(сфера) приведено распределение плотности $\tilde{\rho}=\rho_2(x, t)/\rho_2(0, 0)$ и давления $\tilde{p}=p_2(x, t)/p_2(0, 0)$ на оси симметрии течения при разных временах ($M_\infty=6$, $\gamma=1{,}4$). Видно, что сначала плотность возрастает от волны к телу, в согласии с [6], а затем на кривой возникает максимум, перемещающийся к поверхности тела.

Литература

1. *Грудницкий В. Г., Прохорчук Ю. А.* Расчет дифракции ударной волны на криволинейной поверхности.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 5, с. 1525–1534.
2. *Moran J. P., Van-Moorhem W. K.* Diffraction of a plane shock by an analytic blunt body.— J. Fluid Mech., 1969, v. 38, № 1, p. 127–137.
3. *Васильев М. М.* Отражение сферической ударной волны от плоскости.— В кн.: Вычисл. матем. М.: Изд-во АН СССР, 1960, № 6, с. 87–99.
4. *Носенко Н. И., Сысоев Н. Н., Шугаев Ф. В.* Начальная стадия отражения плоской ударной волны от цилиндра, сферы и эллипсоида вращения.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1980, № 2, с. 94–100.
5. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
6. *Знаменская И. А., Рязин А. П., Шугаев Ф. В.* Об особенности распределения параметров газа на начальной стадии отражения ударной волны от сферы и цилиндра.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1979, № 3, с. 103–110.

Поступила в редакцию 8.X.1981

УДК 519.7

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА НЕРАВЕНСТВ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ МОНОТОННУЮ БУЛЕВУ ФУНКЦИЮ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

ЗУЕВ Ю. А., ТРИШИН В. Н.

(Москва)

Показывается, что существует монотонная булева функция от n переменных, для представления которой в виде системы линейных неравенств с n булевыми переменными требуется не менее $\binom{n}{[n/2]} n^{-1}$ неравенств.

Пусть дана система линейных неравенств

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$,— неотрицательные действительные числа, а переменные x_j, $j=1, 2, \ldots, n$, булевы.

С каждой такой системой можно связать монотонную булеву функцию (м.б.ф.) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=\varphi(\tilde{x})$ такую, что $\varphi(\tilde{x})=0$, если $\tilde{x}$ – допустимое решение системы неравенств (1), и $\varphi(\tilde{x})=1$ в противном случае. Обратно: для любой м.б.ф. $\varphi(\tilde{x})$ найдется система неравенств вида (1), вообще говоря неединственная, представляющая $\varphi(\tilde{x})$ (см. [1]).

В связи с этим возникает вопрос, каким минимальным числом $L(n)$ неравенств можно обойтись, чтобы записать любую м.б.ф. $\varphi(\tilde{x})$ в виде (1). Из [1] следует, что $L(n)<\binom{n}{[n/2]}$. Результатом настоящей работы является

Теорема. *Справедливо неравенство* $L(n)\geqslant \binom{n}{[n/2]} n^{-1}$.

Для доказательства нам потребуются две вспомогательные леммы, приводимые ниже. Напомним некоторые определения. Булев n-мерный вектор $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется нижней единицей м.б.ф. $\varphi(\tilde{x})$, если $\varphi(\tilde{\alpha})=1$, и для всякого булева n-мерного вектора $\tilde{\beta}$ из $\tilde{\beta}<\tilde{\alpha}$ вытекает, что $\varphi(\tilde{\beta})=0$. Множество всех векторов единичного n-мерного куба, имеющих ровно k единиц, называется k-м слоем. Расстоянием Хемминга между булевыми n-мерными векторами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называется число

$$\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j-\beta_j|,$$

равное числу координат, в которых они различаются.

Лемма 1. *Пусть все нижние единицы м.б.ф. $\varphi(\tilde{x})$ лежат в k-м слое и расстояние Хемминга между любыми двумя из них не меньше 4. Тогда для представления $\varphi(\tilde{x})$ в виде* (1) *требуется число неравенств, не меньшее числа ее нижних единиц.*

Доказательство. Покажем, что любая гиперплоскость отделяет не более одной нижней единицы м.б.ф. $\varphi(\tilde{x})$ от множества векторов, на которых эта функция принимает значение 0. Допустим противное, т. е. существуют две нижние единицы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j=b$$

такая, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j>b, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j\beta_j>b,$$

а для любого вектора $\tilde{\gamma}$, где $\varphi(\tilde{\gamma})=0$, выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\gamma_j\leqslant b.$$

Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ в координатах с номерами r и s различаются и $\alpha_r=1$, $\beta_r=0$, $\alpha_s=0$, $\beta_s=1$.

