МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА
В СИНТЕЗЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Сборник трудов
1978 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 32

УДК 519.95

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ СЛОЖНОСТЬЮ И ГЛУБИНОЙ ФОРМУЛ

В.М.Храпченко

Формулой над базисом $Б$ будем называть

1) символ любой булевой переменной,
2) любую последовательность символов вида

$$\varphi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k), \qquad (1)$$

где φ - символ k -местной булевой функции, принадлежащей базису $Б$, а $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ - формулы над базисом $Б$. В формуле (1) функцию φ будем называть внешней операцией, а Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ - главными подформулами.

Каждую формулу Φ будем характеризовать двумя параметрами: сложностью, обозначаемой через $L(\Phi)$, и глубиной, обозначаемой через $D(\Phi)$. По определению, $L(\Phi)$ - это число символов переменных в формуле Φ. Величина $D(\Phi)$ определяется индуктивно:

1) для формулы Φ, состоящей из символа переменной,

$$D(\Phi) = 0;$$

2) если Φ - формула вида (1), то

$$D(\Phi) = 1 + \max_{1 \leq i \leq k} D(\Phi_i).$$

Каждой булевой функции f сопоставим два числа:

$$L_Б(f) = \min L(\Phi),$$
$$D_Б(f) = \min D(\Phi),$$

где минимум берется по всем формулам Φ в базисе $Б$, реализующим функцию f .

В 1967 г. автор доказал (см. [1, с. 5]) следующее утверждение: для любого полного конечного базиса $Б$ существуют такие константы c и d, что для всякой булевой функции f справедливо неравенство

$$\mathcal{D}_Б(f) \leqslant c \log_2 L_Б(f) + d. \tag{2}$$

Поскольку аналогичная нижняя оценка для $\mathcal{D}_Б(f)$ (с другими константами) получается тривиально, тем самым было установлено, что для любого полного конечного базиса $Б$

$$\mathcal{D}_Б(f) \asymp \log_2 L_Б(f).$$

С тех пор соотношение (2) было получено в работе [4]. Далее, в работе [2] было показано, что для базиса $\{\&, \vee, ^-\}$ константа $c \leqslant 2$, а затем в работе [3] эта оценка была улучшена до оценки $c \leqslant 1{,}82$.

Здесь приводится доказательство того, что для базиса $\{\&, \vee, ^-\}$ константа $c \leqslant 1{,}73$. Иными словами, доказывается, что в случае базиса $\{\&, \vee, ^-\}$ при некотором фиксированном d для всякой булевой функции f справедливо неравенство

$$\mathcal{D}(f) \leqslant 1{,}73 \log_2 L(f) + d \tag{3}$$

(индексы, указывающие базис, для краткости опущены).

Неравенство (3) устанавливается путем выполнения такого преобразования, которое любую формулу над базисом $\{\&, \vee, ^-\}$, имеющую сложность N , переводит в эквивалентную ей формулу (над тем же базисом), имеющую глубину не более $1{,}73 \log_2 N + d$. Разумеется, сложность при этом может возрастать.

§ 1

Начнем с описания основных эквивалентных преобразований, которыми мы будем пользоваться. Прежде всего заметим, что с помощью соотношений

$$\overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}, \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \& \bar{y}, \quad \bar{\bar{x}} = x$$

любую формулу над базисом $\{\&, \vee, ^-\}$ можно преобразовать в эквивалентную ей формулу той же сложности, содержащую знаки отрицания лишь над символами переменных. Благодаря этому преобразование формул над базисом $\{\&, V, ^{-}\}$ сводится к преобразованию формул над неполным базисом $\{\&, V\}$, а учет операции отрицания увеличивает константу d в неравенстве (3) лишь на I.

Итак, сосредоточим наше внимание на эквивалентных преобразованиях формул над неполным базисом $\{\&, V\}$. Пусть φ - какая-нибудь формула над базисом $\{\&, V\}$, а X - произвольная ее подформула. Тогда φ можно представить в следующем виде:

$$\varphi = F(X, \ldots), \tag{4}$$

где F - некоторая формула. В силу монотонности F справедливы соотношения:

$$F(X, \ldots) = (X \& F(1, \ldots)) \vee F(0, \ldots), \tag{5}$$

$$F(X, \ldots) = (X \vee F(0, \ldots)) \& F(1, \ldots), \tag{6}$$

где в правой части стоят формулы над базисом $\{\&, V\}$, получающиеся в результате выполнения указанных подстановок и тождественных преобразований:

$$x \& 1 = x, \quad x \vee 1 = 1,$$
$$x \& 0 = 0, \quad x \vee 0 = x$$

(с учетом коммутативности конъюнкции и дизъюнкции).

