ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 5 (228)

С. Е. Кузнецов

УДК 519.714

СХЕМЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БЕЗ НУЛЕВЫХ ЦЕПЕЙ В БАЗИСЕ $\{\&, \vee, -\}$

Неудачи многочисленных попыток построения булевых функций, сложнореализуемых контактными схемами, формулами и схемами из функциональных элементов, привели к появлению ряда работ [1] — [5], в которых получены экспоненциальные нижние оценки для схем с дополнительными ограничениями на их строение. Данная работа примыкает к этому кругу исследований.

В [6] были определены контактные схемы без нулевых цепей. В данной работе близкое в идейном смысле ограничение накладывается на схемы из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, -\}$. Предлагаются два метода получения нижних оценок вида 2^{cn} сложности реализации конкретных булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ схемами из функциональных элементов без нулевых цепей. Показано также, что сложность реализации отдельных булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ схемами из функциональных элементов без нулевых цепей в 2^{cn} раз выше, чем сложность реализации $f(x_1, \ldots, x_n)$ произвольными схемами из функциональных элементов, но в то же время функции Шеннона для произвольных схем из функциональных элементов и схем из функциональных элементов без нулевых цепей асимптотически равны.

§ 1. Определения и формулировка результатов

Все необходимые понятия, относящиеся к схемам из функциональных элементов, дизъюнктивным нормальным формам (д. н. ф.) и др. можно найти в [7], [8]. В дальнейшем вместо „схема из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, -\}$" будем говорить просто „схема" и рассматривать будем лишь приведенные схемы.

Пусть E — элемент схемы S. Если элемент E — „дизъюнкция" или „конъюнкция", то элементы (или входы схемы S), выходы которых присоединены к входам элемента E, обозначим через $l(E)$ и $r(E)$. Если элемент E — „отрицание", то через $h(E)$ обозначим элемент, выход которого присоединен к входу элемента E.

Каждому элементу E схемы S, включая и входы схемы, припишем д. н. ф. $D_s(E)$. Д. н. ф. $D_s(E)$ определим индуктивно.

а) Базис индукции. Каждому входу x схемы S припишем д. н. ф. $D_s(x) = x$.

б) Индуктивный переход. Возможны три случая:

1) если E — элемент „дизъюнкция", то $D_s(E) = D_s(l(E)) \vee D_s(r(E))$;

2) если E — элемент „конъюнкция", то $D_s(E)$ есть д. н. ф., получающаяся из формулы $(D_s(l(E))) \& (D_s(r(E)))$ раскрытием скобок;

3) если E — „отрицание", то $D_s(E)$ есть д. н. ф., получающаяся из формулы $\overline{(D_s(h(E)))}$ раскрытием скобок.

При раскрытии скобок конъюнкции $x_i^\sigma \& x_i^\sigma$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\sigma \in \{0, 1\}$, заменяются на x_i^σ, а тождественно нулевые конъюнкции не удаляются. Поэтому каждая конъюнкция, входящая в д. н. ф. $D_s(E)$, либо элементарная, либо тождественно нулевая.

Д. н. ф., приписанную выходному элементу схемы S, обозначим через D_s. Очевидно, что схема S и д. н. ф. D_s реализуют одну и ту же функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение. Схемами из функциональных элементов без нулевых цепей будем называть такие схемы S, у которых д. н. ф. D_s не содержит тождественно нулевых конъюнкций.

Через $L^*_\Phi(f)$ (соответственно, $L_\Phi(f)$) обозначим наименьшее число элементов „дизъюнкция“ и „конъюнкция“, достаточное для реализации булевой функции f схемой без нулевых цепей (соответственно, произвольной схемой).

Положим

$$\mu_\Phi(f)=L^*_\Phi(f)/L_\Phi(f),\ \mu_\Phi(n)=\max_{f\in P_2^n}\mu_\Phi(f),$$

$$L^*_\Phi(n)=\max_{f\in P_2^n}L^*_\Phi(f),\ L_\Phi(n)=\max_{f\in P_2^n}L(f),$$

где через P_2^n обозначено множество всех булевых функций, зависящих от n переменных и не равных тождественно нулю.

