О СЛОЖНОСТИ СХЕМ В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ, СОДЕРЖАЩИХ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С НУЛЕВЫМИ ВЕСАМИ *)

Э. И. НЕЧИПОРУК

(ЛЕНИНГРАД)

Одной из основных задач теории схем является задача о построении методов синтеза схем, реализующих функции алгебры логики и содержащих возможно меньшее число элементов. Точнее, указанная задача может быть сформулирована следующим образом. Функции алгебры логики реализуются схемами [1] из некоторого класса **) над базисом, состоящим из множества $\mathfrak{Z}$ элементов с нулевыми весами, реализующих множество функций Z, и множества $\mathfrak{E}$ элементов с положительными весами, реализующих множество функций E. Каждой схеме Θ сопоставляется число $L(\Theta)$, называемое весом, определяемое как сумма весов всех входящих в схему базисных элементов. Определяются функции, введенные впервые Шенноном [2]: $L(f) = \inf L(\Theta)$ (inf берется по всем допустимым схемам, реализующим функцию f) и $L(n) = \max L(f)$ (максимум берется по всем функциям алгебры логики от n аргументов). Требуется получить оценки функции $L(n)$.

Указанная задача в частных случаях имеет следующий содержательный смысл: требуется подсчитать минимальное число элементов некоторых сортов, необходимое для реализации произвольной функции алгебры логики от n аргументов, при использовании произвольного числа элементов других сортов.

В случае, когда множество $\mathfrak{Z}$ пусто или содержит лишь элементы для функций не более чем одного аргумента, О. Б. Лупановым были получены асимптотические выражения функции $L(n)$ вида $C\frac{2^n}{n}$ для ряда классов схем с произвольной топологией и асимптотические выражения вида $C\frac{2^n}{\log_2 n}$ для классов суперпозиций. В случае нетривиального непустого множества $\mathfrak{Z}$ первый результат — точное выражение для $L(f)$ порядка $\log_2 n$ для схем ***), построенных из элементов веса 0, реализующих дизъюнкции и конъюнкции, и элементов веса 1, реализующих инверсии,— был получен А. А. Марковым [6].

*) Краткое изложение результатов этой работы содержится в [13—15].

**) Например, в качестве классов схем могут быть взяты класс всех контактных схем, класс контактных Π-схем, класс контактно-вентильных схем, класс схем из функциональных элементов [3], класс суперпозиций [12] и др.

***) Схемы из функциональных элементов могут рассматриваться как суперпозиции, в которых отождествлены одинаковые подформулы. Соответственно отличается определение веса $L(\Theta)$: в случае схем вес есть сумма весов всех базисных элементов, которые являются внешними в нетождественных подформулах (а в случае суперпозиций — сумма весов вообще всех базисных элементов).

В настоящей работе получены следующие результаты: точное выражение для $L(f)$ порядка n для суперпозиций в базисе, который рассматривал А. А. Марков; асимптотические выражения вида $C2^{n/2}$ для схем из функциональных элементов и асимптотические выражения вида $C\frac{2^n}{n}$ для суперпозиций в некоторых базисах с непустым множеством $\mathfrak{Z}$. Улучшены также нижняя и верхняя оценки для минимального числа контактов в контактно-вентильных схемах по сравнению с известными оценками [4].

В работе приняты следующие обозначения. В качестве множества аргументов принято множество $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Набор аргументов $(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать через $\widetilde{x}$, произвольный набор значений аргументов из $\widetilde{x}$ будем обозначать через $\widetilde{\sigma}$. Различные подмножества набора $\widetilde{x}$ будем обозначать через $\widetilde{x}_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторая (возможно пустая) система индексов; произвольный набор значений аргументов из $\widetilde{x}_{\mathfrak{N}}$ будем обозначать через $\widetilde{\sigma}_{\mathfrak{N}}$. Будем обозначать через $\widetilde{\sigma}^{\mathfrak{M}}$ индивидуальные наборы $\widetilde{\sigma}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая система индексов. Для наглядности формул некоторые подмножества набора $\widetilde{x}$ в отдельных случаях будем обозначать другими буквами. Обозначение $\widetilde{y}$ является общим для любого конечного подмножества множества аргументов $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$; через $\widetilde{\alpha}$ будем обозначать набор значений аргументов из $\widetilde{y}$.

§ 1. Суперпозиции в базисе, в котором $L(y_1 \& y_2) = L(y_1 \vee y_2) = 0$, $L(\neg y) = 1$

Рассмотрим базис $\mathfrak{A}$, где $Z(\mathfrak{A}) = \{y_1 \& y_2,\ y_1 \vee y_2, 0, 1\}$, $E(\mathfrak{A}) = \{\neg y\}$, в котором вес элемента, реализующего инверсию, равен 1. Вес суперпозиции в этом случае равен числу входящих в суперпозицию элементов, реализующих инверсию. Ниже устанавливается минимальное число элементов, реализующих инверсию, необходимое для реализации суперпозициями такого вида произвольной индивидуальной функции алгебры логики (индивидуальная функция Шеннона — $L(f)$).

Назовем *цепью* множество $\{\widetilde{\sigma}^0, \ldots, \widetilde{\sigma}^n\}$ n-мерных наборов значений аргументов $\widetilde{x}$ таких, что выполняются неравенства *)

$$\widetilde{\sigma}^0 < \widetilde{\sigma}^1 < \ldots < \widetilde{\sigma}^n.$$

Из определения следует, что для любого $j = 0, \ldots, n-1$ набор $\widetilde{\sigma}^{j+1}$ содержит ровно на одну единицу больше, чем набор $\widetilde{\sigma}^j$ и $\widetilde{\sigma}^0 = \widetilde{0}$, $\widetilde{\sigma}^n = \widetilde{1}$, где через $\widetilde{0}$ (через $\widetilde{1}$) обозначен набор, состоящий из одних нулей (единиц). Занумеруем все цепи при фиксированном n; k-ю цепь обозначим через ω_k, $\omega_k = \{\widetilde{\sigma}^{k,0}, \ldots, \widetilde{\sigma}^{k,n}\}$. Пусть $\xi(\widetilde{x})$ — произвольная функция алгебры логики. Набор $\widetilde{\sigma}^{k,j'}$ назовем *отрицательным* (*положительным*) *инверсионным узлом* (сокращенно: о. и. у. или п. и .у.) пары (ξ, ω_k), если $\xi(\widetilde{\sigma}^{k,j'}) = 1$, $\xi(\widetilde{\sigma}^{k,j'+1}) = 0$ (соответственно $\xi(\widetilde{\sigma}^{k,j'}) = 0$, $\xi(\widetilde{\sigma}^{k,j'+1}) = 1$). Обозначим через $M_k^-[\xi]$ ($M_k^+[\xi]$) число о. и. у. (п. и. у.) пары (ξ, ω_k); введем функции $M^-[\xi] = \max\limits_k M_k^-[\xi]$, $M^+[\xi] = \max\limits_k M_k^+[\xi]$.

*) Для наборов $\widetilde{\sigma}' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_n')$ и $\widetilde{\sigma}'' = (\sigma_1'', \ldots, \sigma_n'')$ мы пишем $\widetilde{\sigma}'' \leqslant \widetilde{\sigma}_1''$, если $\sigma_i' \leqslant \sigma_i''$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\widetilde{\sigma}' < \widetilde{\sigma}''$, если $\widetilde{\sigma}' \leqslant \widetilde{\sigma}''$ и для некоторого i_0 выполнено строгое неравенство $\sigma_{i_0}' < \sigma_{i_0}''$.

Характеристическую функцию множества Q наборов обозначим через $\chi(Q)$.

Справедливы следующие очевидные леммы.

Лемма 1. 1) *Всякий о. и. у. (п. и. у.) одной из пар* $(\xi\,\&\,\eta,\ \omega_k)$, $(\xi \vee \eta,\ \omega_k)$ *есть о. и. у. (п. и. у.) одной из пар* $(\xi,\ \omega_k)$, $(\eta,\ \omega_k)$.

2) *Всякий о. и. у. (п. и. у.) пары* $(\neg\,\xi,\ \omega_k)$ *есть п. и. у. (о. и. у.) пары* $(\xi,\ \omega_k)$.

Лемма 2. $M_k^+[\xi]-M_k^-[\xi]=\xi(\widetilde{1})-\xi(\widetilde{0})$.

Теорема 1. *Для суперпозиций в базисе* $\mathfrak{A}$

$$L(f)=M^-[f]. \tag{1.1}$$

Доказательство. Нижняя оценка. В силу лемм 1, 2,

$$M_k^-[\xi\,\&\,\eta]\leqslant M_k^-[\xi]+M_k^-[\eta], \tag{1.2а}$$

$$M_k^-[\xi\vee\eta]\leqslant M_k^-[\xi]+M_k^-[\eta], \tag{1.2б}$$

$$M_k^-[\neg\,\xi]\leqslant M_k^-[\xi]+1. \tag{1.2в}$$

Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция. Всякая формула, реализующая эту функцию и являющаяся суперпозицией в базисе $\mathfrak{A}$, имеет один из видов: $A\,\&\,B$, $A\vee B$, $\neg A$, где A, B — подформулы данной формулы. Применяя неравенства (1.2а) — (1.2в) последовательно к подформулам формулы, на которой достигается $L(f)$, в силу равенств

$$M^-[\neg\,x_i]=L(\neg\,x_i)=1,\quad M^-[x_i]=L(x_i)=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

получим

$$M^-[f]\leqslant L(f).$$

Легко построить функцию ξ, принимающую значение 1 только на $\left]\frac{n}{2}\right[$ *) наборах, которые расположены на одной цепи ω_k и являются отрицательными инверсионными узлами пары $(\xi,\ \omega_k)$. Отсюда следует, что

$$\left]\frac{n}{2}\right[\leqslant L(n). \tag{1.3}$$

Верхняя оценка. Докажем сначала неравенство

$$L(n)\leqslant\left]\frac{n}{2}\right[. \tag{1.4}$$

Назовем *нормой* набора число разрядов набора, равных 1; норму набора $\widetilde{\alpha}$ обозначим через $\|\widetilde{\alpha}\|$. В множестве наборов $\widetilde{\sigma}$ выделим t групп $\left(t\leqslant\frac{n+1}{2}\right)$ так, чтобы l-я группа содержала все наборы с нормой $2l$ или $2l+1$, $l=0,\ \ldots,\ t-1$. Обозначим через χ_l характеристическую функцию l-й группы, через χ — характеристическую функцию набора $\widetilde{1}$; функция χ_l является симметрической функцией $S_{2l,\,2l+1}$, функция χ является симметрической функцией S_n (см. [8]). Образуем функцию

$$f_t=\bigvee_{s=0}^{t} f\chi_s.$$

Назовем функцию η *монотонно возрастающей (убывающей)*, если из $\widetilde{\sigma}^1\leqslant\widetilde{\sigma}^2$ следует $\eta(\widetilde{\sigma}^1)\leqslant\eta(\widetilde{\sigma}^2)$ $(\eta(\widetilde{\sigma}^1)\geqslant\eta(\widetilde{\sigma}_2))$. Обозначим через ξ^+ (ξ^-) наименьшую монотонно возрастающую (убывающую) функцию такую,

---

*) $]\,a\,[$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее числа a; $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не большее числа a, т. е. целую часть числа a.

что $\xi \leqslant \xi^+$ $(\xi \leqslant \xi^-)$. В силу принципа двойственности функция $\neg(\xi^-)$ всегда монотонно возрастающая.

Имеет место равенство

$$f\chi_s = (f\chi_s)^+ \,\&\, (f\chi_s)^-.$$

Отсюда

$$f_t = \bigvee_{s=0}^{t} (f\chi_s)^+ \,\&\, \neg(\neg((f\chi_s)^-)).$$

Далее,

$$f = \begin{cases} f_{]\frac{n}{2}[} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ f_{]\frac{n}{2}[} \vee f\chi & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Отсюда следует неравенство (1.4), так как $L(\eta) = 0$ для всякой монотонно возрастающей функции η.

Учитывая (1.3), получаем

$$L(n) = \left]\frac{n}{2}\right[.$$

Докажем теперь неравенство $L(f) \leqslant M^-[f]$. Обозначим через $R_k(\tilde{\sigma})$ число о. и. у. пары (f, ω_k), не меньших набора $\tilde{\sigma}$; число $\max\limits_k R_k(\tilde{\sigma})$ назовем *глубиной набора* $\tilde{\sigma}$. Обозначим через Q_s множество всех наборов глубины s. Множества Q_s не пересекаются, и

$$\chi\Big(\bigcup_{s=0}^{M^-[f]} Q_s\Big) = 1.$$

Следовательно,

$$f = f\chi(Q_0) \vee \bigvee_{s=1}^{M^-[f]} f\chi(Q_s).$$

Легко видеть, что функция $f\chi(Q_0)$ монотонно возрастающая.

Образуем функции

$$g_{s'} = \Big(f\chi\Big(\bigcup_{0 \leqslant s'' \leqslant s'} Q_{s''}\Big)\Big)^+, \quad 0 \leqslant s' \leqslant M^-[f],$$

$$h_s = \neg((f\chi(Q_s))^-), \qquad 1 \leqslant s \leqslant M^-[f].$$

Докажем равенство

$$f\chi(Q_s) = g_s \,\&\, \neg h_s. \tag{1.5}$$

Справедливы отношения

$$(\xi \vee \eta)^+ = \xi^+ \vee \eta^+,$$
$$(\xi \vee \eta)^- = \xi^- \vee \eta^-,$$
$$(\xi \,\&\, \eta)^+ \leqslant \xi^+ \,\&\, \eta^+,$$
$$(\xi \,\&\, \eta)^- \leqslant \xi^- \,\&\, \eta^-.$$

Действительно, если $(\xi \vee \eta)^+(\tilde{\sigma}) = 1$, то существует набор $\tilde{\sigma}^1$ такой, что $\tilde{\sigma}^1 \leqslant \tilde{\sigma}$ и $(\xi \vee \eta)(\tilde{\sigma}^1) = 1$; отсюда следует, что $\xi(\tilde{\sigma}^1) = 1$ или $\eta(\tilde{\sigma}^1) = 1$; далее, $\xi^+(\tilde{\sigma}) = 1$, или $\eta^+(\tilde{\sigma}) = 1$, и $\xi^+(\tilde{\sigma}) \vee \eta^+(\tilde{\sigma}) = 1$. Эти рассуждения можно провести в обратном порядке, что и доказывает первое равенство. Доказательство остальных отношений аналогично.

Таким образом,

$$g_s = (f \bigvee_{0 \leqslant s'' \leqslant s} \chi(Q_{s''}))^+ = \bigvee_{0 \leqslant s'' \leqslant s} (f\chi(Q_{s''}))^+$$

и

$$g_s \,\&\, \neg\, h_s = \bigvee_{0 \leqslant s'' \leqslant s} (f\chi(Q_{s''}))^+ \,\&\, (f\chi(Q_s))^-.$$

В силу определения множеств Q_s, справедливы следующие утверждения:

1) если $s'' < s$ и $\tilde{\sigma}^1 \in Q_{s''}$, $\tilde{\sigma}^2 \in Q_s$, то $\tilde{\sigma}^1 \not\leqslant \tilde{\sigma}^2$ (т. е. не существует набора $\tilde{\sigma}$ такого, что $\tilde{\sigma}^1 \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \tilde{\sigma}^2$);

2) если $\tilde{\sigma}^1$, $\tilde{\sigma}^2 \in Q_s$ и $\tilde{\sigma}^1 \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \tilde{\sigma}^2$, то $\tilde{\sigma} \in Q_s$;

3) если $\tilde{\sigma}^1$, $\tilde{\sigma}^2 \in Q_s$, $\tilde{\sigma}^1 \leqslant \tilde{\sigma}^2$, то $f(\tilde{\sigma}^1) \leqslant f(\tilde{\sigma}^2)$.

Из первого утверждения следует, что при $s'' < s$

$$(\chi(Q_{s''}))^+ \,\&\, (\chi(Q_s))^- = 0, \tag{1.6}$$

откуда

$$g_s \,\&\, \neg\, h_s = (f\chi(Q_s))^+ \,\&\, (f\chi(Q_s))^-.$$

Из второго утверждения следует равенство

$$(\chi(Q_s))^+ \,\&\, (\chi(Q_s))^- = \chi(Q_s). \tag{1.7}$$

Действительно, пусть функция, представляемая левой частью последнего равенства, равна 1 на наборе $\tilde{\sigma}$; тогда оба члена конъюнкции равны 1, и существуют наборы $\tilde{\sigma}^1$, $\tilde{\sigma}^2$ такие, что $\tilde{\sigma}^1 \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \tilde{\sigma}^2$ и $\chi(Q_s)(\tilde{\sigma}^1) = \chi(Q_s)(\tilde{\sigma}^2) = 1$, т. е. $\tilde{\sigma}^1$, $\tilde{\sigma}^2 \in Q_s$, следовательно, $\tilde{\sigma} \in Q_s$ и $\chi(Q_s)(\tilde{\sigma}) = 1$. Если равна 1 правая часть, то левая часть также равна 1 в силу определения функций ξ^+, ξ^-.

С помощью утверждения 3, подобно тому, как доказывалось равенство (1.7), получаем доказательство равенства

$$(f\chi(Q_s))^+ \,\&\, (f\chi(Q_s))^- = f \,\&\, \chi(Q_s),$$

которое завершает доказательство равенства (1.5).

Получаем следующее представление функции:

$$f = g_0 \vee \bigvee_{s=1}^{M^-[f]} g_s \,\&\, \neg\, h_s, \tag{1.8}$$

где g_0, g_s, h_s — монотонно возрастающие функции, откуда следует

$$L(f) \leqslant M^-[f].$$

Это неравенство совместно с нижней оценкой дает равенство (1.1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Функции $g_{s'}$, h_s из (1.8), определяемые в доказательстве, образуют частично упорядоченное множество, изображенное на рис. 1 (стрелка от узла, соответствующего функции ξ, к узлу, соответствующему функции η, изображает неравенство $\xi < \eta$).