Соотношения (5) и (6) допускают обобщение. Представим формулу $F(X, \ldots)$ в следующем виде:

$$F(X, \ldots) = (\ldots(\ldots((X \overset{1}{*} \psi_1) \overset{2}{*} \psi_2)\ldots) \overset{i}{*} \psi_i)\ldots) \overset{m}{*} \psi_m, \tag{7}$$

где каждый символ $\overset{i}{*}$ представляет собой либо $\&$, либо V. Обозначим через $F^{\&}$ конъюнкцию тех подформул ψ_i, для которых $\overset{i}{*}$ есть $\&$ (если таких формул нет, то положим $F^{\&} \equiv 1$), и через F^{V} - дизъюнкцию тех подформул ψ_i, для которых $\overset{i}{*}$ есть V (если таких подформул нет, то положим $F^{V} \equiv 0$), т.е.

$$F^{\&} = \underset{\overset{i}{*} = \&}{\&} \psi_i, \quad F^{V} = \underset{\overset{i}{*} = V}{V} \psi_i.$$

Нетрудно проверить (например, раскрывая скобки в (7)), что

$$F^{\&} \vee F(0, \ldots) = F(1, \ldots), \tag{8}$$

$$F^{V} \& F(1, \ldots) = F(0, \ldots). \tag{9}$$

Пусть теперь F^1 - произвольная формула, удовлетворяющая условию
$$F^{\&} \leqslant F^1 \leqslant F(1, \ldots) .$$
Тогда в силу (8) и монотонности F (а также монотонности V)
$$F^1 \vee F(0, \ldots) = F(1, \ldots)$$
и, следовательно,
$$F(X, \ldots) = (X \,\&\, F^1) \vee F(0, \ldots) . \qquad (5')$$
Точно так же, если F^0 - произвольная формула, удовлетворяющая условию
$$F^{\vee} \geqslant F^0 \geqslant F(0, \ldots) ,$$
то в силу (9) и монотонности F (а также монотонности $\&$)
$$F^0 \,\&\, F(1, \ldots) = F(0, \ldots)$$
и, следовательно,
$$F(X, \ldots) = (X \vee F^0) \,\&\, F(1, \ldots) . \qquad (6')$$
Равенствами (5′) и (6′) мы и будем пользоваться при выполнении эквивалентных преобразований, причем почти во всех случаях будем полагать
$$F^1 = F^{\&} , \quad F^0 = F^{\vee} .$$

Введем одно соглашение, которое облегчит нам подсчет сложности формул, получающихся при эквивалентных преобразованиях. Обратимся к соотношению (4). Если входящая сюда формула F никогда не рассматривается изолированно, а всегда в рамках соотношения вида (4), то ее сложность удобно положить равной числу символов переменных формулы φ , не входящих в подформулу X . При этом
$$L(\varphi) = L(F) + L(X) , \qquad (10)$$
$$L(F) = L(F^{\&}) + L(F^{\vee}) \qquad (11)$$
(см. определение $F^{\&}$ и $F^{\vee}$).

Проиллюстрируем применение равенств (5′) и (6′) для получения в случае базиса $\{\&, V\}$ оценок вида (2). Пусть φ - произвольная формула (над базисом $\{\&, V\}$), причем
$$L(\varphi) = N . \qquad (12)$$
Допустим, что для любой формулы ψ , удовлетворяющей условию

$$L(\Psi) = M, \quad M < N, \tag{13}$$

уже установлено существование эквивалентной ей формулы $\tilde{\Psi}$, у которой

$$D(\tilde{\Psi}) \leqslant \log_a M + d, \tag{14}$$

где a - некоторая константа $(a > 1)$. Докажем, что тогда для формулы Φ существует эквивалентная ей формула $\tilde{\Phi}$, у которой

$$D(\tilde{\Phi}) \leqslant \log_a N + d. \tag{15}$$

Если $N \geqslant a^3$, то в формуле Φ можно найти такую подформулу $X = X_1 * X_2$, что сама формула X удовлетворяет неравенству

$$L(X) > \frac{N}{a^3}, \tag{16}$$

а ее главные подформулы X_1 и X_2 подобному неравенству уже не удовлетворяют, т.е.

$$L(X_1) \leqslant \frac{N}{a^3}, \quad L(X_2) \leqslant \frac{N}{a^3}. \tag{17}$$

(Формулу X проще всего найти, рассматривая формулу Φ и выбирая в ней главную подформулу Φ' сложности более N/a^3, затем рассматривая формулу Φ' и выбирая в ней главную подформулу Φ'' сложности более N/a^3 и т.д. до тех пор, пока процесс не оборвется.)

Формулу Φ можно представить теперь в следующем виде (ср. с (4)):

$$\Phi = F(X_1 * X_2, \ldots).$$

Если $L(F^{\&}) \leqslant L(F^{\vee})$, то выполним эквивалентное преобразование в соответствии с равенством (5′), а если $L(F^{\&}) > L(F^{\vee})$, то в соответствии с равенством (6′), полагая $F^1 = F^{\&}$, $F^0 = F^{\vee}$. В первом случае получим

$$F(X_1 * X_2, \ldots) = ((X_1 * X_2) \,\&\, F^{\&}) \vee F(0, \ldots),$$

что схематически изображено на рис. I. Здесь X_1 и X_2 удовлетворяют неравенствам (17), а для $F(0, \ldots)$ и $F^{\&}$ в силу (10), (12), (16), (11) и благодаря условию