Через H_n обозначим множество булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что если $f(\tilde{\sigma})=f(\tilde{\gamma})=1$, то $\rho(\tilde{\sigma}, \tilde{\gamma})\geqslant 2$, где ρ — расстояние Хэмминга.

Нетрудно видеть, что $\mu_\Phi(n)\leqslant 2^n$. Задача состоит в получении высоких нижних оценок для $\mu_\Phi(n)$.

Теорема 1. $\mu_\Phi(n)>2^{c_1 n}$, *где* $c_1>0$ — *некоторая константа.*

Доказательство теоремы 1 основано на следующем методе получения нижних оценок.

Теорема 2. *Пусть* $f(x_1, \dots, x_n)\in H_n$ *и для любой пары наборов* $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\in N_f$ $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\geqslant d$, *где* $d\geqslant 2$. *Тогда* $L^*_\Phi(f(x_1, \dots, x_n))\geqslant |N_f|^{d/(n+d)}$.

Через N_f, как обычно, обозначено множество наборов, на которых функция f принимает значение 1.

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в § 3, там же приводятся примеры применения теоремы 2.

Упомянутый метод получения нижних оценок (теорема 2) позволяет получать для конкретных булевых функций оценки, заведомо меньшие, напр., $2^{n/10}$. Автором предложен другой метод, позволяющий получать более высокие оценки. Он описывается в § 4. Там же определяется последовательность булевых функций $g_n(x_1, \dots, x_n)\in H_n$ и доказывается следующая

Теорема 3. $L^*_\Phi(g_n(x_1, \dots, x_n))\geqslant 2^{n/3}$.

Функция Шеннона для контактных схем без нулевых цепей существенно выше, чем функция Шеннона для произвольных контактных схем. Аналогичный факт имеет место и для Π-схем без нулевых цепей [5]. Для схем из функциональных элементов этот факт не имеет места.

Теорема 4. $L^*_\Phi(n)\sim L_\Phi(n)\sim 2^n/n$.

Действительно, мощностным методом Шеннона легко показать, что $L^*_\Phi(n)\geqslant L_\Phi(n)\gtrsim 2^n/n$ [7]. А оценка $L^*_\Phi(n)\lesssim 2^n/n$ получается из метода синтеза, который практически дословно повторяет метод синтеза О. Б. Лупанова для произвольных схем [7]. Поэтому здесь мы его не приводим.

В § 2 доказываются вспомогательные результаты.

§ 2. Вспомогательные результаты

Упорядоченную последовательность $E_1, E_2, \dots, E_l$ элементов схемы назовем цепью, соединяющей вершину α с вершиной β, если один из входов элемента E_{i+1} присоединен к выходу элемента E_i $(1\leqslant i\leqslant l-1)$, вход элемента E_1 присоединен к вершине α и выход элемента E_l есть вершина β. Число l элементов в цепи назовем длиной цепи.

Пусть E — элемент схемы S. Среди всех цепей схемы S, соединяющих входные полюса схемы S с выходом элемента E, выберем цепь наибольшей длины. Длину такой цепи обозначим через $b_s(E)$. Положим $b_s^-=\max b_s(E)$, где максимум берется по всем элементам отрицания E схемы S. Если в схеме S нет элементов отрицания, то $b_s^-=0$. Через $c_s(E)$ обозначим длину цепи, имеющей наибольшую длину среди всех цепей, соединяющих выход элемента E с выходом схемы S.

Пусть $\{E_1, \ldots, E_p\}$ — множество различных элементов отрицания схемы S таких, что $b_S^- = b_s(E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Через $k(S)$ обозначим мощность этого множества (т. е. $k(S) = p$).

Лемма 1. *Среди минимальных схем без нулевых цепей, реализующих функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$, есть схема S, у которой $b_S^- \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть S — минимальная схема без нулевых цепей, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$ и $b_S^- > 1$. Покажем, что схему S можно преобразовать в минимальную схему без нулевых цепей S_1, реализующую ту же, что и S, функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и при этом либо $b_S^- > b_{S_1}^-$, либо $b_S^- = b_{S_1}^-$, но $k(S) > k(S_1)$.