Чтобы убедиться в справедливости этого, установим неравенства

$$(f\chi(Q_{s-1}))^- > (f\chi(Q_s))^-, \tag{1.9a}$$

$$\bigvee_{0\leqslant s''\leqslant s-1} (f\chi(Q_{s''}))^+ < \neg (f\chi(Q_s))^-. \tag{1,9б}$$

Пусть $(f\chi(Q_s))^-(\tilde{\sigma})=1$, тогда существует набор $\tilde{\sigma}^1$ такой, что $\tilde{\sigma}\leqslant\tilde{\sigma}^1$ и $\chi(Q_s)(\tilde{\sigma}^1)=1$, т. е. $\tilde{\sigma}^1\in Q_s$. В силу определения множества Q_s существует набор $\tilde{\sigma}^2$ такой, что $\tilde{\sigma}^1<\tilde{\sigma}^2$ и $\tilde{\sigma}^2\in Q_{s-1}$, $f(\tilde{\sigma}^2)=1$, откуда следует, что $(f\chi(Q_{s-1}))^-(\tilde{\sigma})=1$. Таким образом,

$$(f\chi(Q_{s-1}))^- \geqslant (f\chi(Q_s))^-.$$

Так как на о. и. у. глубины $s-1$ части последнего неравенства различны, то оно может быть заменено строгим неравенством (1.9а). Неравенство (1.9б) следует из (1.6).

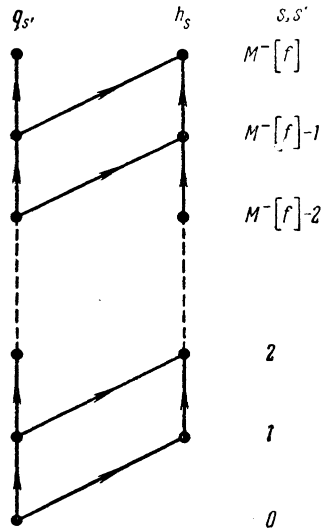


Рис. 1.

Представление (1.8) остается в силе и для $g_{s'}=(f\chi(Q_{s'}))^+$, но при этом нарушается указанная частичная упорядоченность функций $g_{s'}$, h_s.

Замечание 2. Если $f\neq\mathrm{const}$, теорема, как легко видеть, остается справедливой и в базисах, получающихся из $\mathfrak{A}$ исключением одной или обеих констант.

§ 2. Суперпозиции в базисе, в котором $L(y_1\vee y_2)=0$, $L(\neg y)=1$

Рассмотрим базис $\mathfrak{S}$, где $Z(\mathfrak{S})=\{y_1\vee y_2\}$, $E(\mathfrak{S})=\{\neg y\}$, и вес элемента, реализующего инверсию, равен 1.

Теорема 2. *Для суперпозиций в базисе* $\mathfrak{S}$

$$L(n)\sim\frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Нижняя оценка. Применяемый здесь метод получения нижней оценки будет использован также в следующем параграфе, а вводимые понятия используются также в §§ 5, 7.

Будем говорить, что вершина M_v схемы подается в вершину M_w схемы, если либо M_v совпадает с M_w, либо в схеме существует последовательность из λ элементов D_l, $l=1,\ldots,\lambda$, веса 0 (в данном случае элементов, реализующих дизъюнкцию) такая, что вершина M_v совпадает с одним из входов элемента D_1, выход элемента $D_{l'}$ совпадает с одним из входов элемента $D_{l'+1}$, $l'=1,\ldots,\lambda-1$, и выход элемента D_λ совпадает с вершиной M_w *).

Сопоставим всякой схеме $\mathfrak{A}$ граф $Q(\mathfrak{A})$ и систему чисел, приписанных всем его вершинам. Будем называть эти числа индексами вершин.

Граф $Q(\mathfrak{A})$ определим следующим образом. Занумеруем в схеме $\mathfrak{A}$ все элементы из множества E; пусть их имеется h штук, обозначим их через $\varphi_1,\ldots,\varphi_h$. Граф $Q(\mathfrak{A})$ содержит $h+1$ вершину $M_0, M_1,\ldots,M_h$. Вершины M_v, M_w соединим ориентированным ребром $\overrightarrow{(M_v, M_w)}$ при $w\neq 0$ (при $w=0$) тогда и только тогда, когда выход v-го элемента схемы подается

---

*) Термины «вход» и «выход» употребляются здесь и ниже вместо терминов «входной полюс», «выходной полюс», принятых в [3].

на вход w-го элемента (на выход схемы). Очевидно, что в случае, если схема $\mathfrak{A}$ — суперпозиция, граф $Q(\mathfrak{A})$ однозначно определяется заданием некоторого дерева с корнем [3] (получается из дерева ориентацией всех ребер в направлении к корню).

Определим теперь индексы вершин. Занумеруем произвольным образом всевозможные дизъюнкции аргументов из $\widetilde{x}$ числами $1, \ldots, 2^n$. Пусть $\mathfrak{M}_w$ — множество номеров аргументов, приписанных входам схемы, подаваемым на вход элемента φ_v (на выход схемы при $w=0$). Индексом вершины M_w назовем номер дизъюнкции

$$\bigvee_{i \in \mathfrak{M}_w} x_i.$$

Граф $Q(\mathfrak{A})$ и система индексов его вершин однозначно определяют функцию, представляемую исходной суперпозицией $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $S(h, n)$ число функций от n аргументов, реализуемых суперпозициями веса h. Так как число деревьев с корнем, содержащих $h+1$ вершину (и, следовательно, h ребер), не превосходит 4^h (см. [3]), то в силу предыдущего

$$S(h, n) \leqslant 4^h 2^{n(h+1)}.$$

Для того чтобы суперпозициями веса h можно было реализовать любую функцию алгебры логики от n аргументов, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $S(h, n) \geqslant 2^{2^n}$. Решая это неравенство относительно h и заменяя h на $L(n)$, получаем нижнюю оценку.

Верхняя оценка. Обозначим через $\varkappa(\widetilde{y})$ число разрядов в наборе $\widetilde{y}$. Аргументы $\widetilde{x}$ разобьем на 3 группы: $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$, где $\varkappa(\widetilde{x}_1) = k$, $\varkappa(\widetilde{x}_2) = v$, $\varkappa(\widetilde{x}_3) = u$. Конъюнкцию *) $y_1^{\alpha_1} \& \ldots \& y_{\varkappa(\widetilde{y})}^{\alpha_{\varkappa(\widetilde{y})}}$ обозначим через $K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{y})$, где $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\varkappa(\widetilde{y})})$; через $K_{\widetilde{\alpha}}^{-}(\widetilde{y})$ обозначим конъюнкцию всех букв, входящих в $K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{y})$ с инверсиями, т. е. $K_{\widetilde{\alpha}}^{-}(\widetilde{y}) = \underset{\alpha_i=0}{\&} \neg y_i$. Обозначим через $D_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{y})$ дизъюнкцию $y_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee y_{\varkappa(\widetilde{y})}^{\alpha_{\varkappa(\widetilde{y})}}$. Очевидно,

$$K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{y}) = \neg D_{\neg\widetilde{\alpha}}(\widetilde{y})$$

(символ $\neg\widetilde{\alpha}$ обозначает набор, элементы которого суть инверсии соответствующих элементов набора $\widetilde{\alpha}$). Обозначим через $\|\widetilde{\alpha}\|^{-}$ число разрядов набора $\widetilde{\alpha}$, равных 0. Поэтому

$$\|\widetilde{\alpha}\| + \|\widetilde{\alpha}\|^{-} = \varkappa(\widetilde{\alpha}).$$

Опишем одно представление функций. Введем функции

$$f_i(\widetilde{x}) = S_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\, f(\widetilde{x}),$$

где $S_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ — характеристическая функция множества наборов, имеющих норму i, т. е. симметрическая функция с рабочим числом i. Справедливы равенства

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee_{i=0}^{k+v} f_i(\widetilde{x}), \tag{2.1}$$

$$f_i(\widetilde{x}) = S_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \bigvee_{\widetilde{\sigma}_3} K_{\widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_3)\, M_{i, \widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2), \tag{2.2}$$

*) $y^{\alpha} = \begin{cases} y & \text{при } \alpha = 1, \\ \neg y & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$

где

$$M_{i,\widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \bigvee_{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2} f_i(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3) K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1) K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)$$

(можно считать, что в последней формуле $\|\widetilde{\sigma}_1\| + \|\widetilde{\sigma}_2\| = i$, т. е. $\|\widetilde{\sigma}_1\|^- + \|\widetilde{\sigma}_2\|^- = k + v - i$).

Перепишем формулу (2.2) в виде

$$f_i(\widetilde{x}) = \neg \{ \neg S_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \vee \neg [\bigvee_{\widetilde{\sigma}_3} \neg (\neg K_{\widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_3) \vee \neg M_{i,\widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)]\}. \quad (2.3)$$

Далее,

$$M_{i,\widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \bigvee_{j=k-i}^{\min(k,\, k+v-i)} M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2), \quad (2.4)$$

где

$$M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \bigvee_{\|\widetilde{\sigma}_1\|^- = j} K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1) \bigvee_{\|\widetilde{\sigma}_2\|^- = k+v-i-j} f_i(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3) K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2). \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что функцию $M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j}$ можно задать таблицей с двумя входами, имеющей C_k^j строк и $C_v^{k+v-i-j}$ столбцов (таблица 1). Применим

Таблица 1

$\widetilde{x}_1 \backslash \widetilde{x}_2$	$\ldots \quad \widetilde{\sigma}_2 \quad \ldots$	
$\vdots$	$\vdots$	A_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\widetilde{\sigma}_1$	$\ldots\ldots\ldots\; M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j}(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2)$	A_ν
		$\vdots$
		$A_{\left]\frac{C_k^j}{s}\right[}$

к таблице 1 идею разбиения О. Б. Лупанова [3], доставляющего правильное представление функции. Разобьем строки матрицы, определяющей значения функции, на полосы $A_1, \ldots, A_{\left]\frac{C_k^j}{s}\right[}$, содержащие по s строк, кроме, быть может, одной, содержащей меньшее число строк. Столбцы полосы A_r разбиваются на группы одинаковых между собой столбцов, занумеруем эти группы числами $l = 1, \ldots, t(r)$. Обозначим через $M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}$ функцию, совпадающую с $M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j}$ на столбцах l-й группы полосы A_r и равную 0 в остальных случаях. Имеем

$$M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j}=\mathop{\bigvee}_{r=1}^{\left]\frac{C_k^j}{s}\right[}\ \mathop{\bigvee}_{l=1}^{t(r)} M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}. \tag{2.6}$$

Далее,

$$M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}=M^{(1)}_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}(\widetilde{x}_1)\,\&\,M^{(2)}_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}(\widetilde{x}_2), \tag{2.7}$$

где

$$M^{(1)}_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}(\widetilde{x}_1)=\bigvee K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1) \tag{2.8}$$

(дизъюнкция берется по множеству наборов $\widetilde{\sigma}_1$, определяющих строки, соответствующие ненулевым элементам столбцов l-й группы полосы A_r) и

$$M^{(2)}_{i,\widetilde{\sigma}_3,j,r,l}(\widetilde{x}_2)=\bigvee K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2) \tag{2.9}$$

(дизъюнкция берется по множеству наборов $\widetilde{\sigma}_2$, определяющих столбцы l-й группы полосы A_r).

Подстановки формул (2.8), (2.9) в (2.7), (2.7) в (2.6), (2.6) в (2.4), (2.4) в (2.3) и (2.3) в (2.1) дают требуемое представление функции $f(\widetilde{x})$.

Имеем

$$L(\neg K_{\widetilde{\sigma}_3}(\widetilde{x}_3))\leqslant u,$$

$$L(K_{\widetilde{\sigma}_t}(\widetilde{x}_t))=1,\ t=1,\ 2\,*),$$

$$L(M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j})\leqslant\left(\frac{C_k^j}{s}+1\right)((s+3)\,2^s+C_v^{k+v-i-j}),$$

$$L(\neg S_i)\leqslant(k+v)\,2^{k+v},$$

$$L(f)\leqslant(k+v+1)\,[(k+v)\,2^{k+v}+2+(u+2)\,2^u]+$$

$$+\,2^u\sum_{i=0}^{k+v}\ \sum_{j=k-i}^{\min(k,\,k+v-i)} L(M_{i,\widetilde{\sigma}_3,j})\leqslant Cn\,(n2^{k+v}+n^2 2^{s+u}+2^{k+s+u}+2^{v+u})+\frac{2^n}{s},$$

где C — некоторая константа.

Положим $k=3[\log_2 n]$, $u=4[\log_2 n]$, $s=[n-10\log_2 n]$. Тогда $L(n)\lesssim\frac{2^n}{n}$ **). Теорема доказана.

§ 3. Суперпозиции в базисах, в которых $L(y_1\oplus y_2\oplus y_3)=0$ ***), $L(y_1\,\&\,y_2)=1$

Пост показал [9], что существует всего 5 классов линейных функций алгебры логики, замкнутых относительно суперпозиций и содержащих функции более, чем от одного аргумента. Список классов с их базисами приведен в таблице 2.

---

*) Непустая конъюнкция $K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{y})$ представляется в виде инверсии дизъюнкции некоторых аргументов, пустая конъюнкция представляется в виде $y\vee\neg y$.

**) $a\lesssim b$ означает, что $\overline{\lim}\,\frac{a}{b}\leqslant 1$.

***) Символы $\oplus$, $\sum$ обозначают сложение по mod 2.

Таблица 2

Класс	Функции класса	Базис
L_1	Все линейные функции	$y_1 \oplus y_2,\ 1$
L_2	$\sum\limits_{i=1}^{2t} y_i \oplus 1,\quad \sum\limits_{i=1}^{2t+1} y_i$	$y_1 \oplus y_2 \oplus 1$
L_3	$\sum\limits_{i=1}^{t} y_i$	$y_1 \oplus y_2$
L_4	$\sum\limits_{i=1}^{2t+1} y_i$	$y_1 \oplus y_2 \oplus y_3$
L_5	$\sum\limits_{i=1}^{2t+1} y_i \oplus 1,\quad \sum\limits_{i=1}^{2t+1} y_i$	$y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus 1$

Очевидно, что

$$L_4 \subseteq L_j \subseteq L_1, \quad j=1,\ldots,5. \tag{3.1}$$

Рассмотрим базисы Λ_j, $j=1, \ldots, 5$, с множеством $Z(\Lambda_j)$, состоящим из функций, образующих указанный в таблице базис класса L_j и с $E(\Lambda_j) = \{y_1 \& y_2\}$, $L(y_1 \& y_2) = 1$ при $j=1,\ 5$, $E(\Lambda_j) = \{y_1 \& y_2, \neg y\}$, $L(y_1 \& y_2) = L(\neg y) = 1$ при $j=2,\ 3,\ 4$.

Теорема 3. *Для суперпозиций в базисе* Λ_j, $j=1, \ldots, 5$,

$$L(n) \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Обозначим через $L_j(n)$ функцию $L(n)$ в базисе Λ_j. В силу (3.1)

$$L_1(n) \leqslant L_j(n) \leqslant L_4(n), \quad j=1,\ldots,5.$$

Поэтому достаточно получить асимптотически равные нижнюю оценку в базисе Λ_1 и верхнюю оценку в базисе Λ_4.

Доказательству теоремы 3 предпошлем две алгебраические леммы.

Лемма 1. *Для любого n можно так упорядочить все наборы длины n из нулей и единиц, отличные от нулевого набора, что любые n последовательных наборов будут линейно независимы* (относительно сложения по mod 2).

Доказательство. Пусть ξ — первообразный корень поля $GF(2^n)$. Тогда ξ является корнем некоторого неприводимого полинома

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

степени n над $GF(2)$ (и потому не является корнем никакого полинома над $GF(2)$ меньшей степени). Поэтому

$$\xi^n = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \ldots + \alpha_{n-1} \xi^{n-1},$$

и все степени корня ξ выражаются в виде полиномов от ξ (над $GF(2)$) степени не более $n-1$. Пусть

$$\xi^k = \alpha_{k,0} + \alpha_{k,1} \xi + \ldots + \alpha_{k,n-1} \xi^{n-1}.$$

Так как при $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ элементы ξ^k различны, то различны и все наборы $\tilde{\alpha}_k = (\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,n-1})$. Наборы $\tilde{\alpha}_k, \ldots, \tilde{\alpha}_{k+n-1}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n - n$, линейно независимы, так как в противном случае существовала бы линейная зависимость (с теми же коэффициентами) между $\xi^k, \ldots, \xi^{k+n-1}$ и корень ξ являлся бы корнем полинома степени не выше $n-1$, что невозможно.

Следствие. *Для любого n существует множество $n\left[\frac{2^n-1}{n}\right]$ наборов из нулей и единиц длины n, которое можно разбить на $\left[\frac{2^n-1}{n}\right]$ групп по n наборов в каждой группе, такое, что наборы внутри каждой группы линейно независимы.*

Действительно, в k-ю группу наборов, $k=1, \ldots, \left[\frac{2^n-1}{n}\right]$, можно отнести наборы

$$\widetilde{\alpha}_{kn+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{(k+1)n}.$$

Лемма 2. *Пусть $\chi(\widetilde{x})$ — характеристическая функция системы линейно независимых наборов $\widetilde{\sigma}^1, \ldots, \widetilde{\sigma}^n$ длины n. Тогда для любой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}^i}(\widetilde{x})$ существует линейная функция (без свободного члена) $l_i(\widetilde{x})$ такая, что*

$$K_{\widetilde{\sigma}^i}(\widetilde{x}) = \chi(\widetilde{x})\, l_i(\widetilde{x}), \tag{3.2}$$

причем при $i \neq j$

$$\chi(\widetilde{x})\, l_i(\widetilde{x})\, l_j(\widetilde{x}) = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$. Рассмотрим множество наборов $\{\widetilde{e}^1, \ldots, \widetilde{e}^n\}$ длины n, образующих сферу единичного радиуса с центром в нулевом наборе (в $\widetilde{e}^i$ только i-ая компонента равна 1). Обозначим через $\chi_0(\widetilde{x}_0)$ характеристическую функцию этого множества. Очевидно,

$$K_{\widetilde{e}^i}(\widetilde{x}_0) = \chi_0(\widetilde{x}_0)\, x_{0,i}.$$

Пусть теперь аргументы $\widetilde{x}$ получены из аргументов $\widetilde{x}_0$ линейным преобразованием *)

$$\widetilde{x} = A\widetilde{x}_0$$

(сложение по mod 2), где i-м столбцом матрицы A является набор $\widetilde{\sigma}^i$. В силу линейной независимости наборов $\widetilde{\sigma}^1, \ldots, \widetilde{\sigma}^n$ матрица A неособенная. Так как

$$K_{\widetilde{e}^i}(\widetilde{x}_0) = K_{\widetilde{\sigma}^i}(\widetilde{x})$$

и

$$\chi_0(\widetilde{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} K_{\widetilde{e}^i}(\widetilde{x}_0),$$

$$\chi(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} K_{\widetilde{\sigma}^i}(\widetilde{x}),$$

то

$$K_{\widetilde{\sigma}^i}(\widetilde{x}) = \chi(\widetilde{x})\, x_{0,i}.$$

*) Во всем тексте настоящей работы, за исключением нижеследующего доказательства леммы 2, ради удобства, для наборов $\widetilde{x}_{\mathfrak{N}}$, $\widetilde{\sigma}_{\mathfrak{N}}$ принята строчная запись, хотя по существу они являются столбцами, в качестве каковых и фигурируют ниже.

