КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ МАТРИЦ ВЕНТИЛЬНЫМИ СХЕМАМИ ГЛУБИНЫ НЕ БОЛЕЕ 2

А. ГАЛ

(МОСКВА)

Класс вентильных схем является одним из самых простых классов схем. Вентильные конструкции могут быть использованы и при решении задач, связанных с другими более сложными классами схем. О. Б. Лупанов [1] получил асимптотическую оценку сложности реализации класса всех (p_n, q_n)-матриц (при условии $q_n/\log p_n \to \infty$) вентильными схемами глубины не больше чем 2. Как известно, почти все матрицы этого класса имеют сложность, эквивалентную сложности всего класса. Поэтому возникает вопрос о выделении и реализации специальных классов, которые допускают более простую реализацию. В настоящей работе оцениваются сложности реализации некоторых специальных классов матриц вентильными схемами глубины не больше чем 2.

Пусть M — (k, l)-матрица из нулей и единиц, A — (n, n)-матрица из класса $\mathfrak{A}_n$ всех (n, n)-матриц из нулей и единиц. Введем следующие обозначения.

$M * A$ — (kn, ln)-матрица, определенная следующим образом. Вместо всех единиц матрицы M вставлена матрица A, вместо всех нулей — нулевая (n, n)-матрица.

$M * \mathfrak{A}_n$ — класс всех матриц $M * A$, $A \in \mathfrak{A}_n$.

$L(A)$ — минимальное число вентилей в схеме (по всем вентильным схемам глубины не больше чем 2, реализующим матрицу A),

$$L(n) = \max_{A \in \mathfrak{A}_n} L(A), \quad L(M, n) = \max_{M*A \in M*\mathfrak{A}_n} L(M*\mathfrak{A}_n).$$

$L(k, l, n) = \max L(M, n)$, максимум берется по всевозможным матрицам M из нулей и единиц размеров $k \times l$.

X_M — максимальное число единиц матрицы M, которые могут быть выбраны так, чтобы в любом столбце и любой строке матрицы M стояла не больше чем одна выбранная единица. Эта же величина равняется минимальному числу строк и столбцов, покрывающих все единицы матрицы M [4].

О. Б. Лупанов [1] получил оценку

$$L(n) \sim n^2/\log_2 n, \quad n \to \infty.$$

(Дальше всюду в работе вместо $\log_2 n$ стоит $\log n$.)

Теорема 1. *Для произвольной (k, l)-матрицы M, где k и l — произвольные фиксированные натуральные числа,*

$$L(M, n) \sim X_M L(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. 1. Нижняя оценка следует из утверждения $L(M, n) \geqslant X_M L(n)$ для любого n и любой M. Для доказательства этого покажем, что для любой матрицы A из $\mathfrak{A}_n$ справедливо $L(M * A) \geqslant X_M L(A)$. В матрице M выберем X_M единиц так, чтобы в любой строке и в любом столбце матрицы M стояла максимум одна из выбранных единиц. Обозначим через M' матрицу, которая содержит только эти X_M единиц, кроме них состоит из нулей, и ее размеры равны размерам матрицы M. Очевидно, что для реализации матрицы $M * A$ нужно не меньше ребер, чем для реализации матрицы $M' * A$. Докажем $L(M' * A) \geqslant X_M L(A)$ индукцией по X_M. В случае $X_M = 1$ это очевидно, так как $M' * A = A$.

Предположим, что при $X_M = i$ выполнено $L(M' * A) \geqslant iL(A)$, и рассмотрим случай $X_M = i + 1$. Выберем любую из единиц матрицы M'. Пусть она стоит в r-й строке и s-м столбце матрицы M'. Рассмотрим любую вентильную схему глубины, не превосходящей 2, реализующую матрицу $M' * A$. Занумеруем входные и выходные полюсы схемы: j-й входной полюс соответствует j-й строке, j-й выходной полюс соответствует j-му столбцу реализуемой матрицы $M' * A$. Выбросим из схемы все ребра, которые выходят из входных полюсов с номерами $(r-1)n+1$, $(r-1)n+2, \ldots, rn$, и все ребра, которые приходят к выходным полюсам с номерами $(s-1)n+1$, $(s-1)n+2, \ldots, sn$. При этом мы выбросим не менее $L(A)$ ребер, так как схема, которая состоит только из этих выброшенных ребер, реализует матрицу A, вставленную вместо той единицы матрицы M', которая стоит в r-й строке и в s-м столбце матрицы M'.