Выберем в схеме S элемент отрицания E такой, что $b_s(E) = b_S^-$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Выход элемента $h(E)$ присоединяется только к входу элемента E. Если $h(E)$ — элемент отрицания, то элементы $h(E)$ и E можно удалить, отождествив вход элемента $h(E)$ с выходом элемента $h(E)$. Если $h(E)$ — элемент „дизъюнкция" или „конъюнкция", то схему S в S_1 преобразуем следующим образом. Добавим два новых элемента отрицания E_1 и E_2, выходы которых присоединим к входам элемента $h(E)$, а входы—к выходам элементов $l(h(E))$ и $r(h(E))$, соответственно. Элемент $h(E)$ заменим на двойственный. Элемент E удалим, отождествив его вход с выходом. Легко видеть, что схема S_1 будет удовлетворять требуемым условиям.

Случай 2. Выход элемента $h(E)$ присоединяется не только к выходу элемента E.

Отметим два свойства д. н. ф. $D_s(h(E))$.

Свойство 1. Д. н. ф. $D_s(h(E))$ не содержит тождественно нулевых конъюнкций.

Действительно, если в д. н. ф. $D_s(h(E))$ есть тождественно нулевая конъюнкция, то в $D_s(E)$ есть две конъюнкции $x_i \& R_1$ и $\bar{x}_i \& R_1$. Но тогда и в д. н. ф. D_s есть две конъюнкции $x_i \& R_2$ и $\bar{x}_i \& R_2$ (поскольку каждая цепь, соединяющая выход элемента E с выходом схемы, не содержит элемента отрицания), а это противоречит условию $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$.

Свойство 2. Д. н. ф. $D_s(h(E))$ содержит хотя бы одну конъюнкцию ранга 1.

Предположим, что в д. н. ф. $D_s(h(E))$ ранг каждой конъюнкции не меньше двух. Тогда из свойства 1 следует, что для любой переменной x_j^σ из $D_s(h(E))$ в д. н. ф. $D_s(E)$ есть две конъюнкции, одна из которых содержит $\bar{x}_j^\sigma$, а другая вообще не содержит символа переменной x_j. Поэтому каждая цепь, соединяющая выход элемента E с выходом схемы, содержит элемент „конъюнкция" E_1 такой, что один из его входов присоединен к выходу элемента, которому приписана д. н. ф. такая, что каждая ее конъюнкция содержит переменную $\bar{x}_j^\sigma$. Следовательно, элемент E и элементы $E_1' \ldots, E_k'$, для которых $l(E_i')$ или $r(E_i')$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ совпадает с E, можно удалить, отождествляя для $1 \leqslant i \leqslant k$ выход E_i' с выходом $r(E_i')$ (считаем, что $l(E_i') = E$), а это противоречит минимальности схемы S.

Пусть E_1 — отличный от E элемент и один из его входов присоединен к выходу элемента $h(E)$. Если E_1—элемент „отрицание", то можно отождествить элемент E_1 с E. Пусть E_1 — элемент „дизъюнкция" или „конъюнкция" и $D_s(h(E)) = x_i^\sigma \vee D'$, где D' — некоторая д. н. ф. Поскольку каждая цепь, соединяющая выход элемента E_1 с выходом схемы, не содержит элемент „отрицание", то вход элемента E_1, присоединяющийся к выходу элемента $h(E)$, можно присоединить либо к входу схемы x_i, если $\sigma = 1$, либо к выходу элемента „отрицание", вход которого присоединен к входу схемы x_i, если $\sigma = 0$ и реализуемая функция при этом не изменится.

Удаляя описанным способом ветвления на выходе элемента $h(E)$, мы придем к случаю 1.

Мы показали, что схему S можно преобразовать в схему S_1, удовлетворяющую заданным условиям. Далее аналогично преобразуем схему S_1 в S_2 и т. д. В конце мы получим схему S_k, удовлетворяющую условиям леммы. Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие схемы S без нулевых цепей, у которых $b_S^- \leqslant 1$.

