ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
Сборник трудов
Выпуск 5 Института математики СО АН СССР 1965 г.

МИНИМАЛЬНАЯ СХЕМА ИЗ ЗАМЫКАЮЩИХ КОНТАКТОВ ДЛЯ ОДНОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ОТ n АРГУМЕНТОВ

Р.Е.Кричевский

В работе [I] О.Б.Лупанов показал, что любая контактная схема из замыкающих контактов, реализующая функцию

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{1\le i<j\le n} x_i x_j ,$$

содержит не менее

$$\frac{c_1 \cdot n \cdot \log_2 n}{\log_2 \log_2 n}$$

контактов. В работе [2] (подробное изложение в [3]) автор усилил эту нижнюю оценку до $c_2 \cdot n \cdot \log_2 n$, $c_2 < 1$, что с точностью до константы совпадает с известной из [4] верхней оценкой. Кроме того, в [2] было показано, что для $f_n(x_1,\dots,x_n)$ существует минимальная параллельно-последовательная схема без размыкающих контактов. Затем в работе [5] Г.Анзелем было показано, что контактная схема из замыкающих контактов для

$$f_n(x_1,\dots,x_n)$$

содержит не менее $n \cdot \log_2 n$ контактов, что асимптотически совпадает с верхней оценкой [4]. В настоящей заметке находится точное значение числа замыкающих контактов , необходимого для реализации $f_n(x_1,\dots,x_n)$. Оказывается, что построенная в [4] методом "деления пополам" схема для $f_n(x_1,\dots,x_n)$

является минимальной в классе схем без размыкающих контактов. Результат заметки является простым следствием результата Ан - зеля и одной леммы автора, приведенной в [2] и [3] .

Число контактов в некоторой схеме S будем обозначать через $L(S)$; через $L(n)$ обозначим минимальное число контактов, необходимое для реализации $f_n(x_1,\ldots,x_n)$ в классе схем из замыкающих контактов.

Очевидно, справедлива формула (I) :

$$f_n(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{1\le i<j\le n} x_i x_j = (x_1\vee\ldots\vee x_k)(x_{k+1}\vee\ldots\vee x_n)\vee$$
$$\vee f_k(x_1,\ldots,x_k)\vee f_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n).$$

Схему, получаемую последовательным применением формулы (I) при $k=\left[\frac{n}{2}\right]$, обозначим A_n . Как нетрудно подсчитать (выкладки см. в [3]), A_n содержит

$$n\left[\log_2 n\right] + 2(n-2^{[\log_2 n]})$$

контактов, откуда вытекает неравенство (2) :

$$L(n) \le n\left[\log_2 n\right] + 2(n-2^{[\log_2 n]}) . \tag{2}$$

ТЕОРЕМА. Схема A_n является минимальной в классе контактных схем без размыкающих контактов; для $L(n)$ справедливо равенство (3) :

$$L(n) = n\left[\log_2 n\right] + 2(n-2^{[\log_2 n]}) . \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через m_i число контактов реле x_i в некоторой схеме из замыкающих контактов, реализующей $f_n(x_1,\ldots,x_n)$. Как показано в [5] , для любой такой схемы справедливо неравенство (4) :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{m_i}} \le 1 . \tag{4}$$

В лемме I работы [3] устанавливается, что существует такая минимальная схема S' , для которой

$$m_1 = \ldots = m_p = m-1,\ m_{p+1} = \ldots = m_n = m, \tag{5}$$
$$0 \le p < n$$

(в лемме I доказательство дано для π –схем, но оно проходит без изменений для произвольных контактных схем из замыкающих контактов). Для минимальной схемы S, удовлетворяющей соотношениям (5), неравенство (4) примет вид (6):

$$n + p \leqslant 2^{m} . \tag{6}$$

пусть $[\log_2 n] = k$, тогда

$$2^{k} \leqslant n < 2^{k+1} . \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что $m \geqslant k$, причем равенство достигается лишь при $n = 2^{k}$ и $p = 0$, и тогда

$$L(n) = nm = n[\log_2 n] + 2(n - 2^{[\log_2 n]}),$$

то есть в случае $m = k$ равенство (3) доказано. С другой стороны, если $m \geqslant k+2$, то

$$L(S) = n(k+2) - p > n(k+1) > nk + 2(n - 2^{k}) = L(A_n),$$

что противоречит минимальности S. Таким образом, осталось рассмотреть случай $m = k+1$. Тогда из (6) $p \leqslant 2^{k+1} - n$ и для $L(S)$ имеем:

$$L(S) = nm - p \geqslant n(k+1) - 2^{k+1} + n =$$

$$= nk + 2(n - 2^{k}) = L(A_n)$$

и равенство (3), а вместе с ним и теорема, доказаны.

Литература

1. О.Б.Лупанов. О сравнении сложности реализации монотонных функций контактными схемами, содержащими лишь замыкающие контакты, и произвольными схемами.– ДАН СССР, 144, № 6, 1962.

2. Р.Е.Кричевский. Сложность контактных схем, реализующих одну функцию алгебры логики.– ДАН СССР, 151, 4, 1963 г.

3. Р.Е.Кричевский. О сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих одну последовательность булевых функций.– Сб. "Проблемы кибернетики", выпуск 12, М, 1964 г.

4. В.К.Коробков. Реализация симметрических функций в классе $\tilde{\pi}$ -схем.— ДАН СССР, I09, 2, I966.

5. G.Hansel. Nombre minimal de contacts de fermeture necessaires pour realiser une fonction booleenne symetrique, C.R. Acad. Sc.Paris, 1964, 258, N25,p 6037-6040.