КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Е. В. ШЕРИШЕВА
(МОСКВА)

В заметке рассматриваются универсальные контактные схемы. В § 1 дается определение универсальной контактной схемы от n переменных и оценивается сложность минимальной универсальной контактной схемы. В § 2 получена точная оценка сложности минимальной универсальной П-схемы глубины 2, верхняя оценка сложности П-схемы глубины 3 и доказано, что универсальная контактная П-схема без ограничений на глубину имеет сложность, асимптотически равную 2^n. В § 3 рассматриваются универсальные контактные схемы, представляющие собой прямоугольную решетку, и доказывается, что сложность минимальной схемы такого вида не превосходит $10 \cdot 2^n$.

§ 1. Универсальные контактные схемы

Универсальной контактной схемой n переменных будем называть такой контактный двуполюсник от n переменных: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$, из которого подстановками констант 0 и 1 вместо некоторых вхождений переменных можно получить контактную схему, реализующую любую, наперед заданную функцию алгебры логики от n переменных.

Примером универсальной контактной схемы может служить двуполюсник, полученный из контактного дерева путем объединения всех его выходов.

Под сложностью универсальной контактной схемы будем понимать число контактов в ней. Сложность минимальной универсальной контактной схемы обозначим через $A(n)$.

Задача состоит в оценке $A(n)$.

Каждому ребру несущей сети универсальной схемы можно приписать один из символов: $x_i^{\sigma_i}$, 0, 1, поэтому число различных функций, которые может реализовать схема с $A(n)$ контактами, не больше чем $3^{A(n)}$. Очевидно,

$$3^{A(n)} \geqslant 2^{2^n},$$

откуда получаем:

$$A(n) \geqslant \frac{2^n}{\log_2 3}.$$

С другой стороны, известно, что можно построить (для достаточно больших n) $(1, 2^n)$-полюсник, реализующий любую элементарную конъюнкцию от n переменных со сложностью, асимптотически равной 2^n [1].

Достаточно объединить все выходы такой схемы, чтобы получить универсальную схему с числом контактов

$$A'(n) \sim 2^n.$$

Следовательно, ввиду того, что $A'(n) \geqslant A(n)$, имеем:

$$\frac{2^n}{\log_2 3} \leqslant A(n) \leqslant 2^n. \tag{1}$$

Докажем теперь, что

$$A(n) \sim c_1 2^n \tag{2}$$

(где c_1 — константа, не зависящая от n). Соотношение (2) можно записать в виде

$$\frac{A(n)}{2^n} \to c_1 \qquad (n \to \infty). \tag{3}$$

Для доказательства (3) установим, что

$$A(n) \leqslant 2A(n-1) + 2. \tag{4}$$

Доказательство (4) будем вести индукцией по n. Для $n = 2$ высказанное предположение верно. Это видно из рис. 1.

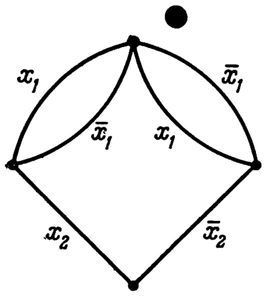

Рис. 1.

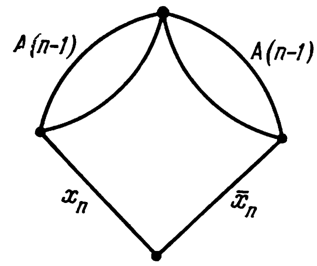

Рис. 2.

Пусть (4) верно для $n - 1$. Докажем, что оно верно для n. В самом деле, всякую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Функции $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ реализуются схемами с числом контактов $A(n-1)$. На рис. 2 представлена соответствующая этому разложению схема, из вида которой следует, что

$$A(n) \leqslant 2A(n-1) + 2.$$

Следовательно, соотношение (4) верно для всех n.