Лемма 2. *Пусть S — минимальная схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$. В схеме S нет элемента „дизъюнкция“ E такого, что д. н. ф. $D_s(l(E))$ и $D_s(r(E))$ — элементарные конъюнкции и $D_s(l(E))\,\&$ $\&\, D_s(r(E)) \not\equiv 0$.*

Доказательство. Предположим, что такой элемент E в схеме S есть. Без потери общности можем считать, что $D_s(l(E)) = x_1 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_p$, а $D_s(r(E)) = x_1 \ldots x_k,\ x_{p+1} \ldots x_{p+m}$. Поскольку в д. н. ф. D_s входят лишь конъюнкции ранга n, то очевидно можно отождествить выход элемента $l(E)$ (или $r(E)$ — это безразлично) с выходом элемента E, удалив при этом элемент E, и функционирование схемы при этом не изменится; т. е. пришли к противоречию с минимальностью схемы S. Лемма доказана.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$ и для любой пары наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in N_f$ $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geqslant d$, где $d \geqslant 2$. Через S обозначим минимальную схему без нулевых цепей, реализующую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Напомним, что $b_S^- \leqslant 1$.

Каждому элементу схемы S припишем формулу $\Phi_s(E)$; $\Phi_s(E)$ определим индуктивно.

а) Базис индукции. Каждому входу x припишем формулу $\Phi_s(x) = x$. Каждому элементу отрицания E — $\Phi_s(E) = D_s(E)$.

б) Индуктивный переход. Если E — элемент „дизъюнкция“, то $\Phi_s(E) = \Phi_s(l(E)) \vee \Phi_s(r(E))$. Если E — элемент „конъюнкция“ то $\Phi_s(E) = \Phi_s(l(E))\,\&\,\Phi_s(r(E))$.

Через $P_s(E)$ обозначим Π-схему, соответствующую формуле $\Phi(E)$ (имеется в виду взаимно однозначное соответствие между формулами и Π-схемами, описанное в § 11 [7]). Через P_s обозначим Π-схему, соответствующую формуле, приписанной выходному элементу схемы S. Очевидно, Π-схема P_s и схема S реализуют одну и ту же функцию f.

Цепью Π-схемы будем называть последовательность a_1, (a_1, a_2), $a_2, \ldots, a_{k-1}, (a_{k-1}, a_k)$, a_k (a_i — вершины, (a_{i-1}, a_i) — контакт с вершинами $_1$ и a_i, $k \geqslant 1$), в которой a_i и a_j — различные вершины, если $i \neq j$. Путем Π-схемы будем называть цепь, соединяющую полюса Π-схемы.

Легко видеть, что каждый путь Π-схемы P_s не является тождественно нулевым, т. е. P_s есть Π-схема без нулевых цепей [6]. Из леммы 2 следует, что каждый цикл Π-схемы P_s содержит не менее $2d$ контактов.

Преобразуем Π-схему P_s с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм упрощения (АУ) Π-схемы P без нулевых цепей.

Шаг 1. В схеме P выберем контакт (a, b) переменной x_i^σ такой, что любой путь, содержащий этот контакт, содержит не менее двух контактов переменной x_i^σ. Если такого контакта нет, то закончим преобразование.

Шаг 2. Выбранный контакт (a, b) удалим склеиванием вершин a и b. Перейдем на шаг 1, на котором рассматривается уже преобразованная Π-схема P.

Через P_1 обозначим Π-схему, которая получится в результате применения АУ к схеме P_s. Очевидно, что Π-схемы P_1 и P_s реализуют одну и ту же функцию f.

Утверждение 1. *Пусть P есть Π-схема без нулевых цепей, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$. Если путь A Π-схемы P содержит контакты (a_1, b_1) и (a_2, b_2) переменной x_i^σ, то либо все пути, содержащие контакт (a_1, b_1), либо все пути, содержащие контакт (a_2, b_2), содержат не менее двух контактов переменной x_i^σ.*

Доказательство этого утверждения следует из доказательства леммы 3 из [9].