Далее, из $\widetilde{x} = A\widetilde{x}_0$ вытекает

$$x_{0,\,i} = (\widetilde{b}_i,\ \widetilde{x}),$$

где $\widetilde{b}_i$ — i-я строка матрицы A^{-1}, а $(\widetilde{b}_i,\ \widetilde{x})$ — скалярное произведение векторов, т. е. линейная функция. Отсюда следует (3.2). Равенство (3.3) следует из (3.2) в силу того, что при $i \neq j$

$$K_{\widetilde{\sigma}^i}(\widetilde{x})\, K_{\widetilde{\sigma}^j}(\widetilde{x}) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Нижняя оценка для $L(n)$ в базисе Λ_1. Сопоставим всякой схеме $\mathfrak{A}$ граф $Q(\mathfrak{A})$, систему чисел, приписанных его вершинам (индексы вершин), и систему чисел, приписанных его ребрам (индексы ребер).

Граф $Q(\mathfrak{A})$ определим так же, как и в предыдущем параграфе.

Занумеруем входы элемента φ_w числами $m = 1, 2$ (по определению $Q(\mathfrak{A})$ и базиса Λ_1 все элементы φ_w реализуют конъюнкции). Занумеруем произвольным образом всевозможные пары линейных функций от аргументов $\widetilde{x}$ числами $1, \ldots, 2^{2(n+1)}$. Пусть $\mathfrak{M}_{w,\,m}$ — множество номеров аргументов, приписанных входам схемы, подаваемым на m-й вход элемента φ_w. Индексом вершины M_w при $w \neq 0$ назовем номер пары функций

$$\Big(\sum_{i \in \mathfrak{M}_{w,\,1}} x_i,\ \sum_{i \in \mathfrak{M}_{w,\,2}} x_i\Big).$$

Занумеруем произвольным образом всевозможные линейные функции от аргументов $\widetilde{x}$ числами $1, \ldots, 2^{n+1}$. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — множество номеров аргументов, приписанных входам схемы, подаваемым на ее выход. Индексом вершины M_0 назовем номер функции

$$\sum_{i \in \mathfrak{M}_0} x_i.$$

Индексом ребра $\overrightarrow{(M_v, M_w)}$ при $w \neq 0$ назовем номер входа элемента φ_w, на который подается выход элемента φ_v. Ребрам $\overrightarrow{(M_v, M_0)}$ припишем индекс 1.

Граф $Q(\mathfrak{A})$ и системы индексов его вершин и ребер однозначно определяют функцию, представляемую исходной суперпозицией $\mathfrak{A}$.

Имеем (см. предыдущий параграф)

$$S(h,\ n) \leqslant 8^h 2^{2(n+1)h+n+1}.$$

Отсюда, как в предыдущем параграфе, следует нижняя оценка.

Верхняя оценка для $L(n)$ в базисе Λ_4. Аргументы $\widetilde{x}$ разобьем на три группы: $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_2,\ \widetilde{x}_3)$, где

$$\varkappa(\widetilde{x}_1) = s, \quad \varkappa(\widetilde{x}_2) = q = n - s - u, \quad \widetilde{x}_3 = (z_1, \ldots, z_u), \quad u = 2^r.$$

Во множестве ненулевых наборов значений аргументов $\widetilde{x}_1$ выделим систему $\{V_k\}$ непересекающихся групп

$$V_k = \{\widetilde{\sigma}_1^{k,\,1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_1^{k,\,s}\}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{2^s - 1}{s}\right],$$

по s наборов в каждой группе так, чтобы все наборы одной группы были линейно независимы (следствие из леммы 1). Обозначим через $\chi_k(\widetilde{x}_1)$ характеристическую функцию множества V_k и через $l_{k,\,i}(\widetilde{x}_1)$ такую линейную функцию, что $\chi_k(\tilde{x}_1)\, l_{k,i}(\tilde{x}_1) = K_{\tilde{\sigma}_1^{k,i}}(\tilde{x}_1)$ (лемма 2). Оставшиеся наборы, включая нулевой, занумеруем числами t и обозначим через $\tilde{\tau}_t$, $t=1, \ldots, d$, $d \leqslant s$.

Множество наборов значений аргументов $\tilde{x}_3$ разобьем на сферы [5] радиуса 1, занумеруем их числами p и обозначим через $U_p, p=1, \ldots, \frac{2^u}{u}$, центр сферы U_p обозначим через $\tilde{\xi}_p = (\xi_{p,1}, \ldots, \xi_{p,u})$. Характеристическую функцию сферы U_p обозначим через $\psi_p(\tilde{x}_3)$, и пусть $\tilde{\xi}_{p,j} = (\xi_{p,1}, \ldots, \xi_{p,j-1}, \neg\xi_{p,j}, \xi_{p,j+1}, \ldots, \xi_{p,u})$.

Всякая функция алгебры логики $f(\tilde{x})$ представляется в виде

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \sum_{t=1}^{d} K_{\tilde{\tau}_t}(\tilde{x}_1)\, f(\tilde{\tau}_t, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \oplus \sum_{k=1}^{\left[\frac{2^s-1}{s}\right]} \chi_k(\tilde{x}_1)\, \&$$

$$\& \left(\sum_{p=1}^{\frac{2^u}{u}} \psi_p(\tilde{x}_3) \left(\sum_{\tilde{\sigma}_2} K_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{x}_2) \left(\sum_{j=1}^{u} z_j^{\neg\xi_{p,j}} \sum_{i=1}^{s} l_{k,i}(\tilde{x}_1)\, f(\tilde{\sigma}_1^{k,i}, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\xi}_{p,j})\right)\right)\right). \tag{3.4}$$

Введем формулы $A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}$, $B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}$, $C_{k,p,\tilde{\sigma}_2}$:

$$A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} = z_j^{\neg\xi_{p,j}} \oplus \sum_{i=1}^{s} l_{k,i}(\tilde{x}_1)\, f(\tilde{\sigma}_1^{k,i}, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\xi}_{p,\frac{u}{2}+j}),$$

$$B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} = z_{\frac{u}{2}+j}^{\neg\xi_{p,\frac{u}{2}+j}} \oplus \sum_{i=1}^{s} l_{k,i}(\tilde{x}_1)\, f(\tilde{\sigma}_1^{k,i}, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\xi}_{p,j}),$$

$$C_{k,p,\tilde{\sigma}_2} = \sum_{j=1}^{\frac{u}{2}} \sum_{i=1}^{s} l_{k,i}(\tilde{x}_1)\, f(\tilde{\sigma}_1^{k,i}, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\xi}_{p,j})\, f(\tilde{\sigma}_1^{k,i}, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\xi}_{p,\frac{u}{2}+j}).$$

Из (3.3), (3.4) следует

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \sum_{t=1}^{d} K_{\tilde{\tau}_t}(\tilde{x}_1)\, f(\tilde{\tau}_t, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \oplus$$

$$\oplus \sum_{k=1}^{\left[\frac{2^s-1}{s}\right]} \chi_k(\tilde{x}_1) \left(\sum_{p=1}^{\frac{2^u}{u}} \psi_p(\tilde{x}_3) \left(\sum_{\tilde{\sigma}_2} K_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{x}_2) \left(C_{k,p,\tilde{\sigma}_2} \oplus \sum_{j=1}^{\frac{u}{2}} A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}\right)\right)\right). \tag{3.5}$$

Преобразуем выражение (3.5) так, чтобы играющие основную роль линейные функции $A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}$, $B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}$ перешли в линейные функции из L_4. Пусть δ — произвольный оператор, т. е. отображение множества функций алгебры логики в себя. Введем формулу

$$D^{(\delta)}_{k,p,\tilde{\sigma}_2} = \sum_{j=1}^{\frac{u}{2}} [\delta(A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j})(B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} \oplus \delta(B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j})) \oplus$$

$$\oplus\, \delta(B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j})(A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} \oplus \delta(A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j})) \oplus \delta(A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j})\, \delta(B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j})].$$

Из (3.5) следует

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \sum_{t=1}^{d} K_{\tilde{\tau}_t}(\tilde{x}_1) f(\tilde{\tau}_t, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \oplus$$

$$\oplus \sum_{k=1}^{\left[\frac{2^s-1}{s}\right]} \chi_k(\tilde{x}_1) \Big(\sum_{p=1}^{\frac{2^u}{u}} \psi_p(\tilde{x}_3) \Big(\sum_{\tilde{\sigma}_2} K_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{x}_2) \Big(C_{k,p,\tilde{\sigma}_2} \oplus D^{(\delta)}_{k,p,\tilde{\sigma}_2} \oplus$$

$$\oplus \sum_{j=1}^{\frac{u}{2}} (A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} \oplus \delta(A_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}))\ (B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j} \oplus \delta(B_{k,p,\tilde{\sigma}_2,j}))\Big)\Big)\Big).$$

Введем оператор δ, преобразующий всякую функцию в линейную функцию от одного аргумента:

$$\delta(\varphi) = \varphi(\tilde{0}) \oplus x(\varphi(\tilde{1}) \oplus \neg\varphi(\tilde{0})),$$

где x — некоторый аргумент из $\tilde{x}$. Тогда

$$D^{(\delta)}_{k,p,\tilde{\sigma}_2} = x l^1_{k,p,\tilde{\sigma}_2} \oplus l^2_{k,p,\tilde{\sigma}_2},$$

где $l^1_{k,p,\tilde{\sigma}_2}$, $l^2_{k,p,\tilde{\sigma}_2}$ — линейные функции. Если φ — линейная функция, то

$$\varphi \oplus \delta(\varphi) \in L_4.$$

Очевидно,

$$L(K_{\tilde{\tau}_t}(\tilde{x}_1)) < 2s, \quad L(f(\tilde{\tau}_t, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)) \leqslant (q+u)\, 2^{q+u+1}, \quad L(\chi_k(\tilde{\sigma}_1)) < Cs^2,$$

$$L(\psi_p(\tilde{x}_3)) < Cu^2, \qquad L(K_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{x}_2)) < 2q, \qquad L(D^{(\delta)}_{k,p,\tilde{\sigma}_2}) \leqslant C',$$

где C, C' — некоторые константы.

Имеем

$$L(n) < L(0) + d.(2s + 1 + (q+u)\, 2^{q+u+1}) +$$
$$+ \frac{2^s}{s}\Big\{Cs^2 + 1 + \frac{2^u}{u}\Big(Cu^2 + 1 + 2^q\Big(2q + 3 + C' + \frac{u}{2}\Big)\Big)\Big\}.$$

Положим $r = [\log_2 \log_2 n] + 3$, $q = 2[\log_2 \log_2 n]$, $s = n - q - u$; тогда $L(n) \leqslant \frac{2^{n-1}}{n}$.

Теорема доказана.

§ 4. Контактно-вентильные схемы

Рассмотрим двухполюсные контактно-вентильные схемы, реализующие функции алгебры логики как проводимости от входного полюса к выходному.

Обозначим через $\tilde{L}(n)$ минимальное число такое, что всякую функцию алгебры логики от n аргументов можно реализовать некоторой контактно-вентильной схемой, содержащей $\tilde{L}(n)$ контактов. Число $\tilde{L}(n)$ можно рассматривать как функцию Шеннона в базисе с весом вентилей, равным 0, и весом контактов, равным 1.

Известны оценки

$$\frac{1}{2}\, 2^{n/2} \leqslant \tilde{L}(n) \leqslant \begin{cases} 2 \cdot 2^{n/2} & \text{при } n \text{ четном}, \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 2^{n/2} & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Нижняя оценка доказана в [4], верхняя следует из [4] при уточнении, получаемом с помощью теоремы 1 в [5].

Улучшенные оценки дает следующая

Теорема 4.

$$2^{n/2} \leqslant \widetilde{L}(n) \leqslant 2 \cdot 2^{n/2}.$$

Доказательство. Нижняя оценка. Занумеруем в схеме все узлы числами α и все ребра числами β; будем обозначать узел с номером α через M_α, ребро с номером β через R_β; концы ребра R_β обозначим через $\varrho_{\beta,1}$, $\varrho_{\beta,2}$. Пусть $\varrho_{\beta,1} = M_{\alpha_{\beta,1}}$, $\varrho_{\beta,2} = M_{\alpha_{\beta,2}}$. Назовем *цепью длины* s, $1 \leqslant s$, упорядоченную последовательность ребер $(R_{\beta_1}, \ldots, R_{\beta_s})$ такую, что $\varrho_{\beta_{l'},2} = \varrho_{\beta_{l'+1},1}$, где $1 \leqslant l' \leqslant s-1$. Узел $\varrho_{\beta_1,1}$ назовем *входом цепи*, узел $\varrho_{\beta_s,2}$ назовем *выходом цепи*. Будем говорить, что цепь проходит через ребро R_{β_l} в направлении от узла $\varrho_{\beta_l,1}$ к узлу $\varrho_{\beta_l,2}$. Назовем *проводимостью цепи* конъюнкцию проводимостей всех ребер цепи, при этом проводимость каждого ребра берем в том направлении, в котором цепь проходит через ребро.

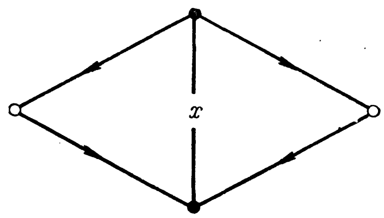


Рис. 2.

Вместо каждого контакта произведем подстановку схемы, изображенной на рис. 2. Полученная схема эквивалентна исходной, но в ней все цепи с проводимостью, отличной от 0, могут проходить через контакты только в одном направлении; соответственно этому один конец каждого контакта назовем его *входом*, другой — *выходом*. Пусть схема содержит h контактов, один из которых является «источниковым» [10]. Занумеруем контакты числами $1, \ldots, h$. Проводимость схемы однозначно определяется наименованиями контактов и квадратной матрицей $\boldsymbol{B} = \{b_v^w\}$, где $b_v^w = 1$, если в схеме имеется цепь с проводимостью 1 (проходящая через вентили) от выхода v-го контакта к входу w-го контакта, в противном случае $b_v^w = 0$. Всегда $b_v^v = 1$. Обозначим через $S(h, n)$ число различных функций от n аргументов, которые могут быть реализованы всевозможными двухполюсными контактно-вентильными схемами, содержащими h контактов (считая источниковый контакт). В силу вышеизложенного

$$S(h, n) \leqslant (2n)^{h-1} 2^{h^2-h}.$$

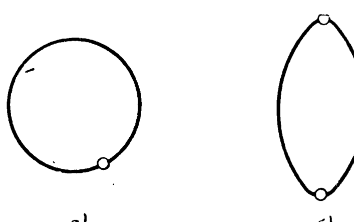


Рис. 3.

Отсюда, как в § 2, следует нижняя оценка.

Верхняя оценка. При n четном верхняя оценка содержится в (4.1). Пусть n — нечетное. Идея, излагаемая ниже, будет использована во всех последующих параграфах.

Пусть H — неориентированный граф*), не содержащий подграфов, изображенных на рис. 3, в силу чего каждое ребро однозначно определяется заданием пары инцидентных ему узлов.

Пусть граф H имеет μ узлов, занумеруем их числами $\alpha = 1, \ldots, \mu$ и обозначим через K_α ребро с номером α. Пусть граф H имеет также

*) Граф H играет вспомогательную роль и, вообще говоря, не связан с графом синтезируемой схемы.

ν ребер и пусть $\theta(\alpha_1, \alpha_2)$ — бинарная функция, равная 1, если существует ребро $(K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2})$ (т. е. ребро, инцидентное с узлами $K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}$), и равная 0 в противном случае (функцию $\theta(\alpha_1, \alpha_2)$ иногда называют *отношением инциденции узлов*). Пусть, далее, $\{h_\beta\}$, $\beta = 1, \ldots, \nu$, — система попарно ортогональных функций алгебры логики, т. е. таких функций, что $h_{\beta_1} h_{\beta_2} = 0$ при $\beta_1 \neq \beta_2$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех ребер графа H и множеством функций $\{h_\beta\}$. Пусть ребру $(K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2})$ сопоставлена функция $h_{\beta_{\alpha_1, \alpha_2}}$, $1 \leqslant \beta_{\alpha_1, \alpha_2} \leqslant \nu$; положим

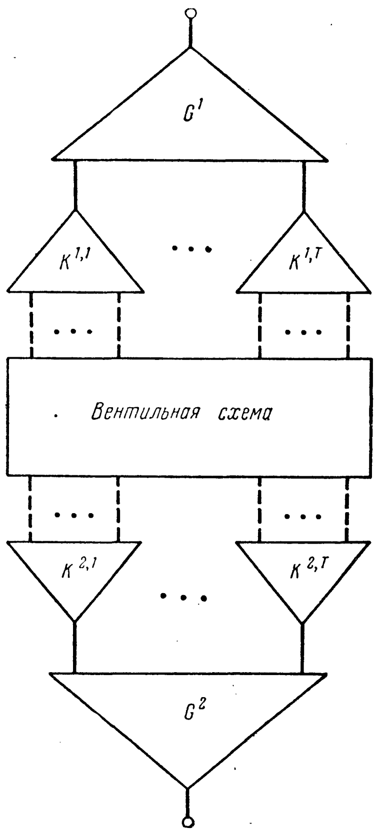


Рис. 4.

$$g_\alpha = \bigvee_{\substack{\alpha'=1 \\ (\theta(\alpha, \alpha')=1)}}^{\mu} h_{\beta_{\alpha, \alpha'}}.$$

Функцию g_α назовем *связанной с узлом* K_α. Очевидно,

$$g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ h_{\beta_{\alpha_1, \alpha_2}}, & \text{если } \theta(\alpha_1, \alpha_2) = 1. \end{cases}$$

Аргументы набора $\widetilde{x}$ длины $n = 2r + 2t + 1$ разобьем на 3 группы: $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_{1,1}, \widetilde{x}_{1,2}, \widetilde{x}_2)$, где $\varkappa(\widetilde{x}_{1,p}) = r$, $p = 1, 2$, $\varkappa(\widetilde{x}_2) = 2t + 1$. В качестве множества $\{h_\beta\}$ возьмем множество из 2^{2t+1} всевозможных конъюнкций $K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)$. Пусть граф H имеет $2T$ узлов $T =]2^{\frac{2t+1}{2}}[$, образующих две группы по T узлов, и ребра (2^{2t+1} штук) имеются только между узлами из разных групп. Занумеруем группы узлов числами $p = 1, 2$, и все узлы p-й группы занумеруем парами (p, q), где $q = 1, \ldots, T$. Введем функцию $\theta(p, q, p', q')$, равную 1 тогда и только тогда, когда существует ребро между узлами с номерами (p, q), (p', q'). Обозначим через $g_{p,q}$ функцию, связанную с узлом, имеющим номер (p, q). Для пар (p, q), (p', q') таких, что $\theta(p, q, p', q') = 1$, введем набор, обозначаемый через $\widetilde{\sigma}_2(p, q, p', q')$, который определяется равенством

$$K_{\widetilde{\sigma}_2(p, q, p', q')}(\widetilde{x}_2) = g_{p,q} g_{p',q'}.$$

Тогда

$$f(x) = \bigvee_{\substack{q, q', \widetilde{\sigma}_{1,1}, \widetilde{\sigma}_{1,2} \\ (\theta(1, q, 2, q')=1)}} g_{1,q}(\widetilde{x_2})\, K_{\widetilde{\sigma}_{1,1}}(\widetilde{x}_{1,1})\, g_{2,q'}(\widetilde{x}_2) K_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}(\widetilde{x}_{1,2})\, f(\widetilde{\sigma}_{1,1}, \widetilde{\sigma}_{1,2}, \widetilde{\sigma}_2(1, q, 2q')). \quad (4.2)$$

Схема для $f(\widetilde{x})$ (рис. 4) строится из двух контактных схем T^1, T^2 и вентильной схемы, соединяющей в соответствии с (4.2) выходы схемы T^1 со входами схемы T^2. Схема T^p, $p = 1, 2$, реализует функции $g_{p,q}(\widetilde{x}_2) K_{\widetilde{\sigma}_{1,p}}(\widetilde{x}_{1,p})$ и состоит из схемы G^p над $\widetilde{x}_p$, реализующей функции

$g_{p,q}$ (полученной из дихотомического контактного дерева) и T тождественных схем $K^{p,q}$, реализующих каждая все конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}_{1,p}}(\widetilde{x}_{1,p})$ (асимптотически по 2^r контактов [4]). Вход (выход) схемы $K^{1,q}$ (схемы $K^{2,q}$) соединяем с выходом (входом) схемы G^1 (схемы G^2), соответствующим функции $g_{1,q}$ (функции $g_{2,q}$). Положим r, $t \to \infty$, тогда $L(n) \leqslant 2 \cdot 2^{n/2}$.