Если $a_r\geqslant a_s$, то для вектора $\tilde{\gamma}=(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n)$, лежащего в k-м слое, с одной стороны, выполняется строгое неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\gamma_j>b,$$

а с другой стороны, так как $\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta})=2$, имеем $\varphi(\tilde{\gamma})=0$. Получили противоречие. В случае $a_r<a_s$ следует рассмотреть вектор $\tilde{\gamma}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{s-1}, \beta_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$.

Лемма 2. *В k-м слое существует множество векторов мощностью не менее $\binom{n}{k} n^{-1}$ таких, что расстояние Хемминга между любыми двумя из них не меньше* 4 (см. [2]).

Доказательство. Рассмотрим отображение $T(\tilde{\alpha})$ векторов k-го слоя на множество классов вычетов по модулю n:

$$T(\tilde{\alpha})=\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j \pmod n.$$

Легко проверить, что для любого i, $0\leqslant i\leqslant n-1$, множество $C_i=T^{-1}(i)$ обладает требуемым свойством.

Так как $|C_0|+\ldots+|C_{n-1}|=\binom{n}{k}$, то по крайней мере для одного i имеем $|C_i|\geqslant\binom{n}{k}n^{-1}$.

Положив $k=[n/2]$, из лемм 1 и 2 получаем утверждение теоремы.

Данная оценка свидетельствует, в частности, о том, что возможность точного агрегирования неравенств в многомерной задаче о ранце в общем случае весьма ограничена. Так, например, существует многомерная задача о ранце с 20 булевыми переменными и числом неравенств не менее 9238, множество допустимых решений которой нельзя задать меньшим числом неравенств.

Литература

1. *Коробков В. К.* О некоторых целочисленных задачах линейного программирования.– В кн.: Пробл. кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965, с. 297–299.
2. *Graham R. L., Sloane N. J. A.* Lower bounds for constant weight codes.– IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, v. 26, № 1, p. 37–43.

Поступила в редакцию 24.III.1982
Переработанный вариант 24.XI.1982

УДК 519.854.2

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ НА ЭВМ

БРУШЛИНСКАЯ Н. Н., ДОРОФЕЕВА М. П., ОВСЯНКИН Б. П., ШПЕНЁВ В. М.

(Москва)

Описан способ построения всех допустимых расписаний для решения на однопроцессорной ЭВМ при разрешении прерываний системы задач с известными временами решения и директивными сроками начала и окончания решения.

Пусть $S=\{z_1, \ldots, z_N\}$ – множество задач, для каждой из которых задано время решения t_i и директивные сроки начала решения b_i и окончания решения f_i. Рассматривается вопрос построения допустимых расписаний для решения задач множества S на однопроцессорной ЭВМ. Предполагается, что в процессе выполнения разрешены прерывания любой задачи, на прерывание не расходуется дополнительное время и все числа b_i, f_i и t_i целые.

Если для любой задачи $z_i\in S$ выполнено условие $0<t_i\leqslant f_i-b_i$, то описанное множество задач S будем называть GM-системой.

Построение допустимых расписаний для такого рода систем рассматривалось в работах [1]–[7]. Известны различные необходимые и достаточные условия существования допустимых расписаний [1]–[5] и различные методы построения некоторых допустимых расписаний [1]–[6].

В настоящей работе приводится конструктивное доказательство теоремы, аналогичной теореме из [4], [5], о существовании допустимых расписаний, которое содержит алгоритм построения всех допустимых расписаний.

Пусть задачи GM-системы S занумерованы по неубыванию директивных сроков окончания решения. Для удобства будем считать, что минимальное из чисел $b_i=0$, а максимальное из чисел f_i обозначим через T.

Определение 1. Функцию P: $[0, \tau]\to\{0, 1, \ldots, N\}$, где $0\leqslant\tau\leqslant T$, назовем τ-допустимым расписанием для GM-системы S, если P является кусочно-постоянной, непрерывной справа функцией, все ее точки разрывов – целые числа и выполняются