Из утверждения 1 следует, что каждый путь Π-схемы P_1 содержит ровно по одному контакту от каждой переменной, т. е. n контактов.

Цепь A Π-схемы P_s назовем цепью элемента E, если выполняются два условия: 1) каждый путь Π-схемы P_s либо содержит все контакты цепи A, либо не содержит ни одного контакта цепи A и для любой цепи A', содержащей A, найдется путь Π-схемы P_s, который содержит контакты цепи A', но не все; 2) E — такой элемент схемы S, что Π-схема $P_s(E)$ содержит цепь A и ни $P_s(l(E))$, ни $P_s(r(E))$ не содержат цепи A.

При преобразовании Π-схемы P_s в P_1 каждая подсхема $P_s(E)$ преобразуется в подсхему Π-схемы P_1, которую будем обозначать через $P_1(E)$, а каждая цепь элемента E переходит в цепь, которую также будем называть цепью элемента E. Отметим, что две различные подсхемы $P_1(E)$, равно как и две различные цепи элемента E Π-схемы P_1, могут быть не изоморфными.

Занумеруем элементы схемы S так, чтобы номер элемента E был больше, чем номера элементов $r(E)$ и $l(E)$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — цепи пути T Π-схемы P_1, каждая из которых является цепью элемента $E_1, E_2, \ldots, E_k$, соответственно, образующие разбиение (контактов) пути T. Обозначим множество этих цепей через A_T. Через $q(A_T)$ обозначим общее число контактов, содержащихся в цепях множества A_T.

Каждому пути T Π-схемы P_1 поставим в соответствие множество $M(T)$ элементов схемы S. Множество $M(T)$ строится следующим алгоритмом.

Алгоритм кодирования (АК) пути T элементами схемы S.

Шаг 1. Из множества A_T исключим все цепи, содержащие d или более контактов. Если цепь A_i элемента E_i исключена из A_T, то элемент E_i занесем в $M(T)$.

Шаг 2. Если $q(A_T) \leqslant d$, то перейдем на шаг 5.

Шаг 3. Выберем из элементов схемы S элемент E с наименьшим номером такой, что одна из подсхем $P_1(E)$ содержит цепи $A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}$ из A_T, и общее число контактов в этих цепях не меньше d. Цепи $A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}$ исключим из A_T и элемент E занесем в $M(T)$.

Шаг 4. Если $q(A_T) > d$, то перейдем на шаг 3.

Шаг 5. Если $q(A_T) \geqslant 1$, то в $M(T)$ занесем элемент E схемы S с наименьшим номером такой, что одна из подсхем $P_1(E)$ Π-схемы P_s содержит оставшуюся часть множества цепей A_T.

Замечание. На шаге 1 могло оказаться, что в A_T содержалось две или более различных цепей элемента E, каждая из которых содержала не менее d контактов. В этом случае элемент E заносится в $M(T)$ только один раз. Из леммы 2 нетрудно вывести, что элемент E, который был занесен в $M(T)$ на шаге 3 или 5, более в множество $M(T)$ занесен быть не мог. Поэтому $M(T)$ состоит из различных элементов.

Очевидно, что множество $M(T)$ состоит только из элементов „конъюнкция“ и $|M(T)| \leqslant]n/d[$ ($]a[$ — ближайшее целое, не меньшее a).

Через $K(T, E)$ обозначим множество контактов пути T, соответствующих элементу $E \in M(T)$, т. е. множество контактов той цепи или цепей пути T, которые исключались из множества A_T при занесении элемента E в $M(T)$ на шаге 1, 3 или 5 АК.

Утверждение 2. *Пусть T_1 и T_2 — различные пути П-схемы P_1, у которых множества $M(T_1)$ и $M(T_2)$ совпадают. Тогда если контакт переменной x_i^σ входит в $K(T_1, E)$, где $E \in M(T_1)$ (соответственно, $K(T_2, E)$), то путь T_2 (соответственно, T_1) также содержит контакт переменной x_i^σ.*

Доказательство. Пусть $E_1, \ldots, E_k$ — последовательность элементов множества $M(T_1)$ (или $M(T_2)$), расположенных в порядке возрастания их номеров в схеме S. Доказательство проведем методом математической индукции.