Для доказательства (3) разделим обе части соотношения (4) на 2^n:

$$\frac{A(n)}{2^n} - \frac{A(n-1)}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}; \tag{5}$$

аналогичным образом из (1) можно получить:

$$\frac{1}{\log_2 3} \leqslant \frac{A(n)}{2^n} \leqslant 1. \tag{6}$$

Наряду с последовательностью $\left\{\frac{A(n)}{2^n}\right\}$ рассмотрим последовательность $\left\{\frac{B(n)}{2^n}\right\}$, где

$$B(n) = A(n) + 2. \tag{7}$$

Из (6) и (7) для последовательности $\left\{\frac{B(n)}{2^n}\right\}$ получаем:

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{B(n)}{2^n} \leqslant 1 + \frac{1}{2^{n-1}}; \tag{8}$$

из (7) и (5) следует, что

$$\frac{B(n)}{2^n} - \frac{B(n-1)}{2^{n-1}} = \frac{A(n)}{2^n} - \frac{A(n-1)}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} = 0. \tag{9}$$

В силу (8) и (9) последовательность $\left\{\frac{B(n)}{2^n}\right\}$ имеет предел, а из (7) следует, что последовательность $\left\{\frac{A(n)}{2^n}\right\}$ имеет предел, и потому

$$A(n) \sim c_1 2^n,$$

где c_1 — константа, не зависящая от n.

Утверждение доказано.

§ 2. Универсальные П-схемы

Всякой П-схеме соответствует формула из класса $A^k_{\vee}$ или $A^k_{\&}$ [2]. Из принципа двойственности следует, что сложности минимальных универсальных П-схем от n переменных, соответствующих формулам обоих этих классов, одинаковы. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать сложность минимальной универсальной контактной П-схемы от n переменных глубины k независимо от того, какому из двух классов формул ($A^k_{\vee}$ или $A^k_{\&}$) она соответствует. Обозначим сложность такой схемы через $A^k(n)$.

Теорема 1.

$$A^2(n) = (n+1)\,2^{n-1}.$$

Доказательство. I. Для любого n можно построить ΣП-схему, содержащую ровно $(n+1)2^{n-1}$ контактов и реализующую при соответствующих подстановках констант любую функцию алгебры логики. Для каждого конкретного n надо разбить множество элементарных конъюнкций на пары соседних по x_i

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} x_i^{\sigma_i} x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \ldots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n},$$

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} x_i^{\bar{\sigma}_i} x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \ldots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n}.$$

Для реализации любой конъюнкции из этой пары или дизъюнкции этих

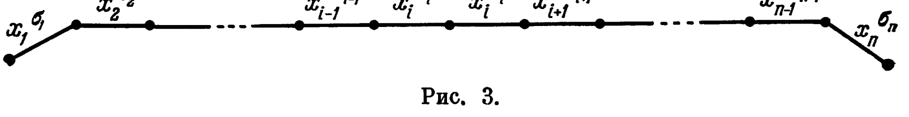

Рис. 3.

двух конъюнкций достаточна цепочка из $n+1$ контактов вида, показанного на рис. 3.

Чтобы получить первую конъюнкцию из пары, достаточно положить $\bar{x}_i^{\sigma_i} = 1$, вторую — $x_i^{\sigma_i}=1$, их дизъюнкцию—$x_i^{\sigma_i} = 1$; $x_i^{\bar{\sigma}_i} = 1$. Для реализации всех конъюнкций потребуется $2^n/2 = 2^{n-1}$ таких цепочек. Следовательно, сложность построенной таким образом универсальной $\Sigma\Pi$-схемы равна $(n+1)2^{n-1}$.

II. Докажем теперь, что не существует универсальной П-схемы глубины 2 со сложностью меньшей $(n+1)2^{n-1}$.

Пусть имеется универсальная $\Sigma\Pi$-схема. Она наряду с прочими функциями должна реализовать функции

$$f_1(\tilde{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

$$f_2(\tilde{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1.$$

Схемы для этих функций будут схемами того же типа ($\Sigma\Pi$-схемы), а следовательно, для реализации $f_1(\tilde{x})$ понадобится параллельно соединить 2^{n-1} цепочек с нечетным числом замыкающих контактов и содержащих контакты всех n переменных.