$$L(F^{\&}) \leqslant L(F^{\vee})$$

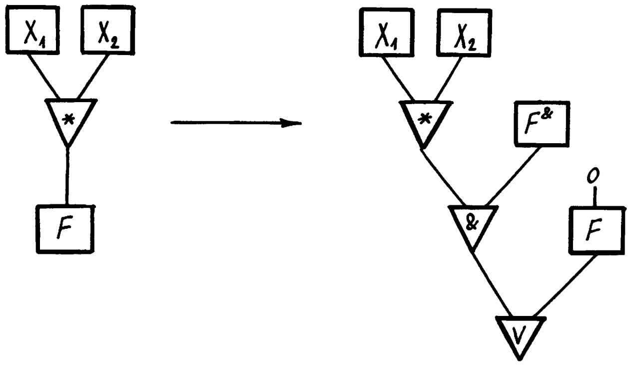

Рис. I

выполняются такие неравенства:

$$L(F(0,\ldots)) \leqslant L(F) \leqslant N\left(1-\frac{1}{a^3}\right), \qquad (18)$$

$$L(F^{\&}) \leqslant \frac{1}{2}L(F) \leqslant \frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{a^3}\right). \qquad (19)$$

Введем два условия:

I) $1-\frac{1}{a^3} \leqslant \frac{1}{a}$, 2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^3}\right) \leqslant \frac{1}{a^2}$.

Тогда в силу (I8) и (I9) будут выполняться следующие неравенства:

$$L(F(0,\ldots)) \leqslant \frac{N}{a}, \quad L(F^{\&}) \leqslant \frac{N}{a^2}.$$

Поскольку $a > 1$, эти неравенства означают, что для $F(0,\ldots)$ и $F^{\&}$ выполнены соотношения вида (I3). Но тогда формулу $F(0,\ldots)$ можно заменить эквивалентной ей формулой $\tilde{F}(0,\ldots)$, у которой (см. (I4))

$$\mathcal{D}(\tilde{F}(0,\ldots)) < \log_a\left(\frac{N}{a}\right) + d = \log_a N + d - 1,$$

а формулу $F^{\&}$ можно заменить эквивалентной ей формулой $\tilde{F}^{\&}$, у которой

$$D(\tilde{F}^{\&}) \leqslant \log_a\left(\frac{N}{a^2}\right) + d = \log_a N + d - 2.$$

Точно так же из (I7) следует, что формулы X_1 и X_2 можно заменить эквивалентными им формулами $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$, у которых

$$D(\tilde{X}_1) \leqslant \log_a\left(\frac{N}{a^3}\right) + d = \log_a N + d - 3,$$

$$D(\tilde{X}_2) \leqslant \log_a\left(\frac{N}{a^3}\right) + d = \log_a N + d - 3.$$

Из рис. I видно, что если произвести все эти замены, то мы получим формулу $\tilde{\Phi}$, эквивалентную формуле Φ и удовлетворяющую неравенству (I5).

В случае, когда $L(F^{\&}) > L(F^{\vee})$, рассуждение проводится двойственным образом и приводит к тем же условиям I) и 2). Остается выбрать число a, удовлетворяющее этим условиям (оценка тем лучше, чем больше a). Полагаем a = I,465. При этом из (I5) мы получаем

$$D(\tilde{\Phi}) \leqslant \frac{1}{\log_2 a}\log_2 N + d \leqslant 1{,}82\log_2 N + d.$$

Подчеркнем, что индуктивный переход, который мы сделали, возможен лишь при $N \geqslant a^3$. Начальные шаги индукции обеспечиваются надлежащим выбором константы d. Тем самым мы доказали в случае базиса $\{\&, \vee, ^{-}\}$ оценку (2) с константой c = I,82.

§ 2

Приступим непосредственно к доказательству оценки (3). Как и выше, достаточно показать возможность индуктивного перехода при достаточно большом N.

Пусть Φ – произвольная формула (над базисом $\{\&, \vee\}$), для которой

$$L(\Phi) = N.$$

Найдем в формуле Φ (в предположении, что $N \geqslant a^4$) такую подформулу $\Phi_1 = \Phi_{11} \circ \Phi_{12}$, что

$$L(\Phi_1) > \frac{N}{a^4}, \tag{20}$$

$$L(\Phi_{11}) \leqslant \frac{N}{a^4}, \quad L(\Phi_{12}) \leqslant \frac{N}{a^4}. \tag{21}$$

Тем самым мы представим формулу φ в виде

$$\varphi = F(\varphi_1, \ldots).$$

Будем считать, что

$$L(F) > \frac{N}{a^4}$$

(иначе все тривиально - например, можно преобразовать φ в соответствии с равенством (5) или (6)). Найдем в формуле F такую подформулу $\varphi_2 = \varphi_{21} \,\square\, \varphi_{22}$, что

$$L(\varphi_2) > \frac{N}{a^4}, \tag{22}$$

$$L(\varphi_{21}) \leqslant \frac{N}{a^4}, \qquad L(\varphi_{22}) \leqslant \frac{N}{a^4} \tag{23}$$

(как мы договорились, символ переменной, стоящий в формуле F на месте φ_1 , при подсчете сложности не учитывается).

Для формулы φ возможны два случая, показанные на рис. 2.