Базис индукции. Из леммы 2 нетрудно вывести, что в любом пути $П$-схемы P_1 найдется цепь элемента E, содержащая не менее d контактов, т. е. на шаге 1 AK в множество $M(T)$ занесется хотя бы один элемент. С другой стороны, если элемент E занесется в $M(T)$ на шаге 3 или 5 AK, то в $M(T)$ есть элемент с меньшим номером. Поэтому элемент E_1 занесется и в $M(T_1)$ и в $M(T_2)$ на шаге 1 AK. Поэтому, если $\langle x_i^\sigma \rangle \in K(T_1, E_1)$[1] (соответственно $K(T_2, E_1)$), то $\langle x_i^\sigma \rangle$ содержится в цепи элемента E_1 $П$-схемы P_s, а следовательно, и в пути T_2 (соответственно, T_1).

Шаг индукции. Допустим, утверждение справедливо для контактов множеств $K(T_1, E_j)$ и $K(T_2, E_j)$, где $1 \leqslant j \leqslant i-1 < k$. Докажем, что утверждение справедливо и для контактов из $K(T_1, E_i)$.

Если элемент E_i занесется в $M(T_1)$ на шаге 1, то утверждение для контактов из $K(T_1, E_i)$ доказывается так же, как для контактов из $K(T_1, E_1)$. Пусть элемент E_i занесется в $M(T_1)$ на шаге 3 или 5. Через T_1' и T_2' обозначим такие цепи, соединяющие полюса подсхемы $P_s(l(E_i))$, через которые проходят пути $П$-схемы P_s, которые при работе АУ перешли в пути T_1 и T_2, соответственно. Из предположения индукции и определения АУ следует, что если цепь T_1' содержит $\langle x_i^\sigma \rangle$, а цепь T_2' содержит $\langle x_i^{\bar\sigma} \rangle$, то $\langle x_i^\sigma \rangle \in K(T_1, E_i)$, причем контакт $\langle x_i^\sigma \rangle$ содержится в подсхеме $P_1(l(E_i))$, через которую проходит путь T_1. Однако в подсхеме $P_1(l(E))$ содержится не более, чем $(d-1)$ контакт из $K(T_1, E_i)$, поэтому если $\langle x_i^\sigma \rangle \in K(T_1, E_i)$ и $\langle x_i^\sigma \rangle$ содержится в подсхеме $P_1(l(E))$, то путь T_2 не может содержать $\langle x_i^{\bar\sigma} \rangle$. (Действительно, пусть T—путь $П$-схемы P_s, который при работе АУ переходит в T_2. Если заменить в пути T цепь T_2' на T_1', то получим путь, который может отличаться от T лишь по $(d-1)$ контакту, но тогда эти пути замкнуты на одном и том же наборе.) Аналогично доказывается это утверждение и для контактов из $K(T_1, E_i)$, которые содержатся в подсхеме $P_1(r(E_i))$, и для контактов из $K(T_2, E_i)$. Утверждение доказано.

Следствие. *Пусть T_1 и T_2 — пути П-схемы P_1. Если $M(T_1)$ и $M(T_2)$ совпадают, то пути T_1 и T_2 замкнуты на одинаковых наборах.*

Пусть R — число элементов „конъюнкция" схемы S. Число различных подмножеств, состоящих не менее, чем из одного элемента, и не более, чем из $]n/d[$ элементов, множества из R элементов не превосходит $R^{]n/d[}$. Из следствия следует, что $R^{]h/d[} \geqslant |N_f|$, т. е. $L_\Phi^*(f) \geqslant R \geqslant |N_f|^{d/(n+d)}$. Теорема доказана.

Приведем два конкретных примера применения доказанной теоремы.

Пример 1. Пусть $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — характеристическая функция линейного (n, k)-кода в B^n ($k \geqslant c_3 n$ — размерность линейного кода, где $c_3 > 0$ — константа) с кодовым расстоянием $d \geqslant c_4 n$, где $c_4 > 0$ — константа. Существование такого кода показано в [10]. Тогда $L_\Phi^*(f_n) \geqslant 2^{c_5 n}$, где $c_5 > 0$ — константа.