Теорема доказана.

Замечание. Граф, получающийся из данной схемы заменой всех контактов на неориентированные ребра (т. е. замыканием всех контактов), назовем *остовом схемы*, аналогично определим *остов цепи*. Назовем цепь $(R_{\beta_1}, \ldots, R_{\beta_s})$ *самонепересекающейся*, если $M_{\alpha_{\beta_{l_1},p}} \neq M_{\alpha_{\beta_{l_2},p}}$ при $l_1 \neq l_2$, $p=1, 2$. Самонепересекающуюся цепь с совпадающими входом и выходом назовем *циклом*. Если схема не содержит циклов, остовы которых имеют проводимость 1, то при соответствующей нумерации контактов матрица $\boldsymbol{B}$ будет треугольной. В этом случае нижняя оценка для $\widetilde{L}(n)$ повышается до $\sqrt{2} \cdot 2^{n/2}$.

§ 5. Схемы в базисе, в котором $L(y_1 \vee y_2) = 0$, $L(\neg y) = 1$ *)

Теорема 5. *Для схем в базисе* $\mathfrak{S}$

$$L(n) \sim \sqrt{2} \cdot 2^{n/2}.$$

Доказательство. Нижняя оценка. Применяемый здесь метод получения нижней оценки будет использован также в § 7.

При определении функции, реализуемой схемой, определяются функции, приписываемые вершинам схемы (см. [3]). Будем говорить, что элемент или блок схемы выдает функцию, которая приписана его выходу. Будем говорить, что в вершину подается некоторая функция, подразумевая под этим, что в вершину подается некоторая вершина, которой приписана данная функция.

Как в § 2, определим для всякой схемы $\mathfrak{A}$ граф $Q(\mathfrak{A})$ и систему индексов его вершин, однозначно определяющие функцию, реализуемую схемой $\mathfrak{A}$. Пусть схема имеет вес h, т. е. содержит h элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$, реализующих инверсию. Граф $Q(\mathfrak{A})$ определяется матрицей $\boldsymbol{B} = \{b_v^w\}_{\substack{v=1,\ldots,h \\ w=0,1,\ldots,h}}$, в которой $b_v^w = 1$ тогда и только тогда, когда в графе $Q(\mathfrak{A})$ имеется ребро $\overrightarrow{(M_v, M_w)}$. При надлежащей нумерации элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ матрица $\boldsymbol{B}' = \{b_v^w\}_1^h$ — треугольная.

Обозначим через $S(h, n)$ число различных функций, которые могут быть реализованы всевозможными схемами веса h. В силу вышеизложенного,

$$S(h, n) \leqslant 2^{\frac{h(h-1)}{2}} 2^h 2^{n(h+1)}.$$

Отсюда следует нижняя оценка.

Верхняя оценка. Ввиду некоторой сложности метода синтеза, доставляющего верхнюю оценку, асимптотически равную нижней, разобьем изложение на 3 пункта; в первых двух пунктах приведем более простые методы синтеза, дающие более грубые верхние оценки.

I. Аргументы набора $\widetilde{x}$ длины n разобьем на 2 группы: $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$, где $\varkappa(\widetilde{x}_1) = r$, $\varkappa(\widetilde{x}_2) = n - r$.

*) Под термином «схема» здесь и в дальнейшем подразумевается схема из функциональных элементов в смысле определения из [3].

Легко, показать, что

$$f(\widetilde{x})=\bigvee_{\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2} K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)\,K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)\,f(\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2)=$$

$$=\bigvee_{\widetilde{\sigma}_2}\neg\,[D_{\neg\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)\vee\neg\bigvee_{\widetilde{\sigma}_1}K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)\,f(\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2)]=$$

$$=\bigvee_{\widetilde{\sigma}_2}\neg\,(D_{\neg\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)\vee\bigvee_{\widetilde{\sigma}_1}K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)\neg\,f(\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2)]$$

и, следовательно,

$$f(\widetilde{x})=\bigvee_{\widetilde{\sigma}_2}\neg\,[D_{\neg\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)\vee\bigvee_{\substack{\widetilde{\sigma}_1\\(f(\widetilde{\sigma}_1,\,\widetilde{\sigma}_2)=0)}}\neg\,D_{\neg\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)].\tag{5.1}$$

Схема для $f(\widetilde{x})$ строится следующим образом. n элементов веса 1 выдают функции $\neg\,x_i$, $i=1,\ldots,n$. Занумеруем 2^r элементов, реализующих инверсию, наборами $\widetilde{\sigma}_1$, обозначим эти элементы символами $I^1_{\widetilde{\sigma}_1}$. На вход каждого элемента $I^1_{\widetilde{\sigma}_1}$ подадим дизъюнкцию $D_{\neg\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)$, элементы $I^1_{\widetilde{\sigma}_1}$ выдают все функции $K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)$.

Занумеруем 2^{n-r} элементов, реализующих инверсию, наборами $\widetilde{\sigma}_2$, обозначим эти элементы символами $I^2_{\widetilde{\sigma}_2}$. На вход элемента $I^2_{\widetilde{\sigma}_2}$ подаем дизъюнкцию $D_{\neg\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)$ и все функции $K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)$ такие, что $f(\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2)=0$. В силу (5.1) элемент $I^2_{\widetilde{\sigma}_2}$ выдает функцию $K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)\,f(\widetilde{x}_1,\widetilde{\sigma}_2)$. Выходы всех элементов $I^2_{\widetilde{\sigma}_2}$ подаем на выход схемы; в силу (5.1) построенная схема реализует функцию $f(\widetilde{x})$.

Таким образом,

$$L(n)\leqslant n+2^r+2^{n-r}.$$

Положим $r=\left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда

$$L(n)\lesssim\begin{cases}2\cdot 2^{n/2} & \text{при } n \text{ четном},\\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot 2^{n/2} & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Данный метод синтеза подобен методу синтеза контактно-вентильных схем в [4].

II. Аргументы набора $\widetilde{x}$ длины $n=2r+2t+1$ разобьем на группы: $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_{1,1},\widetilde{x}_{1,2},\widetilde{x}_2)$, где $\varkappa(\widetilde{x}_{1,p})=r$, $p=1,2$, $\varkappa(\widetilde{x}_2)=2t+1$. Как в предыдущем параграфе, введем множество $\{h_\beta\}$, граф H, функцию $\theta(p,q,p',q')$, функции $g_{p,q}$ и наборы $\widetilde{\sigma}_2(p,q,p',q')$.

Перепишем (4.2) в виде

$$f(\widetilde{x})=\bigvee_{q'}g_{2,q'}(\widetilde{x}_2)\bigvee_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}K_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}(\widetilde{x}_{1,2})\bigvee_{\substack{q,\,\widetilde{\sigma}_{1,1}\\(\theta(1,\,q,\,2,\,q')=1)}}g_{1,q}(\widetilde{x}_2)K_{\widetilde{\sigma}_{1,1}}(\widetilde{x}_1)f[\widetilde{\sigma}_{1,1},\widetilde{\sigma}_{1,2},\widetilde{\sigma}_2(1,q,2,q')]=$$

$$=\bigvee_{q'}g_{2,q'}(\widetilde{x}_2)\bigvee_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}\neg\,[D_{\neg\widetilde{\sigma}_{1,2}}(\widetilde{x}_{1,2})\vee\neg\bigvee_{\substack{q,\,\widetilde{\sigma}_{1,1}\\(\theta(1,\,q,\,2,\,q')=1)}}g_{1,q}(\widetilde{x}_2)\,\&$$

$$\&\,K_{\widetilde{\sigma}_{1,1}}(\widetilde{x}_1)\,f[\widetilde{\sigma}_{1,1},\widetilde{\sigma}_{1,2},\widetilde{\sigma}_2(1,q,2,q')]],$$

откуда

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee_{q'} g_{2,\,q'}(\widetilde{x}_2) \bigvee_{\widetilde{\sigma}_{1,2}} \neg\,[D_{\neg\widetilde{\sigma}_{1,2}}(\widetilde{x}_{1,2}) \vee$$

$$\vee \bigvee_{\substack{q,\ \widetilde{\sigma}_{1,1} \\ \theta(1,\,q,\,2,\,q')=1 \\ \left(f\,[\widetilde{\sigma}_{1,1},\ \widetilde{\sigma}_{1,2},\ \widetilde{\sigma}_2(1,\,q,\,2,\,q')]=0\right)}} \neg\,(D_{\neg\widetilde{\sigma}_{1,1}}(\widetilde{x}_{1,1}) \vee \neg\, g_{1,\,q}(\widetilde{x}_2))]. \qquad (5.2)$$

Схема для $f(\widetilde{x})$ (рис. 5) строится следующим образом. n элементов веса 1 выдают функции $\neg\, x_i$, $i=1,\ldots,n$. Затем с использованием лишь

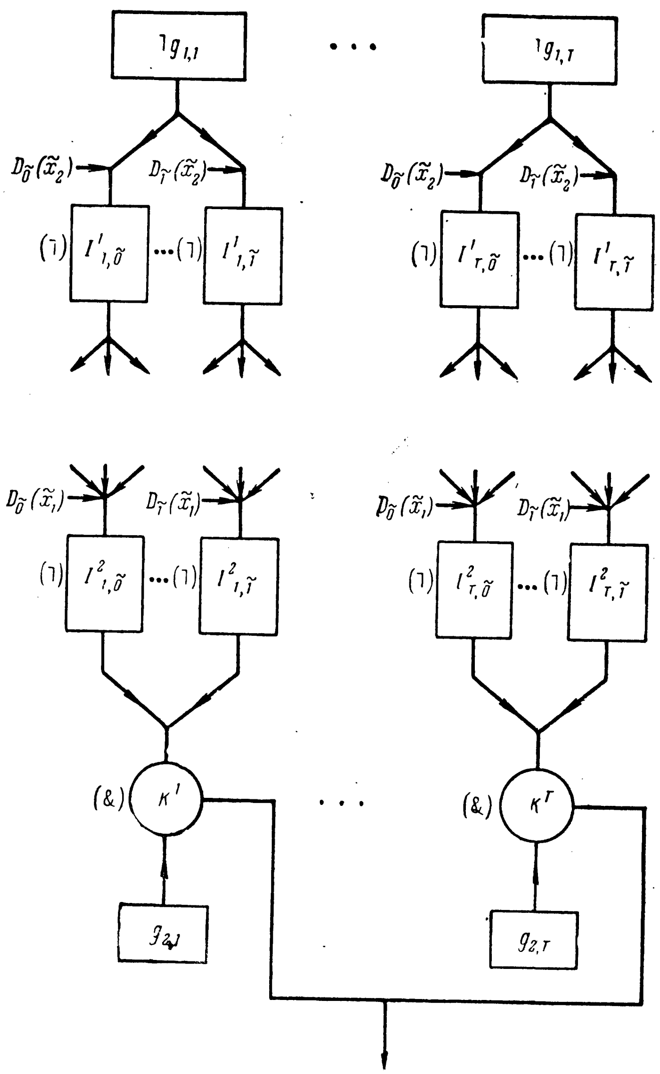


Рис. 5.

элементов веса 0 реализуются дизъюнкции $D_{\neg\widetilde{\sigma}_2(1,\,q,\,2,\,q')}(\widetilde{x}_2)$. Далее с помощью 2^{2^t+1} элементов для инверсии реализуются функции $\neg\, D_{\neg\widetilde{\sigma}_2(1,\,q,\,2,\,q')}(\widetilde{x}_2)$ и с использованием элементов веса 0 — функции

$g_{1,q}(\widetilde{x}_2)$ и $g_{2,q'}(\widetilde{x}_2)$ и, наконец, с использованием T элементов для инверсии, функции $\neg g_{1,q}(\widetilde{x}_2)$:

$$\neg g_{1,q}(\widetilde{x}_2) = \neg \bigvee_{\substack{q'=1\\(\theta(1,\,q,\,2,\,q')=1)}}^{T} \neg D_{\neg\widetilde{\sigma}_2(1,\,q,\,2,\,q')}(\widetilde{x}_2),$$

$$g_{2,q'}(\widetilde{x}_2) = \bigvee_{\substack{q=1\\(\theta(1,\,q,\,2,\,q')=1)}}^{T} \neg D_{\neg\widetilde{\sigma}_2(1,\,q,\,2,\,q')}(\widetilde{x}_2).$$

Занумеруем $T\cdot 2^r$ элементов, реализующих инверсию, парами $(q', \widetilde{\sigma}_{1,1})$, $1\leqslant q\leqslant T$; обозначим эти элементы символами $I^{1,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,1}}$. Занумеруем также еще $T\cdot 2^r$ элементов, реализующих инверсию, парами $(q', \widetilde{\sigma}_{1,2})$; обозначим эти элементы символами $I^{2,q'}_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}$. Образуем T блоков, каждый из которых реализует конъюнкцию (рис. 6), занумеруем их числами q' и обозначим символами $K^{q'}$. Соединение элементов производим в соответствии с формулой (5.2). На вход каждого элемента $I^{1,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,1}}$ подаем дизъюнкцию $D_{\neg\widetilde{\sigma}_{1,1}}(\widetilde{x}_{1,1})$ и функцию $\neg g_{1,q}(\widetilde{x}_2)$. На вход каждого элемента $I^{2,q'}_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}$ подаем дизъюнкцию $D_{\neg\widetilde{\sigma}_{1,2}}(\widetilde{x}_{1,2})$, а также выходы всех элементов $I^{1,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,1}}$ таких, что $\theta(1, q, 2, q')=1$, $f[\widetilde{\sigma}_{1,1}, \widetilde{\sigma}_{1,2}, \widetilde{\sigma}_2(1, q, 2, q')]=0$. Выходы всех элементов $I^{2,q'}_{\widetilde{\sigma}_{1,2}}$ при фиксированном q' подаем на один из входов блока $K^{q'}$, на другой вход которого подаем функцию $g_{2,q'}(\widetilde{x}_2)$. Выходы всех блоков $K^{q'}$ подаем на выход схемы.

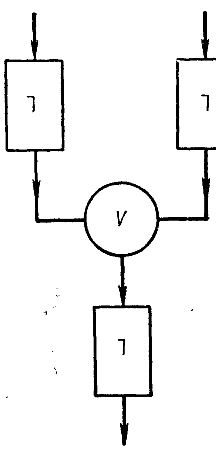


Рис. 6.

Из построения схемы следует, что

$$L(n) \leqslant n + 2T2^r + 4T + 2^{2^{t+1}}.$$

Положим $t \longrightarrow \infty$, $n - 4t \longrightarrow \infty$. Тогда $L(n) \leqslant 2\cdot 2^{n/2}$.

III. Аргументы набора $\widetilde{x}$ длины $n = 2kr + t$ разобьем на группы: $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$, где $\widetilde{x}_1 = (\widetilde{x}_{1,1}, \ldots, \widetilde{x}_{1,2k})$, $\varkappa(\widetilde{x}_{1,p}) = r$, $p=1, \ldots, 2k$, $\varkappa(\widetilde{x}_2) = t$.

В качестве множества $\{h_\beta\}$ возьмем множество из 2^t всевозможных конъюнкций $K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)$. Пусть граф H имеет $2k$ групп узлов по

$$T = \left]\frac{2^{t/2}}{\sqrt{k(2k-1)}}\right[$$

узлов в каждой группе и 2^t ребер, причем ребра имеются только между узлами из разных групп. Занумеруем группы узлов числами $p=1, \ldots, 2k$ и все узлы p-й группы занумеруем парами (p, q), где $q=1, \ldots, T$. Как в предыдущем параграфе, введем функции $\theta(p, q, p', q')$, $g_{p,q}$ и наборы $\widetilde{\sigma}_2(p, q, p', q')$.