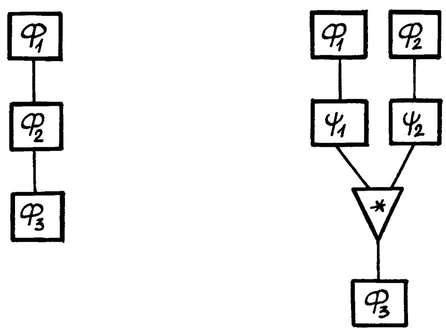

Рис. 2

Можно считать, что

$$L(\psi_1) \leqslant \frac{N}{a^4}, \qquad L(\psi_2) \leqslant \frac{N}{a^4}. \tag{24}$$

Действительно, если бы, например, не выполнялось первое из этих неравенств, то мы могли бы в формуле ψ_1 выделить подформулу с теми же свойствами, что и φ_2. Взяв эту подформулу в качестве φ_2, мы снова пришли бы к одному из двух случаев, показанных на рис. 2. Повторив эту операцию необходимое число раз, мы пришли бы либо к первому случаю, либо ко второму, но уже при выполненных неравенствах (24).

Рассмотрим по очереди оба случая.

СЛУЧАЙ I. Пусть, например,

$$L(\varphi_3^{\&}) < L(\varphi_3^{\vee})$$

(иначе рассуждаем двойственным образом). Выполним преобразования, как показано на рис. 3 (штриховой линией здесь и везде в дальнейшем мы выделяем часть формулы, играющую роль F в равенствах (5′) и (6′)).

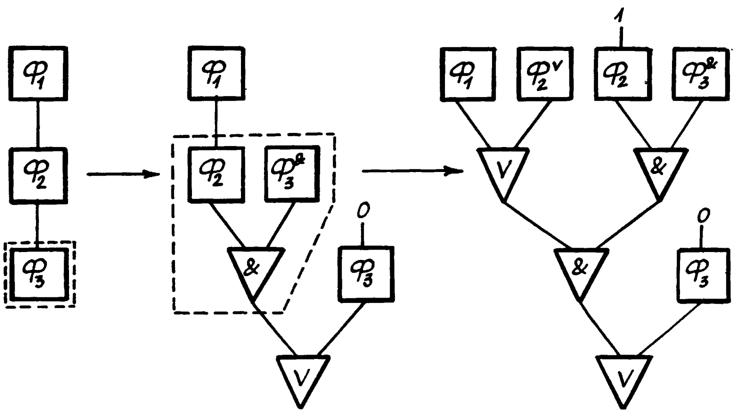

Рис. 3

В силу (2I) и (23) формулы φ_1, $\varphi_2^{\vee}$ и $\varphi_2(1, \ldots)$ уже подготовлены для индуктивного перехода. В силу (20) и (22)

$$L(\varphi_3) < N(1 - \frac{2}{a^4}) \qquad (25)$$

и (при рассматриваемом условии)

$$L(\varphi_3^{\&}) < \frac{N}{2}(1 - \frac{2}{a^4}) .$$

Поэтому для того, чтобы был возможен индуктивный переход, достаточно ввести условия:

$$1^{\circ}.\quad 1-\frac{2}{a^4}\leq\frac{1}{a}\ ;\qquad 2^{\circ}.\quad 1-\frac{2}{a^4}<\frac{2}{a^3}\ .$$

СЛУЧАЙ 2. Благодаря двойственности операций $\&$ и $\vee$ достаточно ограничиться рассмотрением такой формулы φ, у которой $*$ есть $\&$ (см. рис. 2).

Далее, будем считать, что

$$L(\varphi_2)+L(\psi_2)\leq L(\varphi_1)+L(\psi_1), \tag{26}$$

$$L(\psi_{12})<L(\varphi_{11}) \tag{27}$$

(этого всегда можно добиться соответствующим выбором обозначений). Разобьем случай 2 на ряд более мелких.

2.1. $\quad L(\varphi_3^{\vee})\leq\frac{N}{a^4}$.

Выполним преобразования, как показано на рис. 4 (последнее из них основано на ассоциативности операции $\&$).

В силу (20), (22) и условия 1°

$$L(\varphi_3)+L(\psi_1)+L(\psi_2)\leq\frac{N}{a}.$$

Поэтому в случае 2.1 возможен индуктивный переход (см. (21), (23), (24)).

2.2. $\quad L(\varphi_3^{\vee})>\frac{N}{a^4}$.

2.2.1. $\quad L(\varphi_1)+L(\psi_1)\leq\frac{N}{a^3}$.

Тогда в силу (26)

$$L(\varphi_2)+L(\psi_2)\leq\frac{N}{a^3}\ .$$

Выполним преобразование, показанное на рис. 5.