По построению матрицы M' в r-й строке и в s-м столбце нет других единиц. Поэтому после выбрасывания указанных ребер оставшаяся часть схемы реализует некоторую матрицу $M'_1 * A$, где M'_1 содержит i единиц, причем все они стоят в разных строках и столбцах. По предположению индукции отсюда следует, что оставшаяся часть схемы содержит не менее $iL(A)$ ребер. Тем самым доказано, что любая схема, реализующая $M' * A$, содержит не менее $(i+1)L(A)$ ребер.

2. Верхняя оценка. Для произвольной матрицы $M * A$ построим схему, число ребер которой асимптотически меньше $X_M L(n)$. По определению X_M, можно выбрать X_M строк и столбцов матрицы M, которые содержат все единицы из M. Матрицу $M * A$ будем реализовывать по подматрицам размеров $kn \times n$ и $n \times ln$, соответствующим данным строкам и столбцам матрицы M. Нужно реализовать X_M таких подматриц. Каждую из них реализуем схемой, содержащей асимптотически меньше $L(n)$ ребер (с использованием конструкции О. Б. Лупанова [1]).

Разобьем матрицу A по столбцам на $]n/t[$ непересекающихся полос, каждая из которых имеет n строк и не больше чем t столбцов. Множество строк каждой полосы разобьем на группы одинаковых, для каждой полосы получится не больше чем 2^t групп. Произвольную (n, ln)-подматрицу матрицы $M * A$, соответствующую некоторой строке матрицы M, реализуем следующей схемой. Входные полюсы схемы перенумеруем от 1 до n. Выходные полюсы разобьем на l групп, в каждой группе n полюсов. В каждой группе перенумеруем полюса от 1 до n, а группы — от 1 до l. Каждой строке сопоставим ребро, выходящее из входного полюса, имеющего номер данной строки. Все ребра, сопоставленные строкам одной группы, объединим в один узел. Те группы выходных полюсов, под номером которых в соответствующей строке матрицы M стоит 0, не соединим ни узлами, ни выходами. Для остальных групп каждый узел соединим с выходными полюсами, имеющими номера столбцов, в которых расположены единицы соответствующих строк матрицы A. Из каждого узла выходит не более lt ребер. В полученной схеме не более $]n/t[(n + 2^t lt)$ ребер.

Положим $t=[\log n-2\log\log n]$. Тогда

$$]n/t[\, n \sim n^2 \log n \sim L(n),$$

$$]n/t[\, 2^t lt = o(n^2/\log n).$$

Все (kn, n)-подматрицы матрицы $M * A$, соответствующие столбцам матрицы M, реализуем аналогично. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для произвольных фиксированных чисел k и l*

$$L(k, l, n) \sim \min(k, l) L(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. 1. Нижняя оценка. Для произвольных k и l существуют (k, l)-матрицы M, для которых $X_M = \min(k, l)$. Этому условию удовлетворяют, например, все (k, l)-матрицы, у которых есть такая подматрица размера $\min(k, l) \times \min(k, l)$, что на диагонали этой подматрицы стоят единицы. Поэтому из теоремы 1 следует нижняя оценка.

2. Верхняя оценка. Для любой (k, l)-матрицы M справедливо $X_M \leqslant \leqslant \min(k, l)$. Поэтому из теоремы 1 следует, что $L(m, n) \leqslant \min(k, l) L(n)$ для любой (k, l)-матрицы M. Теорема 2 доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 2 верны и при k, $l \to \infty$ при условии $\max(k, l) = o(\log n)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность О. Б. Лупанову за помощь, оказанную при работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах // ДАН СССР.— 1956.— 111, № 6.
2. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1969.
3. Орлов В. А. Реализация узких матриц вентильными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 22.— М.: Наука, 1970.
4. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях.— М.: Мир, 1966.