Для реализации $f_2(\tilde{x})$ нужно столько же (т. е. 2^{n-1}) цепочек, состоящих из контактов всех переменных, но содержащих четное число замыкающих контактов.

Пусть рассматриваемая схема содержит a цепочек длины n, состоящих из контактов всех переменных (среди них a_1 содержат нечетное число замыкающих контактов и $a_2 = a - a_1$ содержат четное число замыкающих контактов) и b цепочек длины, большей n. Стало быть, $f_1(\tilde{x})$ можно реализовать при помощи a_1 цепочек длины n и b_1 цепочек длины, большей n, а $f_2(\tilde{x})$ — при помощи a_2 цепочек длины n и b_2 цепочек длины, большей n (при этом цепочки длины, большей n, использованные при реализации $f_1(\tilde{x})$, могут использоваться также и для реализации $f_2(\tilde{x})$).

Таким образом,

$$a_1 + b_1 = 2^{n-1}, \quad a_2 + b_2 = 2^{n-1},$$

причем

$$a_1 + b \geqslant 2^{n-1}, \quad a_2 + b \geqslant 2^{n-1}.$$

Для сложности схемы имеем оценку:

$$A^2(n) \geqslant an + b(n+1) = a_1 n + a_2 n + b(n+1) \geqslant$$
$$\geqslant n2^{n-1} + a_2 n + b \geqslant n2^{n-1} + a_2 + b \geqslant (n+1)\,2^{n-1}.$$

Из I и II следует:

$$A^2(n) = (n+1)\,2^{n-1}.$$

Теорема 2.

$$A^3(n) \leqslant 2^{n-1}\log_2 n.$$

Доказательство. Рассмотрим схемы вида $\Sigma\Pi\Sigma$. Всякая функция алгебры логики от n переменных может быть представлена в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{по всем} \\ \sigma_1 \ldots \sigma_k \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Каждую функцию $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ реализуем схемой вида $\Pi\Sigma$ со сложностью

$$(n-k+1)\,2^{n-k-1}\ {}^{*)}.$$

*) Это верно в силу теоремы 1.

К каждой такой схеме добавляем цепочку контактов переменных $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, ..., $x_k^{\sigma_k}$, и таких подсхем будет столько, сколько существует всевозможных наборов $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k$, т. е. 2^k. Соединяя эти подсхемы параллельно, получим требуемую универсальную схему. Оценим ее сложность

$$A^3(n) = [(n-k+1)\,2^{n-k-1} + k]\,2^k = (n-k+1)\,2^{n-1} + k2^k = \\ = (n+1)\,2^{n-1} - k2^{n-1} + k2^k. \qquad (10)$$

Полагая $k = [n-1-\log_2(n+c_2)]$, получаем для $A^3(n)$ следующую оценку:

$$A^3(n) \lesssim (n+1)\,2^{n-1} - k2^{n-1} + k2^k < (n+1)\,2^{n-1} - \\ -(n-2-\log_2(n+c_2))\,2^{n-1} + [(n-1)-\log_2(n+c_2)]\frac{2^{n-1}}{n+c_2} = \\ = 2^{n-1}\left[n+1-n+2+\log_2(n+c_2)+\frac{n-1-\log_2(n+c_2)}{n+c_2}\right] \sim 2^{n-1}\log_2 n.$$

Таким образом,

$$A^3(n) \lesssim 2^{n-1}\log_2 n.$$

Покажем, что выбрать k, дающее при этом методе построения универсальной схемы лучшую оценку, невозможно.