В силу (20), (22) и 2.2

$$L(\varphi_3^{\&})<N\left(1-\frac{3}{a^4}\right)\ .$$

Поэтому после введения нового условия

$$3^{\circ}.\quad 1-\frac{3}{a^4}<\frac{1}{a^2}$$

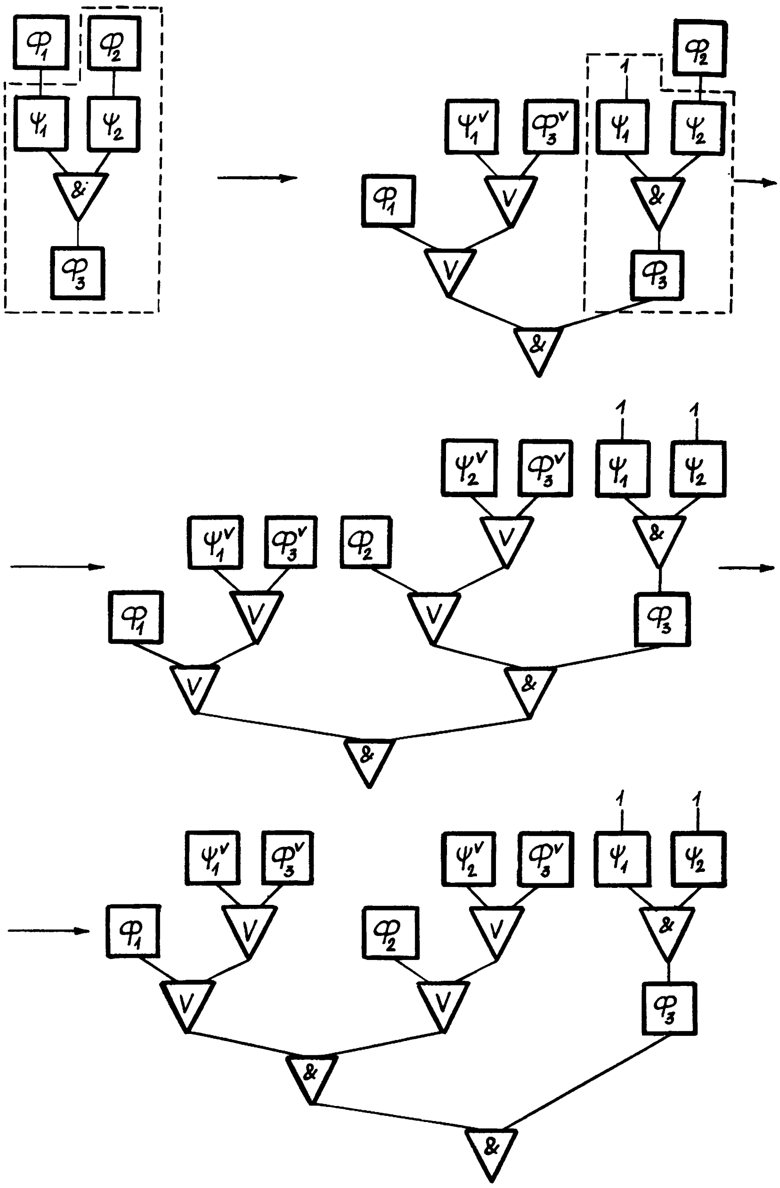
φ1
φ2
ψ1
ψ2
&
φ3
φ1
ψ1v
φ3v
V
V
1
φ2
ψ1
ψ2
&
φ3
&
1
1
ψ2v
φ3v
ψ1
ψ2
ψ1v
φ3v
φ2
V
&
φ1
V
V
φ3
V
&
&
1
1
ψ1v
φ3v
ψ2v
φ3v
ψ1
ψ2
φ1
V
φ2
V
&
V
V
φ3
&
&

Рис. 4

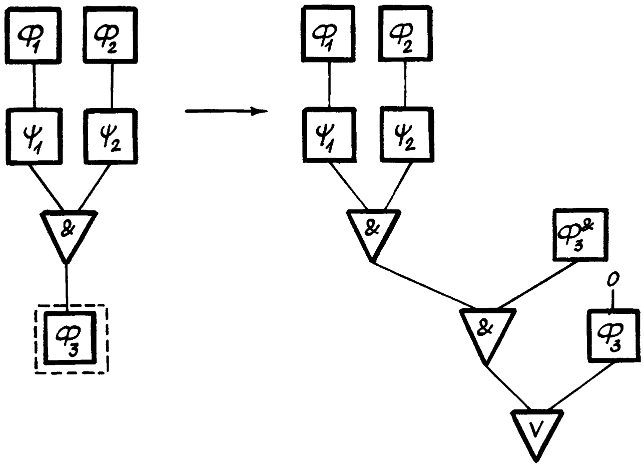

Рис. 5

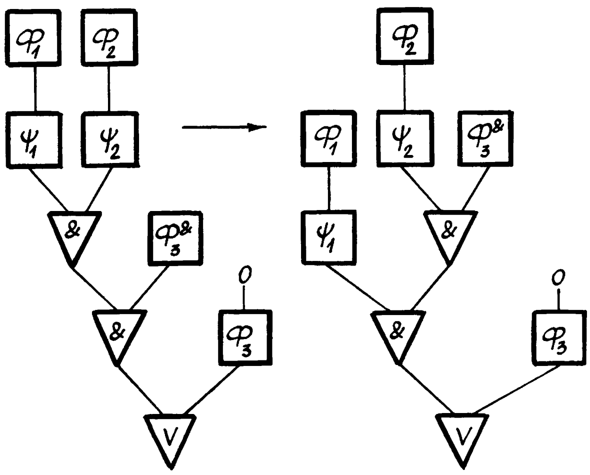

Рис. 6

в случае 2.2.I возможен индуктивный переход (см. (25) и условие I^0).

2.2.2. $$L(\varphi_1) + L(\psi_1) > \frac{N}{a^3}.$$

2.2.2.I. $$L(\varphi_3^{\&}) > \frac{N}{a^4}.$$

Продолжим преобразования, начатые на рис. 5, так,как показано на рис. 6.