Введем функции $V_{p,q,p',q'}$, $V^{+}_{p,p',q}$, $V^{-}_{p,p',q}$:

$$V_{p,q,p',q'} = g_{p,q}\, g_{p',q'} = \begin{cases} K_{\widetilde{\sigma}_2(p,\,q,\,p',\,q')}(\widetilde{x}_2) & \text{при } \theta(p, q, p', q') = 1, \\ 0 & \text{при } \theta(p, q, p', q') = 0; \end{cases}$$

$$V^+_{p,\,p',\,q}=\bigvee_{q'} V_{p,\,q,\,p',\,q'} \qquad \text{для} \quad 1\leqslant p<2k,\ p<p';$$
$$V^-_{p,\,p',\,q}=\bigvee_{q'} V_{p,\,q,\,p',\,q'} \qquad \text{для} \quad 1< p\leqslant 2k,\ p'<p.$$

В силу ортогональности функций $V_{p_1,\,q_1,\,p_1',\,q_1'}$, $V_{p_2,\,q_2,\,p_2',\,q_2'}$ с различными системами индексов,

$$V^+_{p,\,p',\,q}V^-_{p_1',\,p_1,\,q'}=\begin{cases} V_{p,\,q,\,p',\,q'} & \text{при}\quad (p_1,\ p_1')\equiv(p,\ p'),\\ 0 & \text{при}\quad (p_1,\ p_1')\not\equiv(p,\ p').\end{cases} \tag{5.3}$$

Удалим из системы $\tilde{x}_1=(\tilde{x}_{1,\,1},\,\ldots,\,\tilde{x}_{1,\,2k})$ группы $\tilde{x}_{1,\,p}$, $\tilde{x}_{1,\,p'}$, $p<p'$, остальные группы произвольным образом распределим в две подсистемы по $k-1$ групп; обозначим их через $\mathfrak{M}^+_{p,\,p'}$, $\mathfrak{M}^-_{p',\,p}$. Наборы значений их аргументов будем обозначать через $\tilde{\omega}_{p,\,p'}$, $\tilde{\omega}_{p',\,p}$ или просто через $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ в тех случаях, когда либо очевидно, к какой подсистеме относится данный набор, либо когда наборы $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ относятся к нескольким подсистемам. В дальнейшем будем иногда опускать также указание аргументов у функций ради упрощения записи формул.

При фиксированных p, p' между наборами $\tilde{\sigma}_1$ и системами наборов $(\tilde{\omega}_{p,\,p'},\ \tilde{\omega}_{p',\,p},\ \tilde{\sigma}_{1,\,p},\ \tilde{\sigma}_{1,\,p'})$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством

$$K_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{x}_1)=K_{\tilde{\omega}_{p,\,p'}}(\mathfrak{M}^+_{p,\,p'})\,K_{\tilde{\omega}_{p',\,p}}(\mathfrak{M}^-_{p',\,p})\,K_{\tilde{\sigma}_{1,\,p}}(\tilde{x}_{1,\,p})\,K_{\tilde{\sigma}_{1,\,p'}}(\tilde{x}_{1,\,p'}).$$

Функция $f(\tilde{x})$ представляется в виде

$$f(\tilde{x})=\bigvee_{\substack{p,\,p',\,q,\,q',\,\tilde{\omega},\,\tilde{\omega}',\,\tilde{\sigma}_{1,\,p},\,\tilde{\sigma}_{1,\,p'}\\ \left(\substack{1\leqslant p<2k\\ 1<p'\leqslant 2k\\ p<p'\\ \theta(p,\,q,\,p',\,q')=1}\right)}} [K_{\tilde{\omega}'}(\mathfrak{M}^-_{p',\,p})\,V^-_{p',\,p,\,q'}K_{\tilde{\sigma}_{1,\,p'}}]\,\&$$
$$\&\,[K_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{M}^+_{p,\,p'})\,V^+_{p,\,p',\,q}K_{\tilde{\sigma}_{1,\,p}}]\,\&\,f\,[\tilde{\sigma}_1(\tilde{\omega},\,\tilde{\omega}',\,\tilde{\sigma}_{1,\,p},\,\tilde{\sigma}_{1,\,p'}),\ \tilde{\sigma}_2(p,\ q,\ p',\ q')]. \tag{5.4}$$

Здесь через $\tilde{\sigma}_1(\tilde{\omega},\ \tilde{\omega}',\ \tilde{\sigma}_{1,\,p},\ \tilde{\sigma}_{1,\,p'})$ обозначен набор, сопоставляемый системе $(\tilde{\omega}_{p,\,p'},\ \tilde{\omega}_{p',\,p},\ \tilde{\sigma}_{1,\,p},\ \tilde{\sigma}_{1,\,p'})$ при данных p, p' по указанному взаимно однозначному соответствию. В дальнейшем вместо $f\,[\tilde{\sigma}_1(\tilde{\omega},\tilde{\omega}',\tilde{\sigma}_{1,\,p},\tilde{\sigma}_{1,\,p'}),\ \tilde{\sigma}_2(p,\ q,\ p',\ q')]$ будем иногда писать просто $f\,[\tilde{\sigma}_1,\ \tilde{\sigma}_2]$.

Опишем еще одно представление функций, которое будет использовано при построении схем.

Введем функции

$$U^+_{p,\,p',\,q,\,\tilde{\omega}}=(\neg\,K_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{M}^+_{p,\,p'}))\,V^+_{p,\,p',\,q} \qquad \text{для} \quad 1\leqslant p<2k,\ p<p';$$
$$U^-_{p,\,p',\,q,\,\tilde{\omega}}=K_{\tilde{\omega}}(\mathfrak{M}^-_{p,\,p'})\,V^-_{p,\,p'\,q} \qquad \text{для} \quad 1<p\leqslant 2k,\ p'<p;$$
$$W^+_{p,\,q,\,\tilde{\omega}}=\bigvee_{\substack{p''\\(p<p'')}} U^+_{p,\,p'',\,q,\,\tilde{\omega}};$$
$$W^-_{p,\,q,\,\tilde{\omega}}=\bigvee_{\substack{p''\\(p''<p)}} U^-_{p,\,p'',\,q,\,\tilde{\omega}};$$
$$F_{p,\,q}=\mathop{\&}_{\substack{p'\\(p<p')}}(\neg\,V^+_{p,\,p',\,q})\ \mathop{\&}_{\substack{p'\\(p'<p)}}(\neg\,V^-_{p,\,p',\,q})=\bigvee_{\substack{p_1,\,q_1,\,p_1',\,q_1'\\ \left(\substack{(p_1,\,q_1)\not\equiv(p,\,q)\\ (p_1',\,q_1')\not\equiv(p,\,q)}\right)}} V_{p_1,\,q_1,\,p_1',\,q_1'}.$$

Функция $f(\widetilde{x})$ представляется в виде

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee_{p',\, q',\, \widetilde{\omega}'} W^{-}_{p',\, q',\, \widetilde{\omega}'} \,\&\, \bigvee_{\widetilde{\sigma}_1,\, p'} \{\neg\, [D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\, p'} \vee W^{+}_{p',\, q',\, \widetilde{\omega}'} \vee F_{p',\, q'} \vee$$
$$\vee \bigvee_{\substack{p,\, q,\, \widetilde{\sigma}_1,\, p,\, \widetilde{\omega} \\ p<p' \\ \left(\theta(p,\, q,\, p',\, q')=1 \atop f[\widetilde{\sigma}_1,\, \widetilde{\sigma}_2]=0\right)}} \neg\, (D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\, p} \vee W^{+}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega}} \vee F_{p,\, q})]\}. \quad (5.5)$$

Докажем это равенство. Систему $\{\varphi_\lambda\}$ функций алгебры логики назовем *полной ортогональной системой*, если

$$\bigvee_{\lambda} \varphi_\lambda = 1, \quad \varphi_{\lambda_1}\varphi_{\lambda_2} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Если $\{\varphi_\lambda\}$ — полная ортогональная система и $\{\psi_\lambda\}$ — произвольная система функций алгебры логики, то

$$\neg \bigvee_{\lambda} \psi_\lambda \varphi_\lambda = \bigvee_{\lambda} (\neg\, \psi_\lambda)\, \varphi_\lambda.$$

Так как система функций $\{V_{p,\, q,\, p',\, q'}\}$ — полная ортогональная система, то

$$\neg\, (W^{+}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega}} \vee F_{p,\, q}1 \vee \bigvee_{\substack{p'' \\ (p''<p)}} V^{-}_{p,\, p'',\, q}0) =$$
$$= \bigvee_{\substack{p'' \\ (p''>p)}} K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\, p''})\, V^{+}_{p,\, p'',\, q} \vee F_{p,\, q}0 \vee \bigvee_{\substack{p'' \\ (p''<p)}} V^{-}_{p,\, p'',\, q}1$$

и

$$\neg\, (D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\, p} \vee W^{+}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega}} \vee F_{p,\, q}) =$$
$$= K_{\widetilde{\sigma}_1,\, p} [\bigvee_{\substack{p'' \\ (p<p'')}} K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\, p''})\, V^{+}_{p,\, p'',\, q} \vee \bigvee_{\substack{p'' \\ (p''<p)}} V^{-}_{p,\, p'',\, q}].$$

Обозначим через $\sum^{p',\, q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\, p',\, \widetilde{\omega}'}$ выражение, заключенное в формуле (5.5) в квадратные скобки.

Имеем *)

$$\sum\nolimits^{p',\, q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\, p',\, \widetilde{\omega}'} = D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\, p'} \vee W^{+}_{p',\, q',\, \widetilde{\omega}'} \vee F_{p',\, q'} \vee$$
$$\vee \bigvee_{\substack{p,\, q,\, \widetilde{\sigma}_1,\, p,\, \widetilde{\omega} \\ p<p' \\ (f[\widetilde{\sigma}_1,\, \widetilde{\sigma}_2]=0)}} K_{\widetilde{\sigma}_1,\, p} [\bigvee_{\substack{p'' \\ (p<p'')}} K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\, p''})\, V^{+}_{p,\, p'',\, q} \vee \bigvee_{\substack{p'' \\ (p''<p)}} V^{-}_{p,\, p'',\, q}],$$

откуда, по определению функции $F_{p',\, q'}$ и так как $p < p'$,

$$\sum\nolimits^{p',\, q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\, p',\, \widetilde{\omega}'} = D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\, p'} \vee W^{+}_{p',\, q',\, \widetilde{\omega}'} \vee F_{p',\, q'} \vee$$
$$\vee \bigvee_{\substack{p,\, q,\, \widetilde{\sigma}_1,\, p,\, \widetilde{\omega} \\ (p<p')}} (\neg\, f[\widetilde{\sigma}_1,\, \widetilde{\sigma}_2])\, K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\, p'})\, V_{p,\, q,\, p',\, q'} K_{\widetilde{\sigma}_1,\, p}. \quad (5.6)$$

Система функций

$$\{K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\, p'})\, V_{p,\, q,\, p',\, q'} K_{\widetilde{\sigma}_1,\, p}\}_{p,\, q,\, p',\, q',\, \widetilde{\sigma}_1,\, p,\, \widetilde{\omega}}$$

---

*) Здесь и далее в этом параграфе опущена запись условия $\theta(p,\, q,\, p',\, q') = 1$ и условий, получающихся из данного подстановкой других переменных.

— полная ортогональная система; поэтому

$$\neg \sum_{\widetilde{\sigma}_{1,p'},\widetilde{\omega}'}^{p',q'} = K_{\widetilde{\sigma}_{1,p'}} \Big[\bigvee_{\substack{p,q,\widetilde{\sigma}_{1,p},\widetilde{\omega} \\ (p<p')}} f[\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2] K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^+_{p,p'}) V_{p,q,p',q'} K_{\widetilde{\sigma}_{1,p}} \vee \\ \vee \bigvee_{\substack{p \\ (p'<p)}} K_{\widetilde{\omega}'}(\mathfrak{M}^+_{p',p}) V^+_{p',p,q} \Big]. \tag{5.7}$$

Так как

$$W^-_{p',q',\widetilde{\omega}'} \bigvee_{\substack{p'' \\ (p'<p'')}} V^+_{p',p'',q'} = 0,$$

то подстановка (5.7) в правую часть (5.5) после замены по (5.3) дает (5.4), что доказывает справедливость равенства (5.5).

Схема для $f(\widetilde{x})$ строится в соответствии с (5.5) следующим образом.

1) Блок I выдает инверсии аргументов $\neg x_i$, $i=1, \ldots, n$; $L(I)=n$.

2) Блок V выдает всевозможные конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2)$ (по формуле $K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2) = \neg D_{\neg\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x}_2))$; $L(V)=2^t$.

3) Блок F выдает всевозможные функции $F_{p,q}$; $L(F)=0$.

4) Блоки M^+, M^- выдают всевозможные функции $K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^+_{p,p'})$ и $K_{\widetilde{\omega}'}(\mathfrak{M}^-_{p,p'})$ соответственно;

$$L(M^+) = L(M^-) = k(2k-1)\,2^{r(k-1)}.$$

5) Блоки U^+, U^- выдают всевозможные функции $U^+_{p,p',q,\widetilde{\omega}}$ и $U^-_{p,p',q,\widetilde{\omega}}$ соответственно; $L(U^+)=L(U^-)=3k(2k-1)\,T2^{r(k-1)}$.

6) Блоки W^+, W^- выдают всевозможные функции $W^+_{p,q,\widetilde{\omega}}$ и $W^-_{p,q,\widetilde{\omega}}$ соответственно; $L(W^+)=L(W^-)=2$ (так как $W^+_{2k,q,\widetilde{\omega}} = W^-_{1,q,\widetilde{\omega}}=0$).

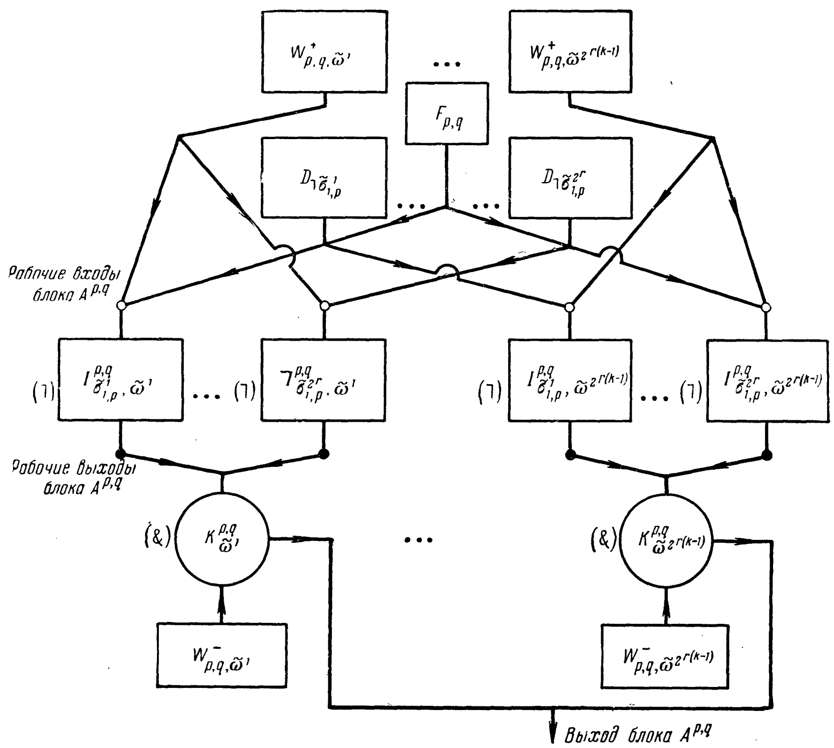
7) Блок A выдает функцию $f(\widetilde{x})$ и состоит из $2\,kT$ соединенных между собой блоков $A^{p,q}$. Опишем детально блок.

Блок $A^{p,q}$ имеет следующее строение. Занумеруем 2^{rk} элементов, реализующих инверсию, парами $(\widetilde{\sigma}_{1,p}, \widetilde{\omega})$, где $\widetilde{\omega}$ — набор из $r(k-1)$ компонент; обозначим эти элементы символами $I^{p,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,p},\widetilde{\omega}}$. Образуем $2^{r(k-1)}$ блоков, каждый из которых реализует конъюнкцию, занумеруем их наборами $\widetilde{\omega}$ и обозначим символами $K^{p,q}_{\widetilde{\omega}}$. Выходы всех элементов $I^{p,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,p},\widetilde{\omega}}$ при фиксированном $\widetilde{\omega}$ (а также при фиксированных значениях p, q) подаем на один из выходов блока $K^{p,q}_{\widetilde{\omega}}$, на другой вход которого подаем функцию $W^-_{p,q,\widetilde{\omega}}$. На вход элемента $I^{p,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,p},\widetilde{\omega}}$ подаем функции $D_{\neg\widetilde{\sigma}_{1,p}}$, $W^+_{p,q,\widetilde{\omega}}$ и $F_{p,q}$. Выходы всех блоков $K^{p,q}_{\widetilde{\omega}}$ подаем на выход блока $A^{p,q}$. Входы (выходы) блоков $I^{p,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,p},\widetilde{\omega}}$ назовем *рабочими* входами (выходами) блока $A^{p,q}$ (рис. 7).

Блок A получается в результате подачи выходов всех блоков $A^{p,q}$ на выход блока A и соединения рабочих выходов блоков $A^{p,q}$ с рабочими входами блоков $A^{p',q'}$, $p<p'$. Именно, выход элемента $I^{p,q}_{\widetilde{\sigma}_{1,p},\widetilde{\omega}}$ подаем на вход элемента $I^{p',q'}_{\widetilde{\sigma}_{1,p'},\widetilde{\omega}'}$ тогда и только тогда, когда

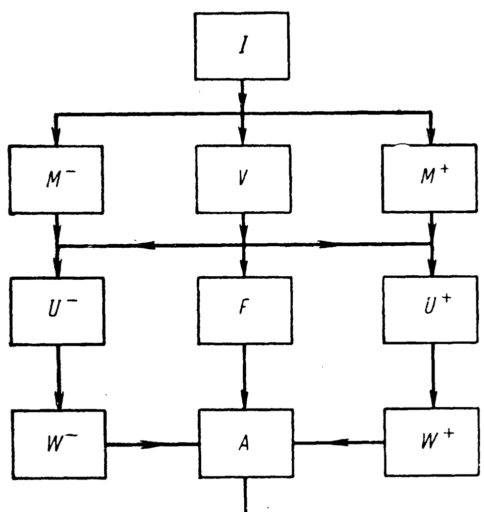
$$\theta(p,\ q,\ p',\ q')=1 \quad \text{и} \quad f[\widetilde{\sigma}_1,\ \widetilde{\sigma}_2]=0.$$

Соединение всех перечисленных блоков показано на рис. 8. Покажем, что построенная схема реализует функцию $f(\widetilde{x})$. Обозначим через



Рабочие входы блока $A^{p,q}$
Рабочие выходы блока $A^{p,q}$
$F_{p,q}$
(&)
Выход блока $A^{p,q}$

Рис. 7.



I
M⁻
V
M⁺
U⁻
F
U⁺
W⁻
A
W⁺

Рис. 8.

