О МИНИМАЛЬНЫХ КОНТАКТНО-ВЕНТИЛЬНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКАХ ДЛЯ МОНОТОННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. МАРКОВ

(МОСКВА)

Как известно, всякая монотонная булева функция может быть реализована контактным двухполюсником, содержащим лишь замыкающиеся контакты. Тем более ее можно реализовать двухполюсником, построенным из замыкающихся контактов и вентилей. В дальнейшем такие двухполюсники мы будем называть *положительными двухполюсниками*.

Для всякой монотонной булевой функции возникает вопрос о построении реализующего ее положительного двухполюсника, содержащего наименьшее число контактов — *минимального положительного двухполюсника*. Эта задача, разумеется, может быть решена посредством перебора всех положительных двухполюсников с числом контактов, не превышающим некоторое данное достаточно большое число. Однако такой метод решения практически неосуществим даже при довольно малом числе аргументов рассматриваемых функций. В этой заметке мы указываем решение этой задачи для монотонных симметрических функций, осуществимое практически при достаточно больших числах аргументов. А именно мы в явном виде задаем весьма просто построенный положительный двухполюсник, реализующий данную монотонную симметрическую функцию и содержащий наименьшее число контактов.

Монотонная симметрическая функция степени k от n аргументов характеризуется тем, что ее значение равно единице тогда и только тогда, когда не менее чем k аргументов принимают значение 1. Мы будем обозначать эту функцию символом s_n^k. Имеем

$$s_n^k(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i_1<\ldots<i_k} \mathop{\&}_{j=1}^{k} x_{i_j}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Нетрудно видеть, что функция s_n^k реализуется положительным контактно-вентильным двухполюсником D_n^k, построенным следующим образом.

D_n^k имеет узлы A, B и $C_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n-k+1$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, причем A и B играют роль полюсов. Для всякого i от 1 до $n-k+1$ полюс A связывается с узлом $C_{i,1}$ контактом, помеченным x_i. Для всякого i от 1 до $n-k+1$ и всякого j от 1 до $k-2$ узел $C_{i,j}$ связывается с узлом $C_{i,j+1}$ контактом, помеченным x_{i+j}. Для всякого i от 1 до $n-k+1$ узел $C_{i,k-1}$ связывается с полюсом B контактом, помеченным x_{i+k-1}. Для всякого i от 1 до $n-k$ и всякого j от 1 до $k-1$ узел $C_{i,j}$ связывается с узлом $C_{i+1,j}$ вентилем, проводящим в направлении от $C_{i,j}$ к $C_{i+1,j}$*).

*) Здесь предполагается, что $k>1$. Двухполюсник D_n^1 состоит из узлов A и B, соединенных n контактами помеченными переменными x_i.

На рисунке изображен двухполюсник D_7^5.

Двухполюсник D_n^k имеет $k(n-k+1)$ контактов.

Мы докажем, что D_n^k и является искомым минимальным положительным двухполюсником, реализующим функцию s_n^k. Для этого нам надо лишь доказать следующее предложение.

Т е о р е м а. *Всякий положительный двухполюсник, реализующий функцию s_n^k, содержит не менее $k(n-k+1)$ контактов* $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Мы воспользуемся для этого понятиями «длины» и «ширины» двухполюсника, введенными Мором и Шенноном [1].

Будем рассматривать двухполюсник D с полюсами A и B. Будем называть *элементами двухполюсника* D узлы, контакты и вентили этого двухполюсника. Будем называть *цепью в* D всякую последовательность P_0, $P_1, \ldots, P_{2m}$ элементов D, удовлетворяющую следующим условиям:

Ц1. $P_0 = A$;

Ц2. $P_{2m} = B$;

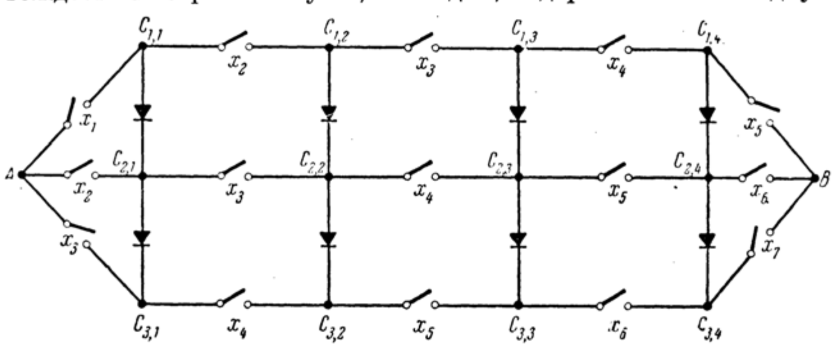
Ц3. P_{2i-1} есть контакт или вентиль, соединяющий узел P_{2i-2} с узлом P_{2i}, $0 < i \leqslant m$;

Ц4. Если P_{2i-1} есть вентиль, то он проводит в направлении от P_{2i-2} к P_{2i};

Ц5. $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$ (здесь $0 \leqslant i \leqslant 2m$, $0 \leqslant j \leqslant 2m$).

Число контактов в цепи мы будем называть *длиной этой цепи*.