В силу (22), 2.2, 2.2.2.I и условия 3^0

$$L(\varphi_1) + L(\psi_1) \leqslant \frac{N}{a^2}.$$

Далее, в силу (22), 2.2, 2.2.2 и условия 2^0

$$L(\varphi_3^{\&}) \leqslant \frac{N}{a^3},$$

а в силу 2.2, 2.2.2, 2.2.2.I и условия 2^0

$$L(\varphi_2) + L(\psi_2) \leqslant \frac{N}{a^3}.$$

Поэтому в случае 2.2.2.I возможен индуктивный переход (см. (25) и условие I^0).

2.2.2.2. $$L(\varphi_3^{\&}) \leqslant \frac{N}{a^4}.$$

2.2.2.2.I. $$L(\varphi_2) + L(\psi_2) \leqslant \frac{N}{a^3}.$$

Продолжим преобразования, начатые на рис. 5, так, как показано на рис. 7.

В данном случае индуктивный переход возможен в силу (2I), (24), 2.2.2.2, 2.2.2.2.I, а также (25) и условия I^0.

2.2.2.2.2. $$L(\varphi_{11}) \leqslant \frac{N}{a^5}.$$

Продолжим преобразования, начатые на рис. 5 и 7, так, как показано на рис. 8.

В силу (27) и 2.2.2.2.2

$$L(\varphi_{12}) \leqslant \frac{N}{a^5}.$$

Далее, в силу 2.2 и (26)

$$L(\varphi_2) + L(\psi_2) \leqslant \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{a^4}\right). \tag{28}$$