Действительно,

1) если $c_3(n) = \alpha n$, где $\alpha = \mathrm{const}$, то

$$A^3(n) \leqslant 2^{n-1}\left[3+\log_2 n+\log_2(1+\alpha)+\frac{n-1-\log_2 n\,(1+\alpha)}{n\,(1+\alpha)}\right] = \\ = 2^{n-1}\left[\log_2 n+3+\log_2(1+\alpha)+\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1+\log_2 n+\log_2(1+\alpha)}{n\,(1+\alpha)}\right] \sim \\ \sim 2^{n-1}\log_2 n;$$

2) если $c_4 = c_4(n)$ и $\frac{c_4(n)}{n} \to 0$, то оценка та же, так как

$$n + c_4(n) \sim n;$$

3) если $c_5(n) = n^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, то

$$A^3(n) \lesssim 2^{n-1}\left[3+(1+\varepsilon)\log_2 n+\frac{n-1-\log_2 n-\log_2(1+n^{\varepsilon})}{n+n^{1+\varepsilon}}\right] = \\ = 2^{n-1}\left[3+(1+\varepsilon)\log_2 n+\frac{n-1-\log_2 n\,(1+\varepsilon)}{n\,(1+n^{\varepsilon})}\right] \sim 2^{n-1}(1+\varepsilon)\log_2 n.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.

$$A^{\infty}(n) \sim 2^n.$$

I. Универсальная контактная схема, получаемая из $(1, 2^n)$-полюсника, реализующего систему всех элементарных конъюнкций со сложностью, асимптотически равной 2^n [1], путем объединения всех выходов этой схемы, будет, как легко видеть, П-схемой. Следовательно,

$$A^{\infty}(n) \lesssim 2^n.$$

II. Докажем теперь, что $A^{\infty}(n) \gtrsim 2^n$. Доказательство будем вести индукцией по числу контактов в схеме.

Докажем, что если N — число контактов в П-схеме, то путем замыкания и размыкания некоторых контактов мы сможем реализовать с помощью этой схемы не более чем $2^N + 1$ функций алгебры логики.

1) $N=2$. Возможны два случая:

а) контакты соединены параллельно (рис. 4). Все функции, реализуемые этой схемой, видны из табл. 1. Такая схема, действительно, реализует лишь 2^N+1 функций алгебры логики.

Таблица 1

$x_1^{\sigma_1}$ / $x_2^{\sigma_2}$	$x_1^{\sigma_1}$	0	1
$x_2^{\sigma_2}$	$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2}$	$x_2^{\sigma_2}$	1
0	$x_1^{\sigma_1}$	0	1
1	1	1	1

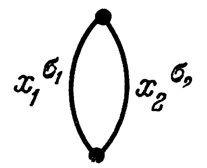

Рис. 4.

б) контакты соединены последовательно (рис. 5). Число реализуемых функций $2^2+1=2^N+1$.

Таблица 2

$x_1^{\sigma_1}$ / $x_2^{\sigma_2}$	$x_1^{\sigma_1}$	1	0
$x_2^{\sigma_2}$	$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$	$x_2^{\sigma_2}$	0
1	$x_1^{\sigma_1}$	1	0
0	0	0	0

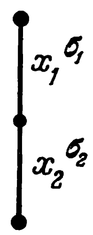

Рис. 5.

Следовательно, для $N=2$ высказанное предположение верно.

Предположим, что всякая П-схема с числом контактов, не превосходящим $N-1$, может реализовать не более $2^{N-1}+1$ функций алгебры логики, и докажем, что тогда любая П-схема из N контактов не может реализовать более 2^N+1 функций.

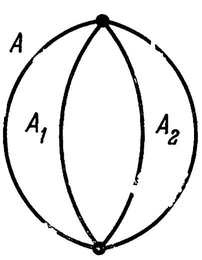

Рис. 6.

Всякую П-схему, содержащую N контактов, можно представить либо как конъюнкцию двух П-схем, содержащих каждая контактов меньше, чем N, либо как дизъюнкцию каких-то двух П-схем также с меньшим, чем N, числом контактов.

Пусть схема с N контактами получается путем параллельного соединения двух схем с числом контактов соответственно N_1 и N_2, так что $N_1+N_2=N$ (рис. 6).

Схема A_1 содержит N_1 контактов. Схема A_2 содержит N_2 контактов, A_1 и A_2 как схемы, содержащие менее N контактов, могут реализовать соответственно не более чем $2^{N_1}+1$ и $2^{N_2}+1$ функций.

