ОБ ОДНОЙ БУЛЕВСКОЙ МАТРИЦЕ

Э. И. НЕЧИПОРУК

(ЛЕНИНГРАД)

В этой заметке построена булевская матрица порядка n, реализация которой произвольными вентильными схемами и схемами из функциональных элементов в базисе {дизъюнкция, конъюнкция} (без инверсии) требует примерно $n^{\frac{3}{2}}$ элементов. Подобные оценки раньше известны не были [1].

1°. Пусть r — простое число и $n = r^2$. Обозначим через $F_{a,b}$ квадратную булевскую матрицу порядка r, получающуюся из диагональной матрицы циклическим сдвигом ее столбцов на $ab\,(\mathrm{mod}\,r)$ позиций:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c:c} \overbrace{\qquad\quad}^{ab\,(\mathrm{mod}\,r)} & \end{array} & \\ F_{a,b}=\left\|\begin{array}{c:c} 0 & \begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{matrix} & 0 \end{array}\right\| & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} ab\,(\mathrm{mod}\,r) \end{array} \end{array} .$$

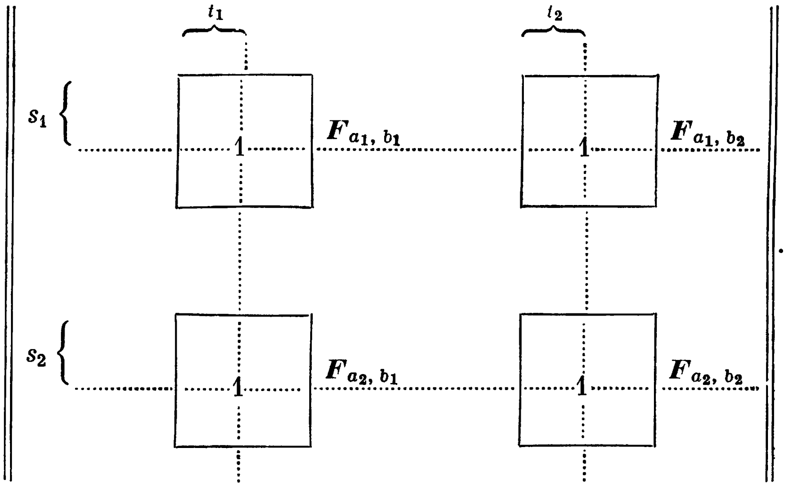
Образуем из этих блоков квадратную матрицу F_n порядка n:

$$F_n = \{F_{a,b}\}_{a,\,b=0,\,1,\,\ldots,\,r-1}.$$

Лемма. *Матрица F_n не содержит ни одной подматрицы вида* $\left\|\begin{matrix}1, & 1\\ 1, & 1\end{matrix}\right\|$.

Доказательство. Предположим противное: пусть матрица F_n содержит подматрицу вида $\left\|\begin{matrix}1, & 1\\ 1, & 1\end{matrix}\right\|$. Так как в каждой строке и каждом столбце каждого блока $F_{a,b}$ имеется точно по одной единице, то эта подматрица расположена в строках с номерами s_1, s_2 и столбцах с номерами

t_1, t_2 некоторых четырех различных блоков F_{a_u, b_v}, где $u, v = 1, 2$:



Из определения матриц $F_{a, b}$ следуют соотношения

$$t_v = s_u + a_u b_v \pmod r,$$

в силу которых

$$t_1 - t_2 = a_1 (b_1 - b_2) \pmod r,$$
$$t_1 - t_2 = a_2 (b_1 - b_2) \pmod r,$$

откуда

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = 0 \pmod r.$$

Так как r — простое, то из последнего равенства следует, что $a_1 = a_2$ или $b_1 = b_2$; а это противоречит тому, что все четыре блока F_{a_u, b_v} различны.

Лемма доказана.

2°. Теорема 1. *Всякая минимальная вентильная схема, реализующая матрицу F_n, состоит из $n^{\frac{3}{2}}$ вентилей.*

Доказательство. Исключим из схем вместе с инцидентными им вентилями все узлы, не связанные ориентированными цепями с полюсами хотя бы одного сорта. Покажем, что среди рассматриваемых схем всякая минимальная схема, реализующая матрицу F_n, не содержит внутренних узлов.

Всякий внутренний узел в схеме для F_n связан ориентированными цепями только с одним входным или только с одним выходным полюсом (лемма). Отождествляя этот внутренний узел, соответствующий ему единственный полюс и все расположенные между ними узлы и удаляя лишние вентили, получим более простую схему, эквивалентную исходной.

Таким образом, в минимальной схеме для F_n вентилей столько, сколько единиц в матрице F_n, а их $n^{\frac{3}{2}}$. Теорема доказана.

3°. *Схемой из функциональных элементов* называем ориентированный граф без ориентированных циклов, каждый узел которого, не являющийся входным полюсом, есть *вхождение базисного элемента*, причем между ребрами, входящими в узел, и аргументами соответствующей базисной функции имеется взаимно однозначное соответствие.

Через $\tilde{x}$ обозначаем вектор из n различных булевских аргументов. Произведение $\boldsymbol{F}_n\tilde{x}$ матрицы на вектор определяем обычным путем, беря в качестве сложения дизъюнкцию и в качестве умножения конъюнкцию. Таким образом, $\boldsymbol{F}_n\tilde{x}$ есть система n функций, каждая из которых является дизъюнкцией некоторых аргументов из $\tilde{x}$.