Пример 2. Пусть $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — характеристическая функция кода Рида—Маллера длины $n = 2^m$ и порядка $r = m/2$. Тогда $d = \sqrt{n}$ и $|N_{f_n}| = 2^{n/2}$.

Поэтому $L_\Phi^*(f_n) \geqslant 2^{(1/2)\sqrt{n}(1-\varepsilon_n)}$, где $\varepsilon_n = 1/(\sqrt{n}+1)$.

---

[1] Через $\langle x_i^\sigma \rangle$ обозначен контакт переменной x_i^σ.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, рассмотренная в примере 1. В [9] приводится оценка $L_\Phi(f_n) < n^3$. Поэтому $\mu_\Phi(n) \geqslant L^*_\Phi(f_n)/L_\Phi(f_n) \geqslant 2^{c_1 n}$, где $c_1 > 0$ — константа. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Через Φ_n обозначим множество булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$ таких, что $|N_f| = 4$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = (K_1 \vee K_2) \& (K_3 \vee K_4) \& K_5$, где K_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ — элементарная конъюнкция.

Через H^1_n обозначим множество булевых функций $g(x_1, \ldots, x_n) \in H_n$ таких, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi_n$ $N_f \not\subseteq N_g$.

Утверждение 3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in H^1_n$ и S — минимальная схема без нулевых цепей, реализующая функцию f $(b^-_S \leqslant 1)$, и пусть E — элемент схемы S такой, что в схеме S есть цепь, соединяющая вход схемы с входом элемента E, которая содержит элемент „дизъюнкция". Тогда выход элемента E присоединяется к входу только одного элемента.*

Доказательство. Пусть E — элемент схемы S такой, что есть цепь, соединяющая вход схемы S и вход элемента E и содержащая элемент „дизъюнкция". Доказательство утверждения проведем индукцией по $c_s(E)$.

Базис индукции. При $c_s(E) = 1$ утверждение очевидно.

Шаг индукции. Пусть $c_s(E) = k$ $(k \geqslant 2)$ и для элементов цепей, соединяющих выход элемента E с выходом схемы, утверждение справедливо.

Предположим, что выход элемента E присоединен к входу элементов E_1 и E_2. Из леммы 2 следует, что в д. н. ф. $D_s(E)$ найдутся конъюнкции $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такие, что $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \equiv 0$. Пусть $\mathfrak{A}_3$ — элементарная конъюнкция наибольшего ранга такая, что конъюнкции $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{A}_2 \& \mathfrak{A}_3$ ненулевые и содержат символы всех переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда если E_3 — элемент „конъюнкция", входящий в цепь, соединяющую выход элемента E с выходом схемы, то один из его входов присоединен к выходу элемента E_4 такого, что $D_s(E_4) = \mathfrak{A}_4$, где $\mathfrak{A}_4$ — такая конъюнкция, что $\mathfrak{A}_4 \& \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_3$. Поэтому можно удалить элементы цепи $E'_1, \ldots, E'_k$ (где E'_1 совпадает с E_1 или E_2, E'_i — элемент „конъюнкция" $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, а E'_k — элемент „дизъюнкция"), отождествляя выход E'_k с его входом, который присоединялся не к выходу E'_{k-1} (или E, если $k=1$). Функционирование схемы при этом не изменится. Получили противоречие с минимальностью схемы. Утверждение доказано.