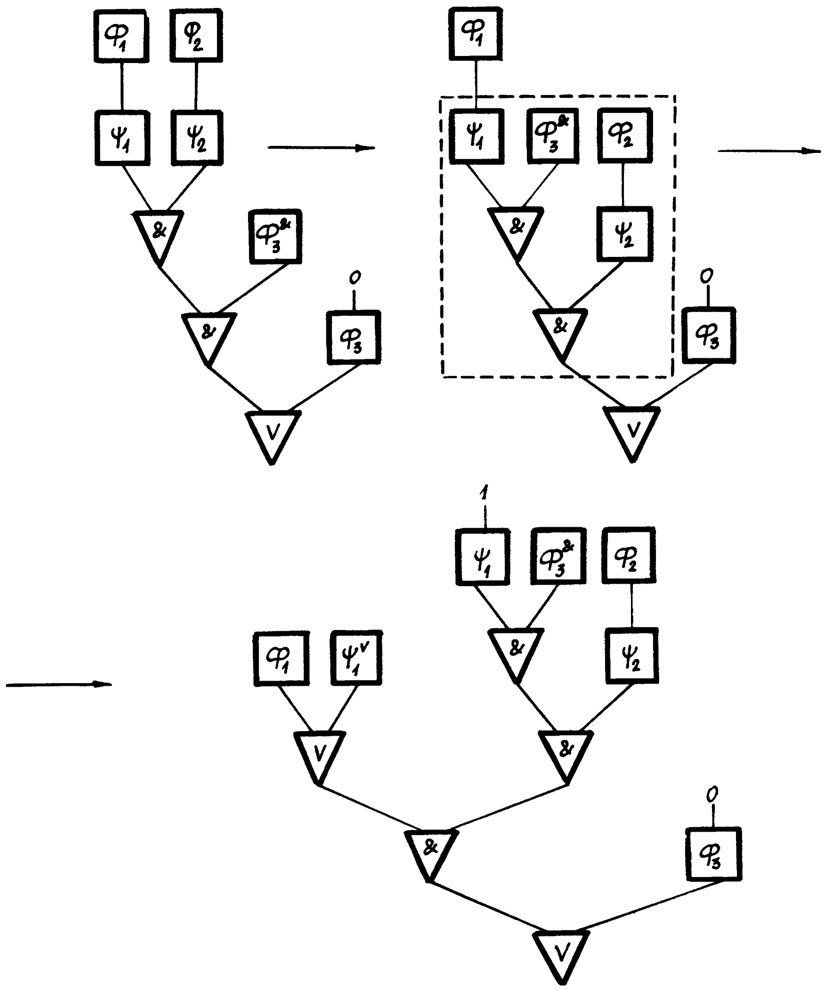

Рис. 7

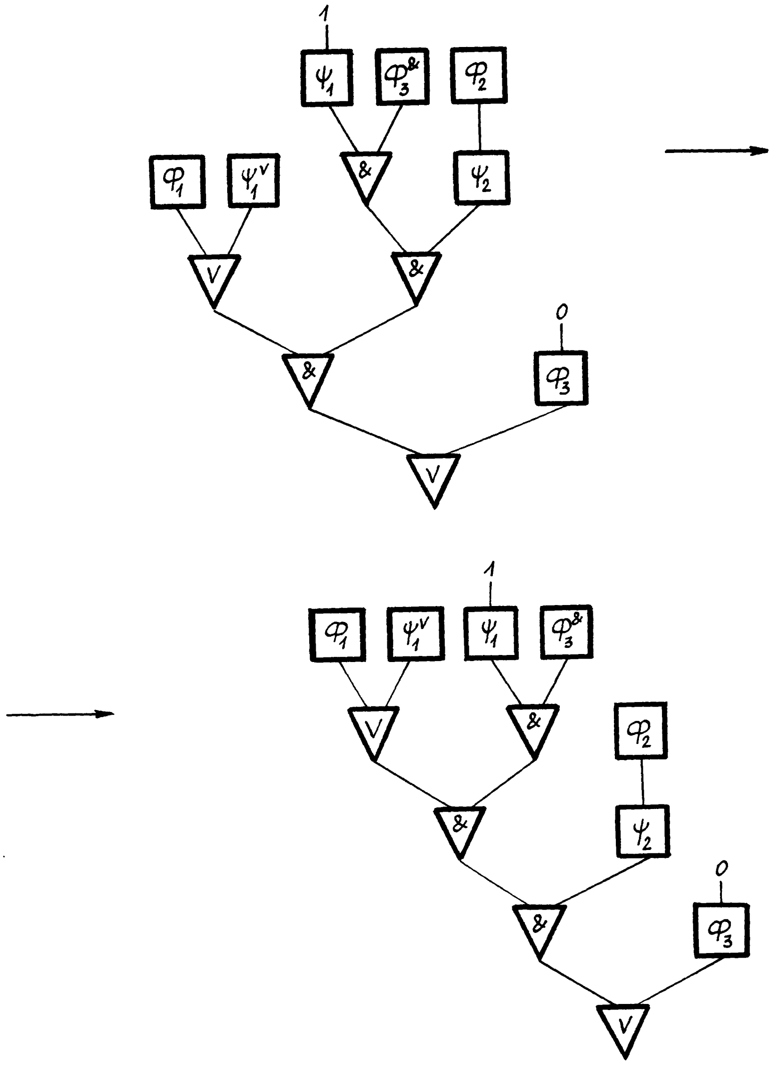

Рис. 8

Поэтому после введения нового условия

$$4^{\circ}. \quad 1-\frac{1}{a^4} \le \frac{2}{a^2}$$

в случае 2.2.2.2.2 возможен индуктивный переход (см. (24), 2.2.2.2, (25) и условие I°).

2.2.2.2.3 $\quad L(\varphi_{12}) + L(\psi_1) \le \frac{N}{a^4}$.

Вспомним, что $\varphi_1 = \varphi_{11} \circ \varphi_{12}$, и продолжим преобразования, начатые на рис. 5 и 7 (см. среднюю часть рис. 7), так, как показано на рис. 9.

В данном случае индуктивный переход возможен в силу (2I), 2.2.2.2.3, 2.2.2.2, (28), условия 4°, а также (25) и условия I°.

2.2.2.2.4. $\quad L(\varphi_2) + L(\psi_2) > \frac{N}{a^3}$,

$L(\varphi_{11}) > \frac{N}{a^5}$,

$L(\varphi_{12}) + L(\psi_1) > \frac{N}{a^4}$.

2.2.2.2.4.I. $\quad L(\varphi_1) + L(\psi_1) \le \frac{N}{a^2}$.

Выполним преобразование, показанное на рис. IO.