$\Omega^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}$ функцию, подаваемую на вход элемента $I^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}$. По построению схемы, функции $\Omega^{p_1'q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}$ удовлетворяют условиям

$$\Omega^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}=D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\,p'}\vee W^{+}_{p',\,q',\,\widetilde{\omega}'}\vee F_{p',\,q'}\vee\bigvee_{\substack{p,\,q,\,\widetilde{\sigma}_1,\,p,\,\widetilde{\omega}\\ \left(\substack{p<p'\\ f[\widetilde{\sigma}_1,\,\widetilde{\sigma}_2]=0}\right)}}\neg\,\Omega^{p,\,q}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p,\,\widetilde{\omega}}. \tag{5.8}$$

Покажем, что

$$\Omega^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}=\sum\nolimits^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}.$$

Применим индукцию по p'. При $p'=1$ утверждение очевидно. Допустим, что это утверждение справедливо для всех значений параметра, меньших p'. Тогда в силу (5.8) из (5.7) получим

$$\Omega^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}=D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\,p'}\vee W^{+}_{p',\,q',\,\widetilde{\omega}'}\vee F_{p',\,q'}\vee\bigvee_{\substack{p,\,q,\,\widetilde{\sigma}_1,\,p,\,\widetilde{\omega}\\ \left(\substack{p<p'\\ f[\widetilde{\sigma}_1,\,\widetilde{\sigma}_2]=0}\right)}}\neg\sum\nolimits^{p,\,q}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p,\,\widetilde{\omega}}=$$

$$=D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\,p'}\vee W^{+}_{p',\,q',\,\widetilde{\omega}'}\vee F_{p',\,q'}\vee\bigvee_{\substack{p,\,q,\,\widetilde{\sigma}_1,\,p,\,\widetilde{\omega}\\ \left(\substack{p<p'\\ f[\widetilde{\sigma}_1,\,\widetilde{\sigma}_2]=0}\right)}}\Big[\bigvee_{\substack{p''\\(p<p'')}}K_{\widetilde{\sigma}_1,\,p}K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\,p''})V^{+}_{p,\,p'',\,q}\vee$$

$$\vee\bigvee_{\substack{p'',\,q'',\,\widetilde{\sigma}_1,\,p'',\,\omega''\\ \left(\substack{p''<p\\ f[\widetilde{\sigma}_1(\widetilde{\omega}'',\,\widetilde{\omega},\,\widetilde{\sigma}_1,\,p'',\,\widetilde{\sigma}_1,\,p),\,\widetilde{\sigma}_2(p'',\,q'',\,p,\,q)]=1}\right)}}K_{\widetilde{\sigma}_1,\,p}K_{\widetilde{\omega}''}(\mathfrak{M}^{+}_{p'',\,p})V_{p'',\,q'',\,p,\,q}K_{\widetilde{\sigma}_1,\,p''},$$

откуда, по определению функции $F_{p',q'}$ и в силу (5.6),

$$\Omega^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}=D_{\neg\widetilde{\sigma}_1,\,p'}\vee W^{+}_{p',\,q',\,\widetilde{\omega}'}\wedge F_{p',\,q'}\vee$$

$$\vee\bigvee_{\substack{p,\,q,\,\widetilde{\sigma}_1,\,p,\,\widetilde{\omega}\\ \left(\substack{p<p'\\ f[\widetilde{\sigma}_1,\,\widetilde{\sigma}_2]=0}\right)}}K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\,p'})V_{p,\,q,\,p',\,q'}K_{\widetilde{\sigma}_1,\,p'}=\sum\nolimits^{p',\,q'}_{\widetilde{\sigma}_1,\,p',\,\widetilde{\omega}'}.$$

Отсюда следует, что построенная схема в силу (5.5) реализует функцию $f(\widetilde{x})$. Имеем

$$L(n)\leqslant n+2^{t}+k(2k-1)\,2^{r(k-1)}(2+6T)+2kT\,(2^{rk}+3\cdot 2^{r(k-1)}).$$

Выберем k, r, t так, чтобы $k\to\infty$, $r\to\infty$, $t\to\infty$, $n-2t\to\infty$, $\frac{2^t}{k^2}\to\infty$, $\frac{k}{2^r}\to 0$. Тогда $L(n)\lesssim\sqrt{2}\cdot 2^{n/2}$. Теорема полностью доказана.

§ 6. *R*-схемы

В [7] были определены схемы, подобные контактно-вентильным схемам, в которых проводимость цепи определяется таким же образом, а проводимость схемы — с использованием сложения по mod 2 вместо логического сложения, т. е. дизъюнкции. Такие объекты, в которых отсутствовали циклы с ненулевой проводимостью, были названы R-схемами.

Вместо терминов «информационное ребро» и «управляющее ребро», принятых в [7], здесь будем употреблять термины «контакт» и «вентиль» соответственно. Обозначим через $\widetilde{L}(f)$ минимальное число контактов такое, что функцию f можно реализовать некоторой R-схемой, содержащей $\widetilde{L}(f)$ контактов. Как обычно, определим функцию $\widetilde{L}(n)$.

Теорема 6.

$$\widetilde{L}(n) \sim \sqrt{2} \cdot 2^{n/2}.$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из замечания § 4 настоящей работы в силу определения R-схем.

Верхняя оценка. Заметим, что во всякой контактно-вентильной схеме, доставляемой методом синтеза § 4 настоящей статьи, проводимости всяких двух различных цепей от входа схемы к выходу ортогональны (т. е. их конъюнкция равна 0). Поэтому при вычислении проводимости схемы дизъюнкцию проводимостей всех цепей от входа к выходу можно заменить на их сумму по mod 2. В силу этого указанные контактно-вентильные схемы при ориентации их контактов от входа к выходу схемы можно рассматривать как R-схемы.

Пусть n — четное, $n = 2k + 2sr$.

Аргументы $\widetilde{x}$ разобьем на группы: $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}^+, \widetilde{x}^-)$, где $\widetilde{x}_1 = (\widetilde{x}_{1,1}, \ldots, \widetilde{x}_{1,2k})$, $\widetilde{x}_{1,i} = (x_{1,i,1}, \ldots, x_{1,i,r})$, $i = 1, \ldots, 2k$, $\varkappa(\widetilde{x}^+) = \varkappa(\widetilde{x}^-) = s$. Во множестве ненулевых наборов $\sigma_{1,i}$ выделим систему непересекающихся групп по r наборов в каждой группе так, чтобы все наборы одной группы были линейно независимы (см. § 3, следствие из леммы 1). Занумеруем эти группы числами $j = 1, \ldots, m$, где $m = \left[\frac{2^r - 1}{r}\right]$, и обозначим их символами $S_{i,j}$. Характеристическую функцию множества $S_{i,j}$ обозначим тем же символом $S_{i,j}$. Оставшиеся наборы, включая нулевой, занумеруем числами $t = 1, \ldots, d$, $d \leqslant r$, и обозначим символами $\widetilde{\sigma}^t_{1,i}$. Характеристическую функцию множества $\{\widetilde{\sigma}^t_{1,i}\}_{t=1,\ldots,d}$ обозначим через T_i, т. е.

$$T_i = \sum_{t=1}^{d} K_{\widetilde{\sigma}^t_{1,i}}(\widetilde{x}_{1,i}). \tag{6.1}$$

Введем функции

$$V_{\widetilde{\pi}}(\widetilde{x}_1) = \mathop{\&}_{i=1}^{2k} S_{i,j_i}(\widetilde{x}_1), \quad \widetilde{\pi} = (j_1, \ldots, j_{2k}), \qquad j_i = 1, \ldots, m.$$

Очевидно,

$$\bigvee_{i=1}^{2k} T_i \oplus \sum_{\widetilde{\pi}} V_{\widetilde{\pi}} = 1. \tag{6.2}$$

Введем функции

$$f^{(1)}(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}) \mathbin{\&} \bigvee_{i=1}^{2k} T_i,$$

$$f^{(2)}(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}) \mathbin{\&} \sum_{\widetilde{\pi}} V_{\widetilde{\pi}}.$$

В силу (6.2)

$$f(\widetilde{x}) = f^{(1)}(\widetilde{x}) \oplus f^{(2)}(\widetilde{x}). \tag{6.3}$$

Представим функцию $f^{(1)}(\widetilde{x})$ в виде, подходящем для ее схемной реализации. Так как

$$\bigvee_{i=1}^{2k} T_i = \sum_{i=1}^{2k} T_i \mathop{\&}_{i'=1}^{i-1} \neg T_{i'},$$

то в силу (6.1)

$$f^{(1)}(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{2k} \sum_{t=1}^{d} f_{i,t}(\widetilde{x}), \tag{6.4}$$

где

$$f_{i,t}(\tilde{x}) = K_{\tilde{\sigma}^t_{1,i}}(\tilde{x}_{1,i})\, f(\tilde{x}_{1,1}, \ldots, \tilde{x}_{1,i-1}, \tilde{\sigma}^t_{1,i}, \tilde{x}_{1,i+1}, \ldots, \tilde{x}_{1,2k}, \tilde{x}^+, \tilde{x}^-) \mathop{\&}_{i'=1}^{i-} \neg T_{i'}. \tag{6.5}$$

Введем теперь специальное представление для функции $f^{(2)}(\tilde{x})$.

Представим функцию $f^{(2)}(\tilde{x})$ в виде суммы

$$f^{(2)}(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{\pi}} f^{(2)}_{\tilde{\pi}},$$

где

$$f^{(2)}_{\tilde{\pi}}(\tilde{x}) = f(\tilde{x})\, V_{\tilde{\pi}}.$$

Очевидно, что

$$f^{(2)}_{\tilde{\pi}}(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-} K_{\tilde{\sigma}^+}(\tilde{x}^+)\, K_{\tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}^-)\, f^{(2)}_{\tilde{\pi},\, \tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}_1),$$

где через $f^{(2)}_{\tilde{\pi},\, \tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}_1)$ обозначена функция $f^{(2)}_{\tilde{\pi}}(\tilde{x}_1, \tilde{\sigma}^+, \tilde{\sigma}^-)$, и

$$f^{(2)}_{\tilde{\pi},\, \tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}_1)\, V_{\tilde{\pi}} = f^{(2)}_{\tilde{\pi},\, \tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}_1).$$

Покажем, что для всякой функции $\varphi(\tilde{x}_1)$ такой, что

$$\varphi(\tilde{x}_1)\, V_{\tilde{\pi}} = \varphi(\tilde{x}_1),$$

существует полином Жегалкина [11]

$$G[\varphi] = \sum_{\tilde{\varrho}} u[\varphi;\, \tilde{\varrho}]\, x_{1,1,r_1} \ldots x_{1,2k,r_{2k}} \tag{6.6}$$

здесь $\tilde{\varrho} = r_1, \ldots, r_{2k}$, $1 \leqslant r_i \leqslant r$, $u\, [\varphi;\, \varrho] = 0{,}1$), такой, что

$$\varphi(\tilde{x}_1) = V_{\tilde{\pi}} G[\varphi]. \tag{6.7}$$

Действительно, функция $\varphi(\tilde{x}_1)$ представляется в виде

$$\varphi(\tilde{x}_1) = \sum_{\substack{\tilde{\sigma}_1 \\ (\varphi(\tilde{\sigma}_1)=1)}} K_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{x}_1) = \sum_{\substack{\tilde{\sigma}_1 \\ (\varphi(\tilde{\sigma}_1)=1)}} \mathop{\&}_{i=1}^{2k} K_{\tilde{\sigma}_{1,i}(\tilde{\sigma}_1)}(\tilde{x}_{1,i}).$$

Здесь через $\tilde{\sigma}_{1,i}(\tilde{\sigma}_1)$ обозначен набор, получающийся из набора $\tilde{\sigma}_1$ удалением всех разрядов, соответствующих аргументам, не входящим в $\tilde{x}_{1,i}$. Обозначим через $l_{i,j,\tilde{\sigma}_{1,i}(\tilde{\sigma}_1)}(\tilde{x}_{1,i})$ линейную функцию (без свободного члена), определяемую равенством $K_{\tilde{\sigma}_{1,i}(\tilde{\sigma}_1)}(\tilde{x}_{1,i}) = S_{i,j}\, l_{i,j,\tilde{\sigma}_{1,i},(\tilde{\sigma}_1)}(\tilde{x}_{1,i})$ (§ 3, лемма 2; j определяется набором $\tilde{\sigma}_1$). Тогда

$$\varphi(\tilde{x}_1) = \sum_{\substack{\tilde{\sigma}_1 \\ (\varphi(\tilde{\sigma}_1)=1)}} \mathop{\&}_{i=1}^{2k} S_{i,j_i}\, l_{i,j_i,\tilde{\sigma}_{1,i},(\tilde{\sigma}_1)}(\tilde{x}_{1,i}) = V_{\tilde{\pi}} \sum_{\substack{\tilde{\sigma}_1 \\ (\varphi(\tilde{\sigma}_1)=1)}} \mathop{\&}_{i=1}^{2k} l_{i,j_i,\tilde{\sigma}_{1,i}(\tilde{\sigma}_1)}(\tilde{x}_{1,i})$$

откуда следует (6.7), (6.6). Таким образом,

$$f^{(2)}(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{\pi}} V_{\tilde{\pi}} \sum_{\tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-} K_{\tilde{\sigma}^+}(\tilde{x}^+)\, K_{\tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}^-)\, \& \\ \& \sum_{\tilde{\varrho}} u\, [f^{(2)}_{\tilde{\pi},\, \tilde{\sigma}^+,\, \tilde{\sigma}^-}(\tilde{x}_1);\, \tilde{\varrho}]\, x_{1,1,r_1} \ldots x_{1,2k,r_{2k}}. \tag{6.8}$$

Преобразуем представление (6.8), применяя идеи предыдущего параграфа.

Рассмотрим в качестве множества функций $\{h_\beta\}$ множество всех m^{2k} функций $V_{\widetilde{\pi}}$. Пусть граф H имеет $2k$ групп узлов по

$$T=\left]\frac{m^k}{\sqrt{k(2k-1)}}\right[$$

узлов в каждой группе и m^{2k} ребер, причем ребра имеются только между узлами из разных групп. Занумеруем группы узлов числами $p=1, \ldots \ldots, 2k$ и все узлы p-й группы занумеруем парами (p, q), где $q= =1, \ldots, T$. Как в § 4, введем функции $\theta(p, q, p', q')$ и $g_{p,q}$. Для пар (p, q), (p', q') таких, что $\theta(p, q, p', q')=1$, введем набор $\widetilde{\sigma_1}(p, q, p', q')$, который определяется равенством $K_{\sigma_1(p, q, p', q')}(\widetilde{x_1})=g_{p,q}g_{q',p'}$.

Между наборами $\widetilde{\pi}$ и системами чисел (p, q, p', q'), $p<p'$, существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством

$$V_{\widetilde{\pi}}=V_{p,q,p',q'}. \tag{6.9}$$

Как в предыдущем параграфе, определим функции $V_{p,q,p',q'}$, $V^+_{p,p',q}$, $V^-_{p,p',q}$ и подсистемы $\mathfrak{M}^+_{p,p'}$, $\mathfrak{M}^-_{p',p}$.

Для всякого набора $\widetilde{\varrho}=(r_1, \ldots, r_{2k})$ и всяких чисел $p, p', p<p'$,

$$x_{1,1,r_1}\ldots x_{1,2k,r_{2k}}=E^+_{p,p',\widetilde{\varrho}}E^-_{p',p,\widetilde{\varrho}}x_{1,p,r_p}x_{1,p',r_{p'}},$$

где $E^+_{p,p',\widetilde{\varrho}}$ и $E^-_{p',p,\widetilde{\varrho}}$ — конъюнкции аргументов из множества $\{x_{1,1,r_1}, \ldots, x_{1,2k,r_{2k}}\}$, входящих в $\mathfrak{M}^+_{p,p'}$ и $\mathfrak{M}^-_{p',p}$ соответственно.

Введем функции

$$U^+_{p,q,\widetilde{\varrho}}=\sum_{\substack{p''\\(p<p'')}}V^+_{p,p'',q}E^+_{p,p'',\widetilde{\varrho}},$$

$$U^-_{p,q,\widetilde{\varrho}}=\sum_{\substack{p''\\(p''<p)}}V^-_{p,p'',q}E^-_{p,p'',\widetilde{\varrho}}.$$

Тогда при $p<p'$, $\theta(p, q, p', q')=1$

$$V_{p,q,p',q'}x_{1,1,r_1}\ldots x_{1,2k,r_{2k}}=U^+_{p,q,\widetilde{\varrho}}U^-_{p',q',\widetilde{\varrho}}x_{1,p,r_p}x_{1,p',r_{p'}}. \tag{6.10}$$

Из (6.8) — (6.10) получаем представление функции $f^{(2)}(\widetilde{x})$, основное для дальнейших построений:

$$f^{(2)}(\widetilde{x})=\sum_{\substack{p,q,p',q',\widetilde{\sigma}^+,\widetilde{\sigma}^-,\widetilde{\varrho}\\ \left(\substack{p<p'\\ \theta(p,q,p',q')=1}\right)}}(U^+_{p,q,\widetilde{\varrho}}K_{\widetilde{\sigma}^+}x_{1,p,r_p})\,\&\,(U^-_{p',q',\widetilde{\varrho}}K_{\widetilde{\sigma}^-}x_{1,p',r_{p'}})\,\&$$
$$\&\, u\,[f^{(2)}_{\widetilde{\pi}(p,q,p',q'),\widetilde{\sigma}^+,\widetilde{\sigma}^-}(x);\ \widetilde{\varrho}]. \tag{6.11}$$

Здесь через $\widetilde{\pi}(p, q, p', q')$ обозначен набор, сопоставляемый системе чисел (p, q, p', q') по взаимно однозначному соответствию, определяемому формулой (6.9).

Перейдем к описанию метода синтеза схемы.

Схема для $f(\widetilde{x})$ образуется при параллельном соединении схем для $f_{i,t}(\widetilde{x})$ и схемы для $f^{(2)}(\widetilde{x})$.

В силу замечания в начале настоящего доказательства и теоремы 4,

$$\widetilde{L}(f_{i,t}(\widetilde{x})) \leqslant r + C2^{\frac{n-r}{2}},$$

где C — некоторая константа.

Схема для $f^{(2)}(\widetilde{x})$ строится из блоков $A^{p,q}$, которые соединены параллельно и, кроме того, связаны между собой вентилями.