Лемма 3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in H^1_n$ и $n \geqslant 2$. Тогда $L^*_\Phi(f) \geqslant |N_f|$.*

Доказательство. Пусть S — минимальная схема без нулевых цепей, реализующая $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $b^-_S \leqslant 1$. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — множество входов элементов „дизъюнкция" схемы S таких, что любая цепь, соединяющая вход схемы с вершиной α_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, не содержит элемента „дизъюнкция". Из утверждения 3 следует, что между конъюнкциями д. н. ф. D_s и множеством $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Из определения функции f и леммы 2 следует, что для каждого элемента „конъюнкция" хотя бы один его вход α таков, что все цепи, соединяющие вход схемы с α, не содержат элемента „дизъюнкция". Из вышесказанного следует, что удалив все элементы „конъюнкция" из схемы S (при этом отождествляя выход с тем входом, который соединяется с входом схемы цепью, содержащей элемент „дизъюнкция", либо, если такого входа нет, — с любым), мы получим схему без ветвлений выходов элементов, у которой k входов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Сложность такой схемы — $(k-1)$. Поэтому $L^*_\Phi(f) \geqslant k - 1 = |N_f| - 1$. Отметим, что на самом деле мы оценили число элементов „дизъюнкция". Учитывая, что при $n \geqslant 2$ есть хотя бы один элемент „конъюнкция", окончательно получим $L^*_\Phi(f) \geqslant |N_f|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Определим последовательность булевых функций $g_n(x_1, \ldots, x_n) \in H^1_n$ таких, что $|N_{g_n}| \geqslant 2^{n/3}$.

Упорядочим лексикографически четные двоичные наборы длины n ($n \geqslant 2$). Перечисляя наборы в заданном порядке, будем каждый из них заносить или нет в множество M по следующим правилам.

1. В начальный момент множество M пусто.
2. Первые три набора занесем в множество M.
3. Если очередной набор $\tilde{\alpha}$ таков, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in \Phi_n$ $N_f \not\subseteq M \cup \{\tilde{\alpha}\}$, то набор $\tilde{\alpha}$ занесем в M, в противном случае множество M оставим без изменения.

Закончив перечисление наборов, выберем в качестве $g_n(x_1, \dots, x_n)$ такую функцию, что $N_{g_n} = M$. Очевидно, что $g_n(x_1, \dots, x_n) \in H_n^1$.

Оценим мощность множества M. Пусть в какой-то момент в процессе перечисления наборов множество M содержало k наборов. Если $k + C_k^3 < 2^{n-1}$, то в множество M будет добавлен еще хотя бы один набор; $k = 2^{n/3}$ удовлетворяет указанному неравенству, поэтому $|M| = |N_{g_n}| > 2^{n/3}$. Из леммы 3 окончательно получим $L_\Phi^*(g_n(x_1, \dots, x_n)) > 2^{n/3}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schnorr C. P. A lower bound on the number of additions in monotone computations.— Theor. Comput. Sci., 1976, v. 2, p. 305—315.
2. Ткачев Г. А. О сложности реализации одной последовательности булевых функций формулами и схемами из функциональных элементов глубины 3 в базисе $\{\&, \vee\}$. — IV Всесоюзн. конф. по пробл. теоретической кибернетики. Тезисы докл. Новосибирск, 1977, с. 183—185.
3. Пулатов А. К. Влияние нулевых цепей на сложность Π-схем.— IV Всесоюзн. конф. по пробл. теоретической кибернетики. Тезисы докл. Новосибирск, 1977, с. 175—176.
4. Окольнишникова Е. А. Схемы из функциональных элементов с минимально достаточными конъюнкциями.— В сб.: Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач. Новосибирск, 1979, вып. 33, с. 53—67.
5. Кузнецов С. Е. Нижние оценки сложности для схем без нулевых цепей.— V Всесоюзн. конф. по пробл. теоретической кибернетики. Тезисы докл. Новосибирск, 1980, с. 162—164.
6. Пулатов А. К. О влиянии нулевых цепей на сложность реализации булевых функций контактными схемами.— В сб.: Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Новосибирск, 1977, вып. 30, с. 30—37.
7. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем.— В сб.: Пробл. кибернетики. М., 1963, вып. 10, с. 63—97.
8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М., 1979.—272 с.
9. Пулатов А. К. Нижние оценки сложности реализации характеристических функций групповых кодов Π-схемами.— В сб.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикл. матем. Горький, 1979, с. 81—95.
10. Варшамов Р. Р. Оценка числа сигналов в кодах с коррекцией ошибок. — ДАН СССР, 1957, т. 117, № 5, с. 739—741.

г. Казань

Поступила
18 XII 1980