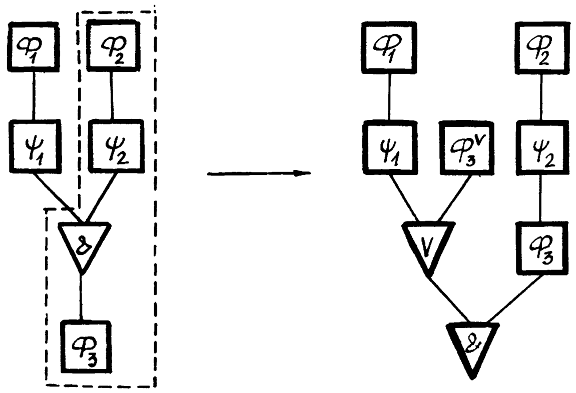

Рис. IO

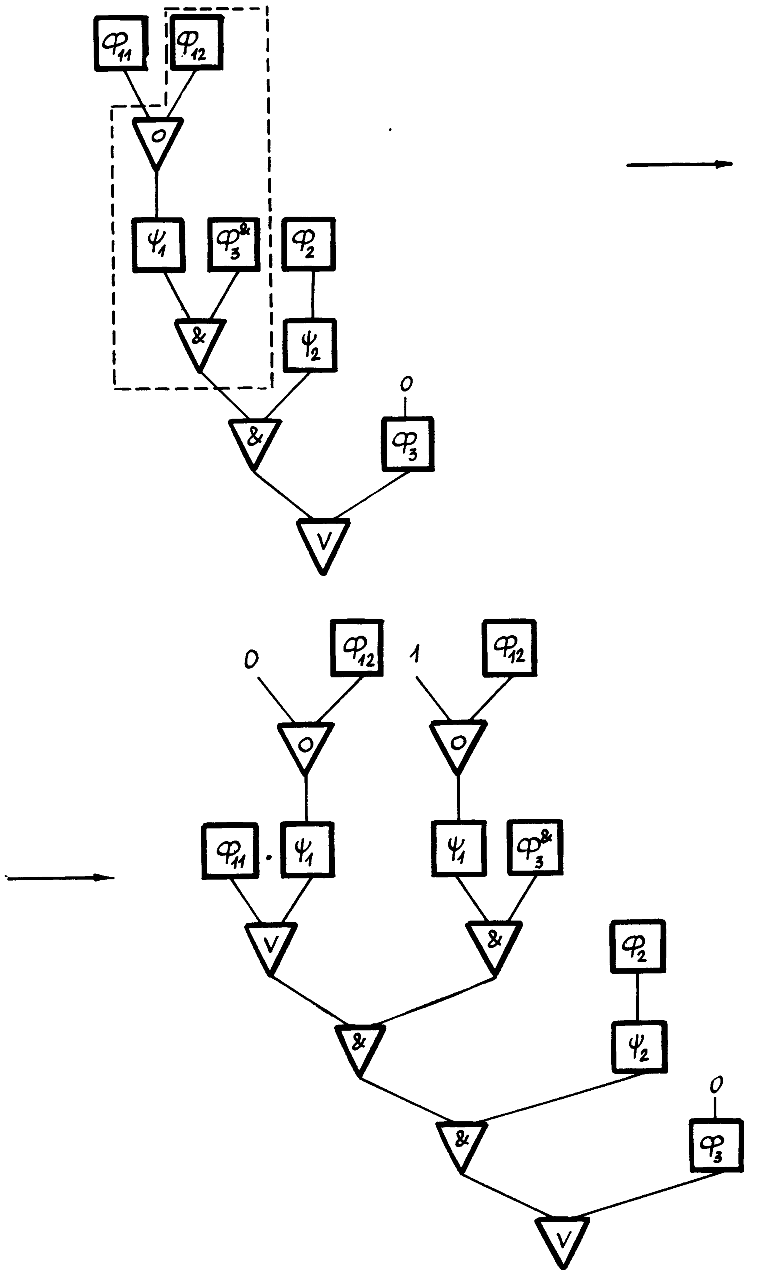

Рис. 9

В силу 2.2.2.2.4

$$L(\varphi_3^{\vee}) \leqslant N\left(1-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}\right)$$

и

$$L(\varphi_2) + L(\psi_2) + L(\varphi_3) \leqslant N\left(1-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}\right). \qquad (29)$$

Поэтому после введения новых условий

5°. $1-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5} \leqslant \frac{1}{a^2}$,

6°. $1-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5} \leqslant \frac{1}{a}$

в случае 2.2.2.2.4.I возможен индуктивный переход.

2.2.2.2.4.2. $L(\varphi_1) + L(\psi_1) > \frac{N}{a^2}$.

Продолжим преобразования, начатые на рис. IO, так, как показано на рис. II.

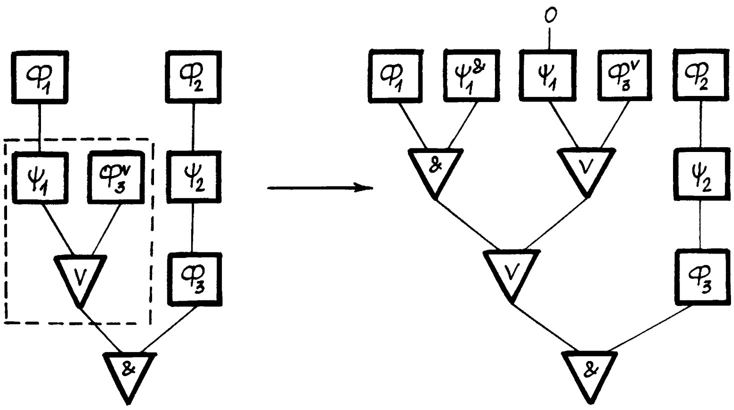

Рис. II

В силу 2.2.2.2.4 и 2.2.2.2.4.2

$$L(\varphi_3^{\vee}) \leqslant N\left(1-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right).$$

Поэтому после введения нового условия

7°. $\quad 1-\frac{1}{a^2}<\frac{2}{a^3}$

в случае 2.2.2.2.4.2 возможен индуктивный переход (см. (2I)), (24), (29) и условие 6°).

Итак, все случаи рассмотрены. Остается выбрать число a, удовлетворяющее условиям $I^{\circ}-7^{\circ}$. Полагаем $a=1{,}494$. При этом из (I5) мы получаем

$$D(\tilde{\Phi})\leqslant\frac{1}{\log_2 a}\log_2 N+d\leqslant 1{,}73\log_2 N+d.$$

Тем самым неравенство (3) доказано.

Литература

I. ЯБЛОНСКИЙ С.В., КОЗЫРЕВ В.П. Математические вопросы кибернетики. - "Информационные материалы" Научного совета по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР, М., I968, вып. I9а, с. 3-I5.

2. BARAK A., SHAMIR E. On the parallel evaluation of boolean expressions. "SIAM J.Computers,1976, v. 5, N 4, p. 678-681.

3. PREPARATA F.P., MULLER D.E. Efficient parallel evaluation of boolean expressions. - "IEEE Trans. Computers, 1976, v. C-25, N 5, p. 548-549.

4. SPIRA P.M. On time-hardware complexity tradeoffs for boolean functions. - Proceedings of Fourth Hawaii International Symposium on System Sciences, 1971, p. 525-527.

Поступила в ред.-изд.отдел
I3 февраля I978 г.