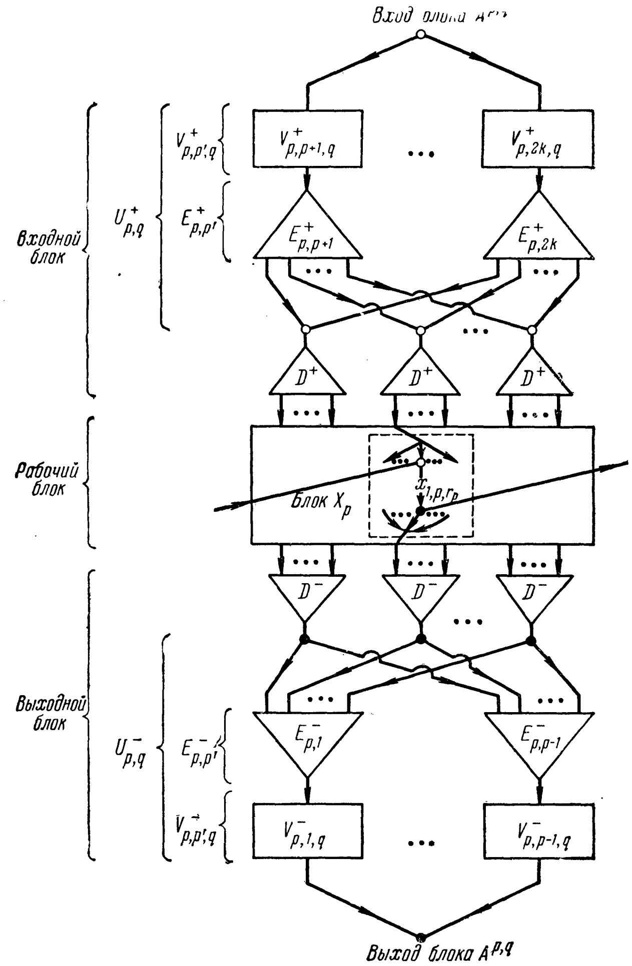


Рис. 9.

Опишем строение блока $A^{p,q}$ (рис. 9).

1) Блоки $V^+_{p,p',q}$, $p'=p+1, \ldots, 2k$, и $V^-_{p,p',q}$, $p'=1, \ldots, p-1$, реализуют функции $V^+_{p,p',q}$, $V^-_{p,p',q}$. Все блоки $V^+_{p,p',q}, V^-_{p,p',q}$ блока $A^{p,q}$ содержат вместе не более $2kr^2(2k-1)T$ контактов.

2) Блок $E^+_{p,p'}$ (блок $E^-_{p,p'}$) является $(1, r^{k-1})$-полюсником ($(r^{k-1}, 1)$-полюсником), реализующим всевозможные функции $\overset{+}{E}_{p,p',\widetilde{\varrho}}$ (функции $E^-_{p,p',\widetilde{\varrho}}$). Он имеет следующее строение. Назовем *ярусом контакта* в контактном дереве длину минимальной цепи, содержащей данный контакт и корень дерева. Назовем дерево r-хотомическим (т. е. осуществляющим разбиение на r частей), если число контактов одного яруса, инцидентных с одним узлом, всегда равно r.

Трехярусное r-хотомическое дерево изображено на рис. 10.

Ярусом дерева назовем максимум ярусов его контактов. Занумеруем группы подсистемы $\mathfrak{M}^+_{p,\,p'}$ (подсистемы $\mathfrak{M}^-_{p,\,p'}$) числами $i'=1,\ldots,k-1$. Блок $E^+_{p,\,p'}$ (блок $E^-_{p,\,p'}$) является $(k-1)$-ярусным r-хотомическим деревом, в котором контакты i'-го яруса, выходящие из одного узла, имено-

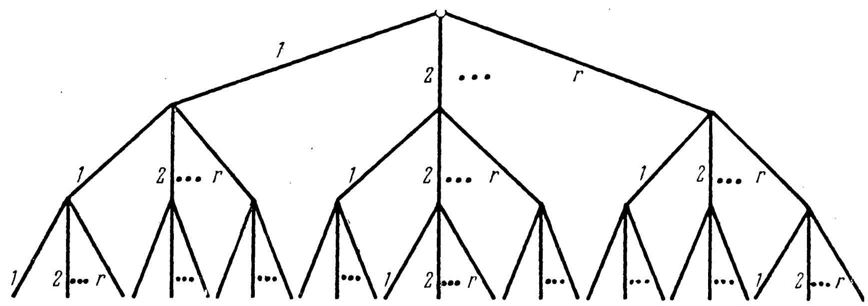


Рис. 10.

ваны всеми различными аргументами i'-й группы подсистемы $\mathfrak{M}^+_{p,\,p'}$ (подсистемы $\mathfrak{M}^-_{p,\,p'}$). Легко видеть, что

$$L(E^+_{p,\,p'})=L(E^-_{p,\,p'})=\frac{r^k-r}{r-1}.$$

3) Блок $U^+_{p,\,q}$ (блок $U^-_{p,\,q}$) является $(1,\,r^{k-1})$-полюсником ($(r^{k-1},\,1)$-полюсником), реализующим всевозможные функции $\overset{+}{U}_{p,\,q,\,\widetilde{\varrho}}$ (функции $U^-_{p,\,q,\,\widetilde{\varrho}}$). Он получается в результате присоединения к выходу (входу) каждого блока $V^+_{p,\,p',\,q}$ (блока $V^-_{p,\,p',\,q}$) входа (выхода) блока $E^+_{p,\,p'}$ (блока $E^-_{p,\,p'}$) и объединения всех $(p-1)$ выходов ($(2k-p)$ входов) блоков $E^+_{p,\,p'}$ (блоков $E^-_{p,\,p'}$), соответствующих одному и тому же набору $\widetilde{\varrho}$ в выход (вход) блока $U^+_{p,\,q}$ (блока $U^-_{p,\,q}$).

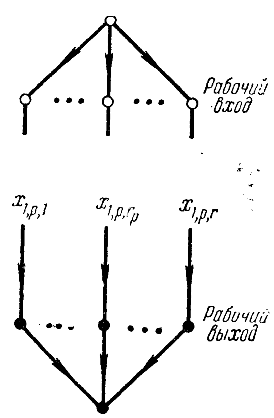


Рис. 11.

4) Блок D^+ (блок D^-) является дихотомическим деревом над $\widetilde{x}^+$ (над $\widetilde{x}^-$), реализующим всевозможные конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}^+}(\widetilde{x}^+)$ (конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}^-}(\widetilde{x}^-)$); $L(D^+)=L(D^-)=2^{s+1}-2$.

5) Входной (выходной) блок блока $A^{p,\,q}$ является $(1,2^sr^{k-1})$-полюсником ($(2^sr^{k-1},\,1)$-полюсником), реализующим всевозможные функции $U^+_{p,\,q,\,\widetilde{\varrho}}K_{\widetilde{\sigma}^+}$ (функции $U^-_{p,\,q,\,\widetilde{\varrho}}K_{\widetilde{\sigma}^-}$). Он получается в результате присоединения к каждому выходу (входу) блока $U^+_{p,\,q}$ (блока $U^-_{p,\,q}$) входа (выхода) блока D^+ (блока D^-).

6) Выходы и входы выходного и входного блоков блока $A^{p,\,q}$ разбиваются в пары с одинаковыми наборами $\widetilde{\varrho}$. Между входом и выходом каждой пары вставляется блок X_p (рис. 11). Всего имеется по 2^sr^{k-1} блоков X_p. Назовем часть блока $A^{p,\,q}$, образованную блоками X_p, *рабочим блоком*, а вход (выход) каждого контакта из X_p, назовем *рабочим входом* (*выходом*) блока $A^{p,\,q}$.

Заметим, что проводимость блока $A^{p,\,q}$ равна 0 (из-за последовательно включенных блоков $V^+_{p,\,p',\,q}$ и $V^-_{p,\,p'',\,q}$, $p'>p$, $p''<p$).

По построению,

$$L(A^{p,q}) = 2kr^2(2k-1)T + (2k-1)\frac{r^k - r}{r-1} + 2r^{k-1}(2^{s+1}-2) + 2^s r^k.$$

Опишем теперь соединение блоков $A^{p,q}$ вентилями.

Отметим сначала следующий факт. Пусть к схеме из параллельно соединенных блоков $A^{p,q}$ присоединена некоторая вентильная схема, определяемая следующим образом: входами и выходами ее являются рабочие выходы и входы блоков $A^{p,q}$ соответственно; цепи из вентилей имеются лишь, быть может, между блоками $A^{p,q}$, $A^{p',q'}$, где p, $p' = 1, \ldots, 2k$; q, $q' = 1, \ldots, T$; $p < p'$, при этом они всегда ориентированы от $A^{p,q}$ к $A^{p',q'}$. Обозначим схему, получающуюся в результате такого соединения через $\mathfrak{A}$. Функцию, реализуемую схемой $\mathfrak{A}$, обозначим через $g(\mathfrak{A})$.

Пусть, далее, к схеме $\mathfrak{A}$ присоединена вентильная схема $\mathfrak{B}^{p_1,q_1,p_1',q_1'}$, в которой цепи из вентилей имеются лишь, может быть, между рабочими выходами блока A^{p_1,q_1} и рабочими входами блока $A^{p_1',q_1'}$, где p_1, q_1, p_1', q_1^1 — фиксированные и $p_1 < p_1'$, при этом они всегда ориентированы от A^{p_1,q_1} к $A^{p_1',q_1'}$. Схему, получающуюся в результате такого соединения, обозначим через $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}^{p_1,q_1,p_1',q_1'}$, а реализуемую ею функцию — через $g(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}^{p_1,q_1,p_1',q_1'})$.

Из формулы (6.6) и определения блоков $A^{p,q}$ следует, что для всякой функции $\varphi(\widetilde{x})$ такой, что

$$\varphi(\widetilde{x})\, V_{p_1,q_1,p_1',q_1'} = \varphi(\widetilde{x}),$$

существует некоторая вентильная схема $\mathfrak{B}^{p_1,q_1,p_1',q_1'}(\varphi)$ такая, что

$$g(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}^{p_1,q_1,p_1',q_1'}(\varphi)) = \varphi(\widetilde{x}) \oplus$$

$$\oplus\, g(\mathfrak{A})\, \neg V_{p_1,q_1,p_1',q_1'} \oplus \sum_{\substack{p'',q'',p''',q''' \\ (p'''-p''<p_1'-p)}} V_{p'',q'',p''',q'''}\, h_{\mathfrak{A}}^{p'',q'',p''',q'''}(\widetilde{x}), \tag{6.12}$$

где $h_{\mathfrak{A}}^{p'',q'',p''',q'''}$ — некоторые функции.

Докажем этот факт. Назовем *истинной цепью* цепь, соединяющую вход и выход схемы и проходящую только через два блока $A^{p,q}$, $A^{p',q'}$, $p < p'$; назовем *ложной цепью* цепь, содержащую контакты из более чем двух блоков $A^{p,q}$ (на рис. 12 ложная цепь проходит через блоки $A^{p,q}$, $A^{p'',q''}$, $A^{p',q'}$, $p < p'' < p'$). Блок $A^{p,q}$ с наименьшим p, через который проходит цепь (истинная или ложная), назовем *верхним*, а соответствующий блок с наибольшим p назовем *нижним* для данной цепи. Пусть блоки $A^{p,q}$, $A^{p',q'}$ суть нижний и верхний блоки для данной цепи. Число $p' - p$ назовем «*длиной*» данной цепи. Очевидно, при присоединении к схеме $\mathfrak{A}$ вентиля между некоторыми рабочим выходом блока $A^{p,q}$ и рабочим входом блока $A^{p',q'}$ возникает одна новая истинная цепь «длины» $p' - p$, и могут возникнуть несколько новых ложных цепей «длины», большей чем $p' - p$. Так как проводимости цепей суммируются по mod 2, то, присоединяя к схеме $\mathfrak{A}$ некоторый набор вентилей между блоками A^{p_1,q_1} и $A^{p_1',q_1'}$, можно произвольно изменить сумму по mod 2 проводимостей всех истинных цепей, для которых блоки A^{p_1,q_1} и $A^{p_1',q_1'}$ суть верхний и нижний. При этом все возникающие новые ложные цепи будут иметь длину, бо́льшую чем $p' - p$. Отсюда следует указанный факт.

Равенство (6.12) позволяет описать схему для $f^{(2)}(\tilde{x})$ как разультат процесса присоединения к параллельно соединенным блокам $A^{p,q}$ вентильных схем. Процесс состоит из $2k-1$ шагов. На m-м шаге производится соединение вентилями рабочих выходов блоков $A^{p,q}$ рабочими входами

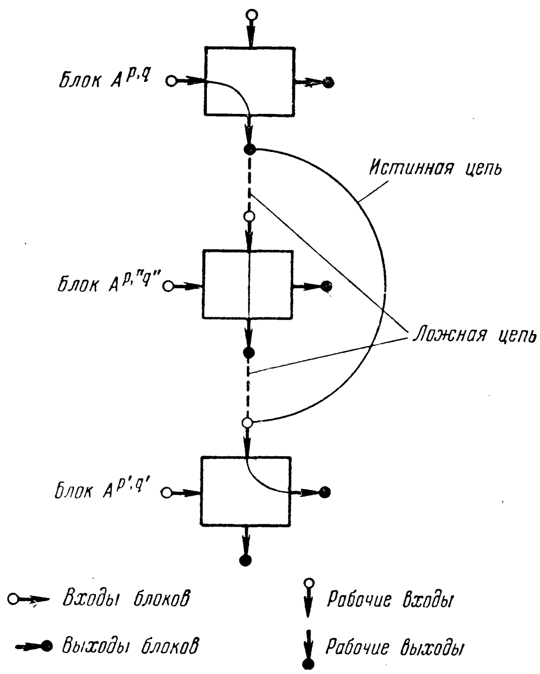


Рис. 12.

блоков $A^{p',q'}$, где $p, p'=1,\ldots,2k$; $q,q'=1,\ldots, T$ и $p'-p=m$. Функцию, реализуемую схемой после m-го шага, обозначим через $f_m^{(2)}$. Соединения таковы, что

$$f_m^{(2)}=\sum_{\substack{p,\,p'\\(p'-p\leqslant m)}} V_{p,\,q,\,p',\,q'}\,f^{(2)}\oplus\sum_{\substack{p,\,p'\\(p'-p>m)}} V_{p,\,q,\,p',\,q'}\,h^{p,\,q,\,p',\,q'}(\tilde{x}),$$

где $h^{p,\,q,\,p',\,q'}(\tilde{x})$ — некоторые функции.

Таким образом, на m-м шаге ложные цепи, возникшие на предыдущих шагах, компенсируются до нужной функции (за счет сложения по $\mathrm{mod}\,2$), а вновь возникающие ложные цепи будут компенсироваться на последующих шагах. На последнем шаге ложных цепей не возникает. В силу отмеченного выше факта такие соединения всегда возможны.

Схема, получающаяся после $(2k-1)$-го шага, реализует функцию

$$f_{2k-1}^{(2)}(\tilde{x})=f^{(2)}(\tilde{x}).$$

Имеем

$$L(n)\leqslant 2kTL(A^{p,\,q})+2kr^2+2Ckr2^{n-r/2}.$$

Положим

$$k[\log_2 n],\quad r=\left[\frac{1}{5}\frac{n}{\log_2 n}\right],\quad s=\frac{n}{2}-kr.$$

Тогда

$$L(n)\leqslant\sqrt{2}\cdot 2^{n/2}.$$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что при n нечетном, $n=2kr+2s+1$, блоки D^+, D^- строятся так же, как части схемы, изображенной на рис. 5, расположенные выше и ниже вентильной схемы. Число выходов (входов) схем D^+ (схем D^-) равно асимптотически $2^{2s+1/2}$; эти схемы содержат асимптотически по $2^{2s+1/2}$ контактов.

§ 7. Схемы в базисах, в которых $L(y_1 \oplus y_2 \oplus y_3)=0$, $L(y_1 \& y_2)=1$

Теорема 7. *Для схем в базисе* Λ_j

$$L(n) \sim 2^{n/2}.$$

Доказательство. Как уже отмечалось в § 3, достаточно получить верхнюю оценку в базисе Λ_4, асимптотически равную нижней оценке в базисе Λ_1.

Нижняя оценка для $L(n)$ в базисе Λ_1. Как в § 3 (учетом «суммирования» по mod 2 параллельных ребер), сопоставим всякой схеме $\mathfrak{A}$ граф $Q(\mathfrak{A})$ и систему индексов его вершин.

Определим индексы ребер графа $Q(\mathfrak{A})$ следующим образом. Занумеруем все подмножества множества входов элемента φ_w числами $0, 1, 2, 3$. *Индексом ребра* $(\overrightarrow{M_v, M_w})$ при $w \neq 0$ назовем номер подмножества множества входов элемента φ_w, на которые подается выход элемента φ_v. Ребрам $(\overrightarrow{M_v, M_0})$ припишем индекс 1.

Граф $Q(\mathfrak{A})$ и системы индексов его вершин и ребер однозначно определяют функцию, представляемую исходной схемой $\mathfrak{A}$.

Пусть схема $\mathfrak{A}$ имеет вес h (т. е. содержит h элементов, реализующих конъюнкцию). Граф $Q(\mathfrak{A})$ и система индексов его ребер однозначно определяются матрицей $B=\{b_v^w\}_{\substack{v=1,\ldots,h\\ w=0,1,\ldots,h}}$, в которой

$$b_v^w = \begin{cases} 0, \text{ если в } Q(\mathfrak{A}) \text{ нет ребра } (\overrightarrow{M_v, M_w}), \\ \text{индексу ребра } (\overrightarrow{M_v, M_w}), \text{ если имеется ребро } (\overrightarrow{M_v, M_w}). \end{cases}$$

Вводя, как выше, обозначение $S(h, n)$, получим

$$S(h,\ n) \leqslant 4^{h(h-1)/2} 2^h 2^{2(n+1)h+n+1}.$$

Отсюда следует нижняя оценка.

Верхняя оценка для $L(n)$ в базисе Λ_4.

Пусть $n=2kr+t+1$. Аргументы $\tilde{x}$ разобьем на группы $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, z)$, где $\tilde{x}_1=(\tilde{x}_{1,1}, \ldots, \tilde{x}_{1,2k})$, $\tilde{x}_{1,i}=(x_{1,i,1}, \ldots, x_{1,i,r})$, $r=2^\varrho$, где ϱ — целое число, $i=1, \ldots, 2k$, $\varkappa(\tilde{x}_2)=t$, $\varkappa(z)=1$. Множество наборов $\tilde{\sigma}_{1,i}$ разобьем на сферы радиуса 1, занумеруем их числами $s=1, \ldots, \frac{2^r}{r}$ и обозначим символами Θ^s. Для набора, являющегося центром сферы Θ_i^s, введем обозначение $\tilde{\xi}^s = (\xi^{s,1}, \ldots, \xi^{s,r})$; характеристическую функцию сферы Θ_i^s будем обозначать тем же символом Θ_i^s.