Всякий двухполюсник, реализующий функцию, отличную от функции, тождественно равной нулю, очевидно, содержит хотя бы одну цепь.



Ввиду условия Ц5 может быть составлен список всех цепей данного двухполюсника. Будем называть *длиной двухполюсника* D наименьшую из длин цепей этого двухполюсника.

Л е м м а 1. *Всякий положительный двухполюсник, реализующий функцию s_n^k, имеет длину, не меньшую чем k.*

В самом деле, пусть положительный двухполюсник D реализует s_n^k. Пусть C — какая-нибудь цепь этого двухполюсника. Просмотрим контакты C, обращая внимание на переменные, которыми эти контакты помечены. Пусть при этом встретятся попарно различные переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$.

Придадим этим переменным значения 1, а остальным переменным — значения 0. При срабатывании реле, соответствующих переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, все контакты цепи C замкнутся, и потому двухполюсник будет проводить от A к B. Следовательно, при данном наборе значений аргументов функция s_n^k принимает значение 1. Поэтому $t \geqslant k$. С другой стороны, длина цепи C, очевидно, не менее t. Таким образом, длина любой цепи в двухполюснике D не меньше чем k. Иначе говоря, длина D не меньше чем k, что и требовалось доказать.

Множество контактов двухполюсника D мы будем называть *сечением этого двухполюсника*, если оно имеет общий контакт со всякой цепью двухполюсника D. Сечением является, например, совокупность всех контактов двухполюсника.

Шириной двухполюсника D мы будем называть наименьшее число контактов в сечении этого двухполюсника.

Лемма 2. *Всякий положительный двухполюсник, реализующий функцию* s_n^k, *имеет ширину, не меньшую чем* $n - k + 1$.

В самом деле, пусть двухполюсник D реализует s_n^k. Пусть S — какое-нибудь сечение этого двухполюсника. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ есть список попарно различных переменных, помечающих контакты сечения S. Придадим этим переменным значения 0, а остальным переменным — значения 1. При несрабатывании реле, соответствующих переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, все контакты сечения S будут разомкнуты, и потому в двухполюснике не будет проводящих цепей, т. е. он не будет проводить от A к B. Следовательно, при данном наборе значений аргументов функция s_n^k принимает значение 0. Число переменных, имеющих значение 1, при этом равно $n - t$. Следовательно, $n - t < k$, т. е. $t \geqslant n - k + 1$. С другой стороны, число контактов в S, очевидно, не меньше t.

Таким образом, число контактов в любом сечении двухполюсника D не меньше чем $n - k + 1$. Иначе говоря, ширина D не меньше чем $n - k + 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Число контактов в положительном двухполюснике не меньше произведения его длины на его ширину.*

Это утверждение для двухполюсников без вентилей было доказано в упомянутой работе Мора и Шеннона. Как мы сейчас увидим, наличие вентилей мало что меняет в его доказательстве.

Рассмотрим положительный двухполюсник D. Пусть l — его длина, w — его ширина. Покажем, что D содержит не меньше чем lw контактов.

Определим прежде всего некоторые множества контактов двухполюсника D, которые будем называть «зонами». Определение будет индуктивным. К первой зоне мы отнесем те контакты K, которые удовлетворяют следующему условию: имеется последовательность $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2r}$ элементов D такая, что $Q_0 = A$, что при $0 < i \leqslant r$ элемент Q_{2i-1} есть вентиль, соединяющий узел Q_{2i-2} с узлом Q_{2i}, проводящий в направлении от Q_{2i-2} к Q_{2i}, и что K соединяет узел Q_{2r} с некоторым другим узлом. Первую зону мы обозначим через Z_1.

Допустим теперь, что для целого числа j, большего единицы, определены зоны Z_i, где $i < j$, как некоторые множества контактов двухполюсника D. Отнесем к зоне Z_j те не принадлежащие ни одной из зон Z_i (где $i < j$) контакты K двухполюсника D, которые удовлетворяют следующему условию: имеется последовательность $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2r}$ элементов D такая, что Q_0 есть узел, соединяемый некоторым контактом, принадлежащим зоне Z_{j-1} с некоторым другим узлом; что при $0 < i \leqslant r$ элемент Q_{2i-1} есть вентиль, соединяющий узел Q_{2i-2} с узлом Q_{2i} и проводящий в направлении от Q_{2i-2} к Q_{2i}, и что K соединяет узел Q_{2r} с некоторым другим узлом.

Из этого определения следует, что зоны Z_j попарно не пересекаются. Покажем, что каждая из зон Z_j (где $0 < j \leqslant l$) есть сечение двухполюсника D.

Рассмотрим произвольную цепь C двухполюсника D. Покажем, что C имеет общий контакт с каждой из зон Z_j (где $0 < j \leqslant l$). C есть последовательность $P_0, \ldots, P_{2m}$ элементов двухполюсника D, удовлетворяющая условиям Ц1 — Ц5. Занумеруем контакты, встречающиеся в C при последовательном просмотре C от P_0 до P_{2m}. Пусть K_i означает i-й контакт, который при этом встретится. Индекс i принимает здесь значения от 1 до q включительно, где q — длина цепи C.