Тогда число функций, реализуемых схемой A_1, определится из табл. 3 ($f_i(1 < i < 2^{N_1})$ — функции, реализуемые схемой A_1, $\psi_j\,(1 < j < 2^{N_2})$ — функции, реализуемые схемой A_2).

Любая П-схема реализует функции 0 и 1. Первая может быть получена путем размыкания всех контактов, входящих в схему, а вторая — путем замыкания всех контактов.

Таблица 3

	f_1	f_2	$\ldots$	f_i	$\ldots$	$f_{2^{N_1}}$	1
ψ_1				$f_i \vee \psi_1$			1
ψ_2				$f_i \vee \psi_2$			1
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
ψ_j	$f_1 \vee \psi_j$	$f_2 \vee \psi_j$	$\ldots$	$f_i \vee \psi_j$	$\ldots$	$f_{2^{N_1}} \vee \psi_j$	1
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
$\psi_{2^{N_2}}$				$f_i \vee \psi_{2^{N_2}}$			1
1	1	1	$\ldots$	1	$\ldots$ $\psi_{2^{N_2}}$	1	1

Из табл. 3 видно, что схема A не может реализовать более чем

$$2^{N_1}2^{N_2}+1=2^{N_1+N_2}+1=2^N+1 \text{ функций.}$$

Для случая последовательного соединения двух схем, составляющих схему A, рассуждения двойственны.

Таким образом, П-схема, содержащая N контактов, не может реализовать более чем 2^N+1 функций алгебры логики.

Если $A^\infty(n)$ — число контактов в универсальной П-схеме, то, очевидно,

$$2^{A^\infty(n)} \geqslant 2^{2^n},$$

откуда

$$A^\infty(n) \geqslant 2^n.$$

Из I и II следует, что

$$A^\infty(n) \sim 2^n.$$

Теорема доказана.

§ 3. Универсальные контактные схемы специального вида

В этом параграфе будем рассматривать универсальные контактные схемы, представляющие собой прямоугольную решетку, ребрами которой являются контакты. Назовем *шириной* прямоугольника число контактов, расположенных вертикально и образующих вертикальную сторону прямоугольника, и *длиной* прямоугольника — число контактов, расположенных горизонтально и образующих горизонтальную сторону прямоугольника (рис. 7).

Очевидно, число контактов в такой схеме длины p и ширины q есть

$$A=p(q+1)+q(p+1).$$

Схемой, принадлежащей к рассматриваемому классу, будет, например, схема *), изображенная на рис. 8; A — вход схемы, B — выход. Все вертикальные контакты в этой схеме, кроме самых крайних справа и слева, постоянно разомкнуты.

Оказывается, что в классе таких решетчатых схем можно построить универсальную контактную схему, имеющую сложность порядка сложности контактного дерева.

Эта схема представляет собой, по сути дела, контактное дерево с объединенными выходами, уложенное на прямоугольную решетку.

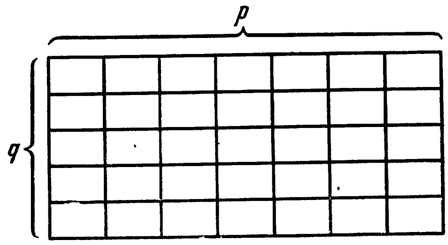

Рис. 7.

На рис. 9 представлена схема такого вида для $n = 6$; A — вход схемы, B — выход.

Все контакты, изображенные тонкими линиями, постоянно разомкнуты. Все представленные жирными линиями контакты, которым не приписаны переменные $x_i^{\sigma_i}$, постоянно замкнуты.

Легко видеть, что схема, представленная на рис. 9, построена из двух одинаковых схем для пяти переменных S' и S'' путем последовательного присоединения к их полюсам B' и B'' контактов x_6 и $\bar{x}_6$.

Обозначим через $A'(n)$ сложность минимальной универсальной контактной схемы такого вида от n переменных. Верно следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.

$$A'(n) \lesssim 10 \cdot 2^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оценки сложности схемы найдем длину и ширину прямоугольника, необходимого для реализации любой функции от n переменных.