Введем представление функции, подходящее для ее схемной реализации. Как в § 5, введем множество $\{h_\beta\}$, граф H, функции $\theta(p, q, p', q')$, $g_{p,q}$, наборы $\tilde{\sigma}_2(p, q, p', q')$, функции $V_{p,q,p',q'}$, $V^+_{p,p',q}$, $V^-_{p,p',q}$, подсистемы $\mathfrak{M}^+_{p,p'}$, $\mathfrak{M}^-_{p',p}$ и наборы $\tilde{\omega}_{p,p'}$, $\tilde{\omega}_{p',p}$.

Очевидно равенство

$$\sum_{\substack{\mu=0,1\\ p,q,p',q'\\ \widetilde{\sigma}_1\\ (p<p')}} z^\mu V_{p,q,p',q'} K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)=1.$$

Умножая обе его части на функцию $f(\widetilde{x})$, получаем следующее представление функции $f(\widetilde{x})$:

$$f(\widetilde{x})=\sum_{\substack{\mu\\ p,q,p',q'\\ \widetilde{\sigma}_1\\ \left(\substack{p<p'\\ \theta(p,q,p',q')=1}\right)}} z^\mu V_{p,q,p',q'} K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1) f[\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2(p,q,p',q'), \mu]. \tag{7.1}$$

Выше было установлено равенство

$$V_{p,q,p',q'}=V^+_{p,p',q}V^-_{p',p,q} \tag{7.2}$$

(см. равенство (5.3)) и взаимно однозначное соответствие (при фиксированных p, p') между наборами $\widetilde{\sigma}_1$ и системами наборов $(\widetilde{\omega}_{p,p'}, \widetilde{\omega}_{p',p}, \widetilde{\sigma}_{1,p}, \widetilde{\sigma}_{1,p'})$, определяемое равенством

$$K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)=K_{\widetilde{\omega}_{p,p'}}(\mathfrak{M}^+_{p,p'})K_{\widetilde{\omega}_{p',p}}(\mathfrak{M}^-_{p',p})K_{\widetilde{\sigma}_{1,p}}(\widetilde{x}_{1,p})K_{\widetilde{\sigma}_{1,p'}}(\widetilde{x}_{1,p'}). \tag{7.3}$$

Из (7.3) получаем взаимно однозначное соответствие (при фиксированных p, p') между наборами $\widetilde{\sigma}_1$ и системами величин $(\widetilde{\omega}_{p,p'}, \widetilde{\omega}_{p',p}\ s, s', r_p, r_{p'})$, определяемое равенством

$$K_{\widetilde{\sigma}_1}(\widetilde{x}_1)=K_{\widetilde{\omega}_{p,p'}}(\mathfrak{M}^+_{p,p'})K_{\widetilde{\omega}_{p',p}}(\mathfrak{M}^-_{p',p})\Theta^s_p\Theta^{s'}_{p'}x_{1,p,r_p}^{\neg\xi^{s,r_p}}x_{1,p',r_{p'}}^{\neg\xi^{s',r_{p'}}}. \tag{7.4}$$

В силу (7.2), (7.4) из (7.1) получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} f(\widetilde{x})=\sum_{\substack{\mu=0,1\\ 1\le p<2k\\ 1<p'\le 2k\\ q,q',\widetilde{\omega}_{p,p'},\widetilde{\omega}_{p',p},s,s',r_p,r_{p'}\\ \left(\substack{p<p'\\ \theta(p,q,p',q')=0}\right)}} & z^\mu\{K_{\widetilde{\omega}_{p,p'}}V^+_{p,p',q}\Theta^s_p\}\,\& \\ & \&\{K_{\widetilde{\omega}_{p',p}}V^-_{p',p,q}\Theta^{s'}_{p'}\}\,\&\, x_{1,p,r_p}^{\neg\xi^{s,r_p}}x_{1,p',r_{p'}}^{\neg\xi^{s',r_{p'}}}\,\& \\ & \& f[\widetilde{\sigma}_1(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega}',s,s',r_p,r_{p'}),\widetilde{\sigma}_2(p,q,p',q'),\mu]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь через $\widetilde{\sigma}_1(\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}', s, s', r_p, r_{p'})$ обозначен набор, сопоставляемый системе $(\widetilde{\omega}_{p,p'}, \widetilde{\omega}_{p',p}, s, s', r_p, r_{p'})$ при данных p, p' по взаимно однозначному соответствию, определяемому равенством (7.4).

Введем функции

$$W^+_{p,q,\widetilde{\omega},s}=\sum_{\substack{p''\\ (p<p'')}} K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^+_{p,p''})V^+_{p,p'',q}\Theta^s_p,$$

$$W^-_{p,q,\widetilde{\omega},s}=\sum_{\substack{p''\\ (p''<p)}} K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^-_{p,p''})V^-_{p,p'',q}\Theta^s_p.$$

В силу (5.3) из (7.5) получаем следующее основное представление:

$$f(\widetilde{x}) = \left(\sum_{\substack{\mu=0,\,1 \\ p,\, q,\, p',\, q' \\ \widetilde{\omega},\, \widetilde{\omega}',\, s,\, s',\, r_p,\, r_{p'} \\ p<p' \\ \theta(p,\, q,\, p',\, q')=1 \\ f[\widetilde{\sigma}_1(\widetilde{\omega},\, \widetilde{\omega}',\, s,\, s',\, r_p,\, r_{p'}),\, \widetilde{\sigma}_2(p,\, q,\, p',\, q'),\, \mu]=1}} z^{\mu} W^{+}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega},\, s} \,\& \right.$$

$$\left. \& x^{\neg \xi^{s,\, r_p}}_{1,\, p,\, r_p} W^{-}_{p',\, q',\, \widetilde{\omega}',\, s'} x^{\neg \xi^{s',\, r_{p'}}}_{1,\, p',\, r_{p'}} \right). \tag{7.6}$$

Схема для $f(\widetilde{x})$ строится в соответствии с (7.6) следующим образом:

1. Блок C_0 выдает константу 0, блок C_1 выдает константу 1; $L(C_0)+L(C_1)=2$.

2. Блок I выдает инверсии аргументов $\neg x_i$, $i=1, \ldots, n$; $L(I)=0$.

3. Блок D выдает всевозможные функции $u^{\mu}x^{\nu}_{1,\, p,\, r_p}$, μ, $\nu=0$, 1; $p=1, \ldots, 2k$; $r_p=1, \ldots, r$; $L(D)=8kr$.

4. Блок S выдает всевозможные функции Θ^{s}_{p}, $p=1, \ldots, 2k$, $s=1, \ldots, \frac{2^r}{r}$; $L(S)<2k2^{r+1}$.

5. Блоки M^+, M^- выдают всевозможные функции $K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{+}_{p,\, p'})$, $K_{\widetilde{\omega}}(\mathfrak{M}^{-}_{p,\, p'})$; $L(M^+)=L(M^-)\leqslant 8k^2 2^{r(k-1)}$.

6. Блок V выдает всевозможные функции $K_{\widetilde{\sigma}_2}(\widetilde{x})$; $L(V)<2^{t+1}$.

7. Блоки V^+, V^- выдают всевозможные функции $V^{+}_{p,\, p',\, q}$, $V^{-}_{p,\, p',\, q}$, p, $p'=1, \ldots, 2k$; q, $q'=1, \ldots, T$; $L(V^+)=L(V^-)=0$.

8. Блоки W^+, W^- выдают всевозможные функции $W^{+}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega},\, s}$, $W^{-}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega},\, s}$; $L(W^+)+L(W^-)<8k^2T\frac{2kr}{r}$.

9. Блок A выдает функцию $f(\widetilde{x})$ и состоит из $2kT$ соединенных между собой блоков $A^{p,\, q}$.

Блок $A^{p,\, q}$ состоит из $\frac{2^{kr}}{r}$ блоков $X^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s}$. Блок $X^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s}$ имеет следующее строение. Занумеруем r элементов, реализующих конъюнкцию, числами $u=1, \ldots, r$, обозначим эти элементы символами $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s,\, u}$. Введем одно общее определение. Будем говорить, что выход элемента φ_v подается на выход элемента φ_w, если выход элемента φ_v подается во все узлы схемы, в которые подается выход элемента φ_w. На один вход элемента $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s,\, u}$ подаем функцию $zx^{\neg \xi^{s,\, u}}_{1,\, p,\, u}$, на другой — функцию $(\neg z)\, x^{\neg \xi^{s,\, u}}_{1,\, p,\, u}$. Функцию $W^{+}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega},\, s}$ подаем на оба входа и на выход каждого элемента $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s,\, u}$, $u=1, \ldots, r$. Выходы всех элементов $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s,\, u}$ подаем на один вход элемента, реализующего конъюнкцию (обозначим этот элемент через $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s}$), на другой вход которого подаем функцию $W^{-}_{p,\, q,\, \widetilde{\omega},\, s}$. Выходы всех элементов $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s}$ подаем на выход блока $A^{p,\, q}$ (рис. 13).

Входы элементов $K^{p,\, q}_{\widetilde{\omega},\, s,\, u}$ назовем *рабочими входами*, выходы — *рабочими выходами блока* $A^{p,\, q}$. Блок $A^{p,\, q}$ имеет 2^{rk+1} рабочих входов и 2^{rk} рабочих выходов.

По построению,

$$L(A^{p,\, q}) = 2^{rk}\left(1+\frac{1}{r}\right).$$

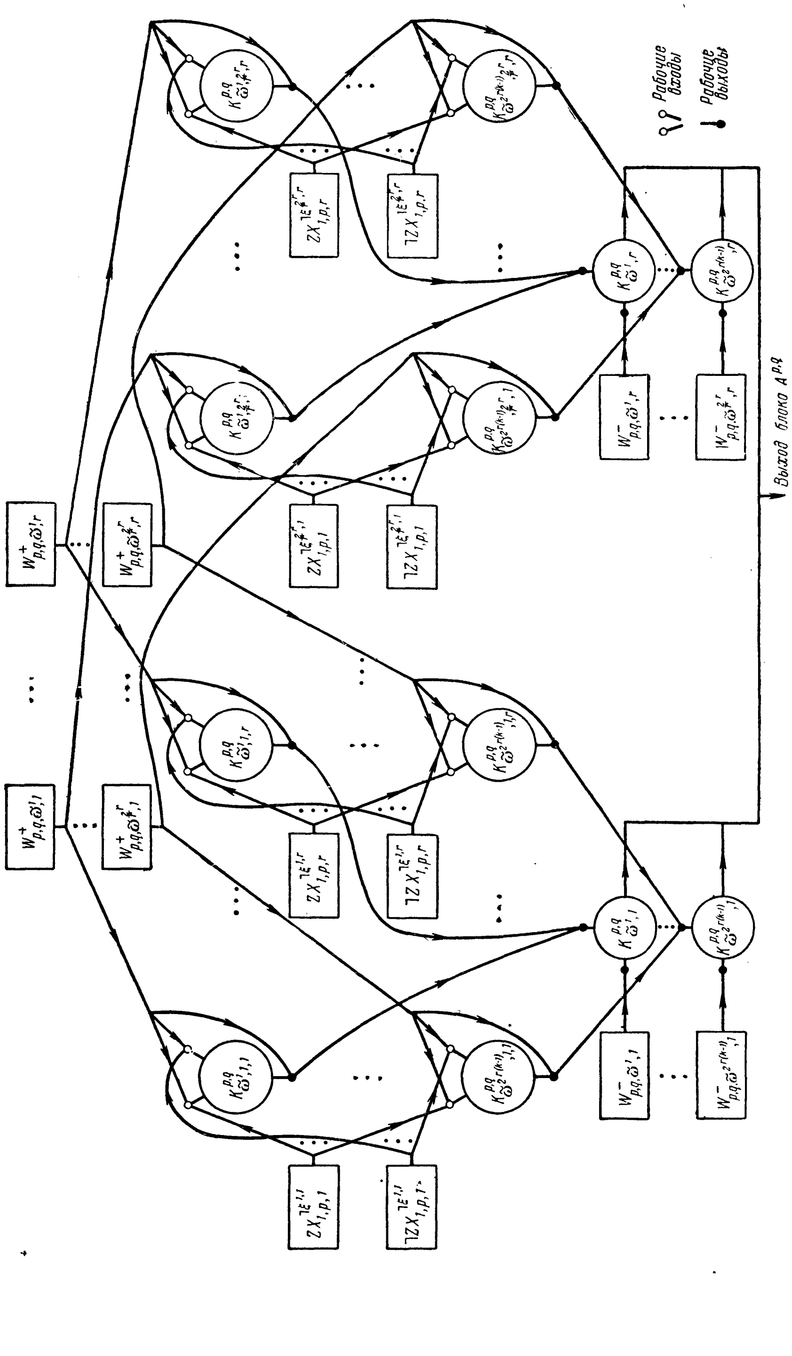


Рис. 13.

При синтезе схемы для $f(\widetilde{x})$ выходы всех блоков $A^{p,q}$ подаем на выход схемы и некоторые рабочие выходы блоков $A^{p,q}$ подаем на некоторые рабочие входы и выходы блоков $A^{p',q'}$, где $p < p'$.

Соединение блоков показано на рис. 14. Блок C_0 на рис. 14 не показан, его выходы подаются на некоторые входы элементов, реализующих конъюнкцию, так, чтобы в результате на каждый вход каждого такого элемента подавалось нечетное число узлов.

Отметим факт, подобный установленному в предыдущем параграфе. Пусть схема $\mathfrak{A}$, построенная описанным выше методом синтеза, реализует функцию $g(\mathfrak{A})$. Из формулы (7.6) и определения блоков $A^{p,q}$ следует,

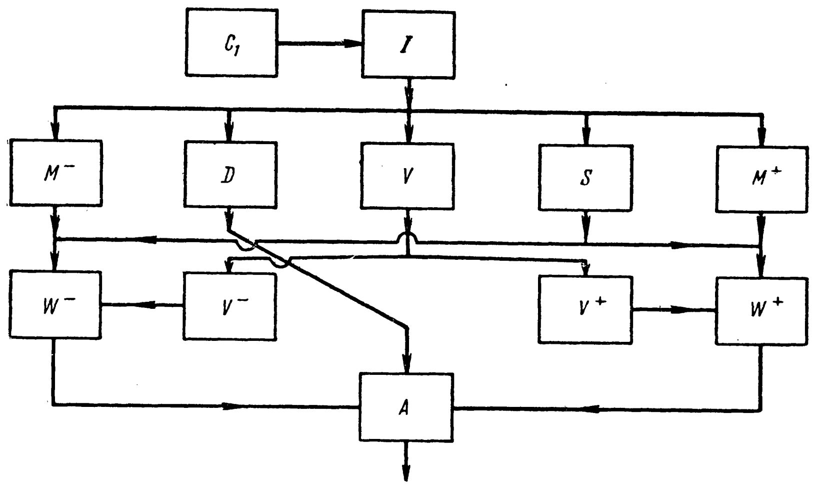


Рис. 14.

что для всякой функции $\varphi(\widetilde{x})$ и для всяких фиксированных p_1, q_1, p_1', q_1' где $p_1 < p_1'$, всегда можно так изменить соединения рабочих выходов блока A^{p_1,q_1} с рабочими входами и выходами блока $A^{p_1',q_1'}$, не изменяя других соединений, что новая схема будет реализовать функцию

$$g'(\widetilde{x}) = \varphi(\widetilde{x})\, V_{p_1,q_1,p_1',q_1'} \oplus g(\mathfrak{A}) \neg V_{p_1,q_1,p_1',q_1'} \oplus \sum_{\substack{p'',q'',p''',p''' \\ (p'''-p''>p_1'-p_1)}} V_{p'',q'',p''',q'''}\, h_{\mathfrak{A}}^{p'',q''p''',q'''}(\widetilde{x}). \tag{7.7}$$

Последнее равенство позволяет описать схему для $f(\widetilde{x})$ как результат процесса соединения блоков $A^{p,q}$ с блоками $A^{p',q'}$, аналогичного процессу, описанному в предыдущем параграфе.

Имеем

$$L(n) \leqslant 2 + 8kr + k2^{r+2} + 8k^2 2^{r(k-1)} + 8k^2 T \frac{2^{kr}}{r} + 2kT2^{rk}\left(1 + \frac{1}{r}\right).$$

Выберем параметры r, k, t так, чтобы $r \to \infty$, $k \to \infty$, $t \to \infty$, $\frac{n}{2} - t \to \infty$, Для этого положим

$$\varrho = [\log_2 n - \log_2 \log_2 n], \quad k = \left[\frac{3}{8}\frac{n}{r}\right], \quad t = n - 2kr - 1.$$

Тогда $L(n) \lesssim^{n/2} 2$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Яблонский С. В., Основные понятия кибернетики, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 2, М., Физматгиз, 1959, 1—38.
[2] Shannon C. E., The synthesis of two-terminal switching circuits, Bell Syst. Techn I. 28, 1, 1949, 59—98.
[3] Лупанов О. Б., Об одном методе синтеза схем, Известия высших учебных заведений, Радиофизика 1, 1, 1958, 120—140.
[4] Лупанов О. Б., О вентильных и контактно-вентильных схемах, ДАН 111, 6, 1956, 1171—1174.
[5] Лупанов О. Б., О синтезе контактных схем, ДАН 119, 1, 1958, 23—26.
[6] Марков А. А., Об инверсионной сложности систем функций, ДАН 116, 6, 1957, 917—919.
[7] Нечипорук Э. И., О многополюсниках, реализующих функции многозначной логики, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 5, М., Физматгиз, 1961, 49—60.
[8] Поваров Г. Н., О групповой инвариантности булевых функций, Применение логики в науке и технике, М., изд-во АН СССР, 1960, 263—340.
[9] Post E. L., Two-valued iterative systems of mathematical logic, Annals of. Math. Studies 5, Princeton Univ. Press; Princeton—London, 1941.
[10] Кузнецов А. В., О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики, Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР 51, 1958, 186—225.
[11] Жегалкин И. И., О технике вычислений предложений в символической логике, Математический сборник 34, 1927, 9—28.
[12] Кричевский Р. Е., О реализации функций суперпозициями, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 2, М., Физматгиз, 1959, 123—138.
[13] Нечипорук Э. И., О сложности суперпозиций в базисах, содержащих нетривиальные линейные формулы с нулевыми весами, ДАН 136, 1961, 560—563.
[14] Нечипорук Э. И., О синтезе R-схем, ДАН 136, 6, 1961, 1078—1081.
[15] Нечипорук Э. И., О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами, ДАН 139, 6, 1961, 1302—1303.

Поступило в редакцию 17 VI 1961