Индукцией по i устанавливаем, что каждый контакт K_i принадлежит одной из зон Z_j. Ввиду того, что зоны Z_j попарно не пересекаются, каждый контакт K_i принадлежит лишь одной из зон Z_j. Номер этой зоны однозначно определяется индексом i. Имеем, таким образом, арифметическую функцию f такую, что $K_i \in Z_{f(i)}$ при $0 < i \leqslant q$. Значения этой функции определены для значений аргумента, принадлежащих ряду $1, \ldots, q$, и являются положительными целыми числами. Ясно, что

$$f(i+1) \leqslant f(i)+1 \quad \text{при} \quad 0 < i < q \tag{1}$$

и что

$$f(1)=1. \tag{2}$$

Индукцией по j устанавливаем, что для каждого контакта K, принадлежащего зоне Z_j, имеется последовательность $Q_0, \ldots, Q_{2p}$ элементов двухполюсника D такая, что $Q_0 = A$; что Q_{2i-1} есть контакт или вентиль, соединяющий узел Q_{2i-2} с узлом Q_{2i}, причем если Q_{2i-1} — вентиль, то он проводит в направлении от Q_{2i-2} к Q_{2i}; что K соединяет узел Q_{2p} с некоторым другим узлом и что число контактов в последовательности $Q_0, \ldots, Q_{2p}$ меньше j. Такая последовательность имеется, в частности, при $j=f(q)$ для контакта $K=K_q \in Z_{f(q)}$.

С другой стороны, контакт K_q является последним контактом в последовательности $P_0, \ldots, P_{2m}$ и имеет в ней некоторый нечетный номер. Пусть $K_q = P_{2h-1}$, где $h \leqslant m$. Последовательность $P_{2h-1}, \ldots, P_{2m}$ содержит ровно один контакт, а именно P_{2h-1}.

Комбинируя последовательность $Q_0, \ldots, Q_{2p}$, построенную для контакта K_q зоны $Z_{f(q)}$, как указано только что, с последовательностью $P_{2h-1}, \ldots, P_{2m}$, получаем после, быть может, некоторых исключений «петель» (т. е. повторений узлов) цепь $R_0, \ldots, R_{2u}$ в двухполюснике D длины, меньшей чем $f(q)+1$. Следовательно,

$$f(q) \geqslant l. \tag{3}$$

Допустим теперь, что v есть такое целое положительное число, что

$$f(i) \neq v \text{ при } 0 < i \leqslant q.$$

Тогда $f(1) < v$ [по (2)] и индукцией по i мы устанавливаем, что $f(i) < v$ при $0 < i \leqslant q$ [по (1)]. В частности, имеем $f(q) < v$, и потому $v > l$ [по (3)].

Мы видим, таким образом, что всякое целое положительное число, не являющееся значением функции f, больше l. Следовательно, f принимает любое значение из ряда $1, \ldots, l$ по меньшей мере один раз, т. е. для всякого целого v такого, что $1 \leqslant v \leqslant l$, имеется i такое, что $f(i) = v$. Для этого i имеем $K_i \in Z_v$.

Таким образом, наша цепь C имеет общий контакт с каждой из зон Z_v, $1 \leqslant v \leqslant l$. Ввиду того, что C — произвольная цепь в D, каждая из этих зон является сечением в D. Отсюда следует, что каждая из зон Z_v, $1 \leqslant v \leqslant l$, содержит не менее w контактов. Так как зоны Z_v попарно не пересекаются, то в них содержится не менее lw контактов. Число контактов во всем двухполюснике D тем более не может быть меньшим числа lw, что и требовалось доказать.

Теорема непосредственно следует из лемм 1, 2, 3.

Ввиду того, что положительный двухполюсник D_n^k, реализующий функцию s_n^k, содержит ровно $k(n-k+1)$ контактов, он является искомым минимальным положительным двухполюсником для функции s_n^k.

Полагая $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, мы видим, что минимальный положительный двухполюсник для функции $s_n^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ содержит

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$

контактов. Таким образом, при четном n минимальный положительный двухполюсник для функции $s_n^{\frac{n}{2}}$ содержит $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$ контактов, а при нечетном n минимальный положительный двухполюсник для функции $s_n^{\frac{n+1}{2}}$ содержит $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ контактов.

Заметим в связи с этим, что при нечетном n функция $s_n^{\frac{n+1}{2}}$ может быть описана как функция, значение которой равно единице, когда простое большинство аргументов равно единице. Реализующий ее положительный двухполюсник может быть истолкован как некая «машина голосования», проводящая ток, когда простое большинство управляющих реле срабатывает. Мы видим, что минимальное число контактов в такой машине равно $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, где n — число «участников» голосования. В частности, при 39 участниках минимальное число контактов равно 400.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Moore E. F. and Shannon C. E., Reliable circuits using less reliable relays, J. Franklin Inst. 262:3, 1956, 281—297. (Русский перевод: Кибернетический сборник 1, М., ИЛ, 1960, стр. 109—148.)

Поступило в редакцию 18 X 1961