Схема будет строиться из прямоугольников вида $aBcd$ (рис. 9), расстояние между которыми по длине и ширине равно 2.

Так как схема представляет собой, по сути дела, дерево, то она должна иметь 2^n выходов, которые соединяются в один выходной полюс, и так как каждый прямоугольник вида $aBcd$ имеет 16 выходов, то схема для n переменных должна состоять из $2^n/16 = 2^{n-4}$ таких прямоугольников.

1. Пусть n четно. Как следует из рис. 9, для такой схемы по длине и ширине надо взять одинаковое число элементарных прямоугольников (рис. 10). Тогда параметр x такой схемы (число элементарных прямоугольников по длине и ширине схемы) определится так:

$$x^2 = 2^{n-4}, \quad x = 2^{\frac{n-4}{2}}.$$

Для определения длины и ширины схемы в этом случае заметим, что длина каждого элементарного прямоугольника равна 8, а ширина 6, причем по длине и ширине зазоры между элементарными прямоугольниками равны 2.

*) В схемах этого класса есть целый ряд контактов, которые при построении любой функции алгебры логики для данного n надо постоянно либо только замыкать, либо только размыкать, поэтому не имеет значения, какой символ из алфавита $\{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ им приписан. Такие контакты на рисунках либо помечены 1, либо не помечены вовсе.

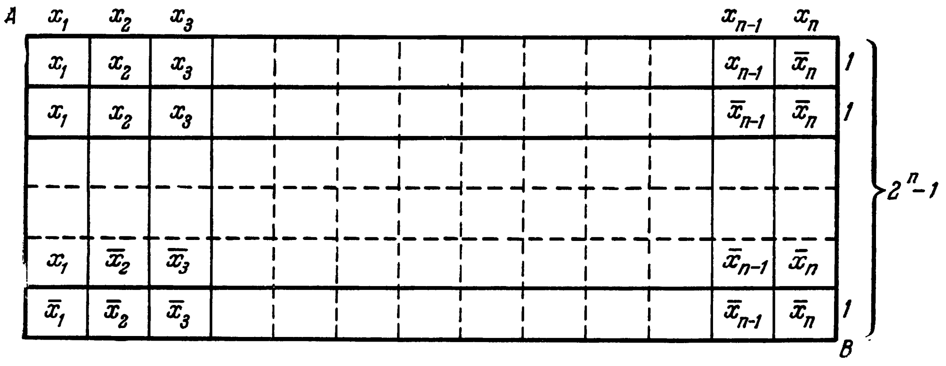

Рис. 8.

