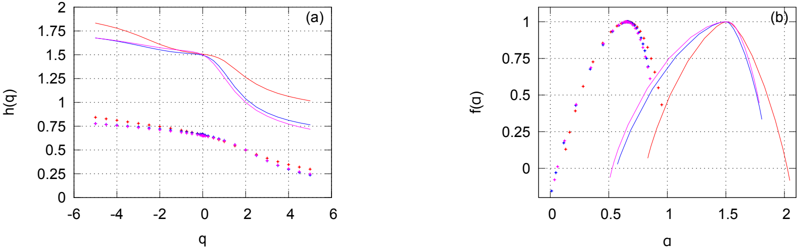
“debesys nėra sferos, kalnai nėra kūgiai, pakrančių linijos tikrai ne apskritimai, o ir medžio žievė nėra lygi, net ir žaibas nekeliauja tiesia linija...” (B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature)
Tokiais žodžiais buvo pradėta plačiausiai žinoma knyga apie gamtos savipanašumą. T.y. apie fraktalus.

(c) mokslofestivalis.eu



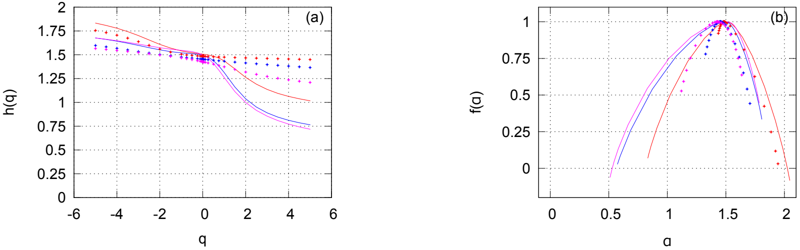
4 pav. Modelio fraktališkumo spektrai: (a) mąsteliavimo laipsnių (Hursto eksponenčių) spektras, (b) singuliarumo (Holderio eksponenčių) spektras.

Vidutiniai spektro pločiai: $\Delta h = 0.9$, $\Delta a = 1.24$.



5 pav. Modelio (ištisinės kreivės) ir tų pačių laiko eilučių, bet su panaikinta koreliacija, (taškai) fraktališkumo spektrai.

Vidutiniai spektro pločiai: $\Delta h = 0.54$, $\Delta a = 0.82$.

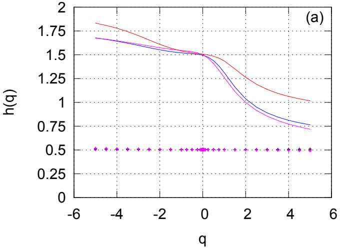


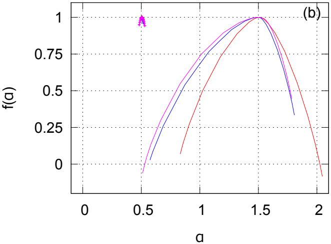
6 pav. Modelio (ištisinės kreivės) ir tų pačių laiko eilučių, bet su deformuotu verčių skirstiniu, (taškai) fraktališkumo spektrai.

Vidutiniai spektro pločiai: $\Delta h = 0.31$, $\Delta a = 0.47$.

Stebimos dinamikos prigimtis III

Pritaikius abi laiko eilutės deformacijas



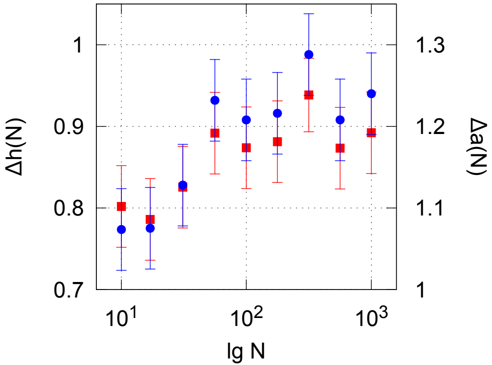


7 pav. Modelio (ištisinės kreivės) ir tų pačių laiko eilučių, bet su deformuotu verčių skirstiniu ir panaikinta koreliacija, (taškai) fraktališkumo spektrai.

Vidutiniai spektro pločiai: $\Delta h = 0.015$, $\Delta a = 0.023$.

Stebimos dinamikos prigimtis IV

Multifraktališkumo priklausomybė nuo agentų skaičiaus



8 pav. Modelio fraktališkumo spektro pločių, Δh (raudoni kvadratai) ir Δa (mėlyni apskritimai), priklausomybė nuo agentų skaičiaus agentų sistemoje, N. Raudoni kvadratai žymi Δh kitimą, o Δa kitimas pažymėtas mėlynais.

Apibendrinimas

- Kirmano modelį galima taikyti įvairių sričių makroskopiniams vyksmams ar modeliams aiškinti. Be aptartų taikymų (skruzdžių kolonija, rinkodara, finansų rinkos) dar galima būtų bandyti aiškinti įvairius žmonių socialinės dinamikos (kalbos mokėjimas, tikėjimas) aspektus.
- Pademonstruotas panašumas tarp pristatyto Kirmano modelio taikymo finansų rinkoms ir vieno labai bendro fenomenologinio modelio.
- Parodyta, kad apibendrinto Kirmano modelio laiko eilutės yra multifraktalinės.
- Tolesnės modelio vystymo perspektyvos siejamos su trijų rūšių agentų modeliu ir kitų finansų rinkose stebimų dydžių modeliais.

Ačiū už dėmesį!

http://mokslasplius.lt/rizikos-fizika