Теорема 2. *Всякая минимальная схема из функциональных элементов в базисе {дизъюнкция, конъюнкция} (без инверсии), реализующая оператор $\tilde{F}_n x$, не содержит конъюнкций и состоит из $n^{\frac{3}{2}} - n$ дизъюнкций.*

Доказательство. Покажем, как из всякой схемы для $\boldsymbol{F}_n\tilde{x}$ исключить все конъюнкции, не увеличивая числа дизъюнкций (и не изменяя оператора, реализуемого схемой).

Возьмем конъюнкцию K такую, что для всякого выходного полюса всякая связывающая их ориентированная цепь не содержит других конъюнкций.

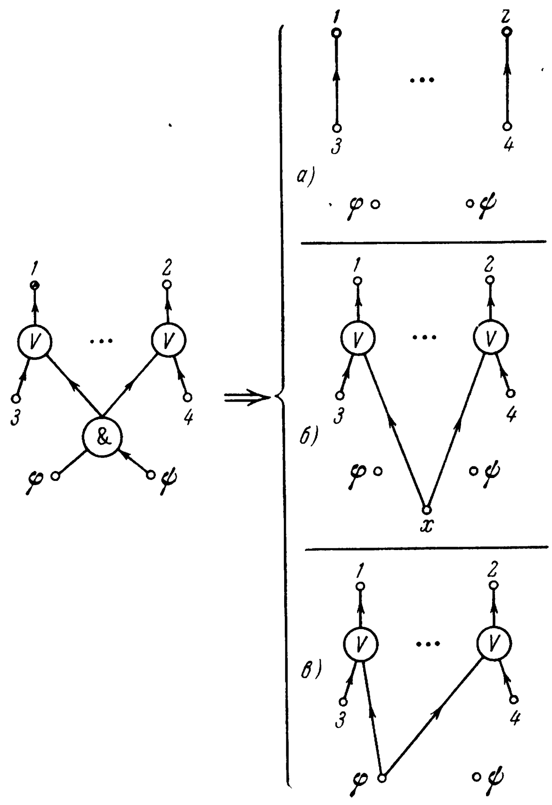


Рис. 1.

А) Если в сокращенной д. н. ф. функции, выдаваемой конъюнкцией K, нет ни одного однобуквенного члена, то эту конъюнкцию вместе с инцидентными ей ребрами из схемы исключим, а дизъюнкции, в которые из нее входили ребра, закоротим (рис. 1, *а*)).

Б) Если в сокращенной д. н. ф. функции, выдаваемой конъюнкцией K, есть только один однобуквенный член x, то эту конъюнкцию вместе со входящими в нее ребрами из схемы исключим, а выходящие из нее ребра перебросим во входной полюс, соответствующий аргументу x (рис. 1, *б*)).

В) Пусть в сокращенной д. н. ф. функции, выдаваемой конъюнкцией K, больше одного однобуквенного члена. Тогда эта конъюнкция связана ориентированными цепями только с одним выходным полюсом (лемма). Пусть f — дизъюнкция аргументов, выдаваемая этим выходным полюсом. Если бы в сокращенных д. н. ф. обеих функций φ, ψ, выдаваемых узлами, из которых входят ребра в конъюнкцию K, были члены, непоглощаемые функцией f, то непоглощаемый член был бы и в сокращенной д. н. ф. функции $\varphi \& \psi$, выдаваемой конъюнкцией K, что невозможно *). Поэтому по крайней мере одна из функций φ, ψ поглощается

*) В самом деле, если в сокращенной д. н. ф. функции φ содержится конъюнкция A, состоящая из аргументов, не входящих в f, и в сокращенной д. н. ф. функции ψ содержится аналогичная конъюнкция B, то $AB \leqslant \varphi\psi$ и конъюнкция не поглощается функцией f.

функцией f. В этом случае конъюнкцию K вместе с входящими в нее ребрами из схемы исключим, а выходящие из нее ребра перебросим в узел, выдающий поглощаемую из функций φ, ψ (рис. 1, *в*).

Повторяя эти преобразования и исключая из схемы вместе с инцидентными им ребрами все элементы, не связанные ориентированными цепями с выходными полюсами, приходим к схеме без конъюнкций, эквивалентной исходной. Подсчитаем теперь число дизъюнкций в минимальной схеме.

Если в схеме есть дизъюнкция, связанная ориентированными цепями только с одним входным полюсом, то ее можно исключить как конъюнкцию в пункте Б). Поэтому в минимальной схеме всякая дизъюнкция связана ориентированными цепями по крайней мере с двумя входными полюсами и, стало быть, только с одним выходным полюсом (лемма). Но это означает, что минимальная схема распадается на n подсхем, пересекающихся только во входных полюсах, каждая из которых «суммирует» $n^{\frac{1}{2}}$ аргументов для своего выходного полюса. Поэтому всего дизъюнкций $n\,(n^{\frac{1}{2}} - 1)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е ч и п о р у к Э. И., Об одной булевской функции, ДАН **169**, 4, 1966, 765.

Поступило в редакцию 11 III 1967.