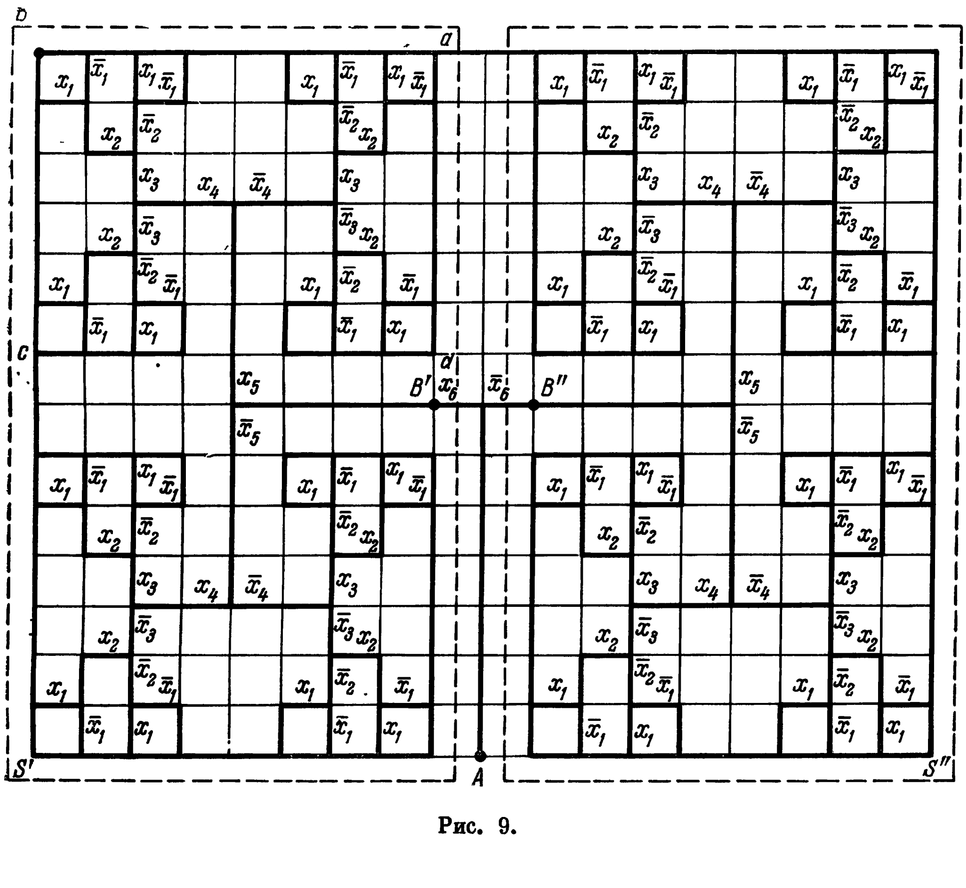

Рис. 9.

Следовательно, длина такой решетчатой схемы будет равна $10 \cdot 2^{\frac{n-4}{2}} - 2$, а ширина — $8 \cdot 2^{\frac{n-4}{2}} - 2$. Следовательно,

$$A(n) \leqslant (10 \cdot 2^{\frac{n-4}{2}} - 1)(8 \cdot 2^{\frac{n-4}{2}} - 2) + (10 \cdot 2^{\frac{n-4}{2}} - 2)(8 \cdot 2^{\frac{n-4}{2}} - 1) = \\ = 80 \cdot 2^{n-4} + 80 \cdot 2^{n-4} = 10 \cdot 2^n.$$

Итак, $A(n) \lesssim 10 \cdot 2^n$.

2. Пусть теперь n нечетное. Тогда в универсальной схеме по ширине будет вдвое больше элементарных прямоугольников, чем по длине (рис. 11).

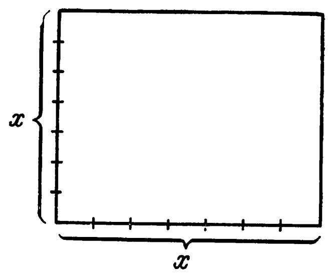

Рис. 10.

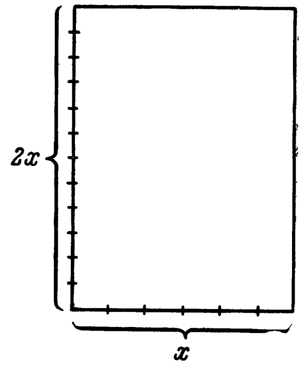

Рис. 11.

Число x элементарных прямоугольников по длине равно $2x^2 = 2^{n-4}$; $x = 2^{\frac{n-5}{2}}$. Длина прямоугольника равна $10 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}} - 2$, его ширина — $16 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}} - 2$. Следовательно,

$$A(n) \leqslant (10 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}} - 1)(16 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}} - 2) + (10 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}} - 2)(16 \cdot 2^{\frac{n-5}{2}} - 1) \sim \\ \sim 320 \cdot 2^{n-5} = 10 \cdot 2^n.$$

Окончательно получаем:

$$A(n) \lesssim 10 \cdot 2^n.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Б. Лупанов, О синтезе некоторых классов управляющих систем, Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10, М., Физматгиз, 1963.
2. О. Б. Лупанов, О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов в базисе &, $\vee$, $^{-}$, Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 6, М., Физматгиз, 1961.

Поступило в редакцию 10 XII 1965.