О СВЯЗИ МЕЖДУ ГЛУБИНОЙ И СЛОЖНОСТЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛ И О ГЛУБИНЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

С. А. ЛОЖКИН

(МОСКВА)

Пусть $\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ — некоторая система функциональных элементов (базис), где каждый элемент E_i, имеющий k_i входов и один выход, реализует функцию алгебры логики (ф.а.л.) φ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Будем рассматривать схемы, построенные из элементов базиса в соответствии с правилами построения схем из функциональных элементов [5]. Схему из функциональных элементов над базисом $\mathscr{E}$ будем называть *формулой*, если выходы ее элементов не разветвляются (см. [3], [5]). Будем изучать некоторые вопросы оптимальной реализации ф.а.л. формулами.

Последовательность элементов $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(s)}$ формулы Ф будем называть *цепью*, если для $j = 1, 2, \ldots, s-1$ выход элемента $E^{(j)}$ присоединен в Ф к некоторому входу элемента $E^{(j+1)}$. Число s будем называть *длиной*, а максимальное h, для которого существуют числа $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_h \leqslant s$ такие, что $E^{(i_j)} \neq E^{(i_{j+1})}$ при всех $j = 1, \ldots, h-1$, — *высотой* цепи $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(s)}$. *Глубиной* формулы Ф будем называть максимальную длину ее цепей, а *высотой* формулы Ф — максимальную высоту ее цепей. Заметим, что определение высоты формулы во многом соответствует определению «глубины» формулы в терминологии О. Б. Лупанова [2]. Глубину формулы Ф будем обозначать через $D(\Phi)$, а высоту формулы Ф — через $H(\Phi)$. *Сложностью* формулы Ф будем называть число ребер, по которым подаются переменные, т. е. число вхождений символов переменных в Ф. Сложность формулы Ф будем обозначать через $L(\Phi)$. Формулы, реализующие одну и ту же ф.а.л., назовем *эквивалентными*. В общем виде зависимость между минимальными значениями глубины и сложности эквивалентных формул рассматривалась, например, в [7]. Там было показано, что в базисе $\{\&, \vee\}$ (а значит и в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$) для любой формулы Ф найдется эквивалентная ей формула Ф* такая, что $D(\Phi^*) \leqslant 1{,}73 \log_2 L(\Phi) + d$, где d — некоторая константа.

В настоящей работе эта зависимость исследуется с учетом высоты формулы Ф (см. лемму 1). В некоторых случаях такой подход позволил получить хорошие верхние оценки для глубины ф.а.л., используя известные оценки для их сложности и не вдаваясь в детали применяемых методов синтеза (см. теоремы 1 и 2).

Лемма 1. *Для любой непустой*) формулы Ф в базисе $\{\&, \vee\}$ существует эквивалентная ей формула Ф* такая, что*

$$D(\Phi^*) \leqslant]\log_2 L(\Phi)[+ H(\Phi) - 1.$$

*) Под пустой формулой будем понимать формулу, не содержащую элементов и имеющую один вход, который одновременно является ее выходом; будем считать, что глубина и высота пустой формулы равны 0.

Доказательство. Проведем индукцию по высоте формулы Ф. Для формул высоты 1 утверждение леммы, очевидно, справедливо. Пусть оно справедливо для всех формул, высота которых не больше чем $h-1$, и пусть Ф — произвольная формула высоты h $(h \geqslant 2)$. Будем считать, что выходным элементом формулы Ф является элемент конъюнкции (случай с элементом дизъюнкции рассматривается двойственным образом). Пусть Φ' — максимальная (по включению) подформула формулы Ф, содержащая выходной элемент формулы Ф и состоящая из элементов конъюнкции. Пусть Φ_i — подформула формулы Ф, каждый вход которой является входом Ф, а выход которой поступает на i-й вход подформулы Φ', $i=1,$ $2, \ldots, s,$ где $s \geqslant 2$, причем Φ_i не пуста тогда и только тогда, когда $i =$ $= 1, \ldots, t$, $1 \leqslant t \leqslant s$. Очевидно, что для $i = 1, \ldots, t$ выходным элементом Φ_i является элемент дизъюнкции, $H(\Phi_i) \leqslant h-1$ и по индуктивному предположению существует формула Φ_i^* эквивалентная Φ_i и такая, что

$$D(\Phi_i^*) \leqslant \,]\log_2 L(\Phi_i)[\, + h - 2. \tag{1}$$

Пусть для $i = t+1, \ldots, s$ $\Phi_i^* = \Phi_i$ и для $j = 1, \ldots, s$ $d_j = D(\Phi_j^*)$. Поскольку $h \geqslant 2$, то для пустых формул $\Phi_i^* = \Phi_i$, $i = t+1, \ldots, s$, неравенство (1) также выполняется. Положим

$$d = \Big]\log_2 \sum_{j=1}^{s} 2^{d_j}\Big[. \tag{2}$$

Так как $L(\Phi) = \sum_{j=1}^{s} L(\Phi_j)$, то в силу (1) и (2)

$$d \leqslant \,]\log_2 L(\Phi)[\, + h - 1. \tag{3}$$

Рассмотрим формулу $\mathscr{D}_d$ над базисом $\{\&\}$, которая имеет глубину d и 2^d входов, т. е. представляет собой d-ярусное дерево, построенное из элементов конъюнкции. Легко видеть, что в силу (2) у формулы $\mathscr{D}_d$ найдутся подформулы $\mathscr{D}_{d_1}^{(1)}, \mathscr{D}_{d_2}^{(2)}, \ldots, \mathscr{D}_{d_s}^{(s)}$ такие, что для $i = 1, 2, \ldots, s$ подформула $\mathscr{D}_{d_i}^{(i)}$ имеет глубину d_i и 2^{d_i} входов, являющихся входами $\mathscr{D}_d$. На те входы формулы $\mathscr{D}_d$, которые не являются входами ни одной из подформул $\mathscr{D}_{d_1}^{(1)}, \mathscr{D}_{d_2}^{(2)}, \ldots, \mathscr{D}_{d_s}^{(s)}$, подадим константу 1, а затем с помощью тождества $1 \cdot x = x$ преобразуем полученную формулу над базисом $\{\&, 1\}$ в эквивалентную ей формулу $\mathscr{D}^*$ над базисом $\{\&\}$. Искомая формула Φ^* получается из формулы $\mathscr{D}^*$ заменой подформул $\mathscr{D}_{d_i}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, s$ формулами Φ_i^*. Она очевидно, эквивалентна формуле Ф и в силу (3) удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Для произвольной ф.а.л. f из замкнутого класса $M_{\mathscr{E}}$, порожденного множеством ф.а.л. $\{\varphi_i\}_{i=1}^{r}$, определим величину $D_{\mathscr{E}}(f) = \min\limits_{\Phi} D(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Ф над $\mathscr{E}$, реализующим ф.а.л. f. Введем также функцию Шеннона $D_{\mathscr{E}}(n) = \max\limits_{f(x_1, \ldots, x_n) \in M_{\mathscr{E}}} D(f)$.

Теорема 1. *Для базиса* $\mathscr{E}_1 = \{\&, \vee, \neg\}$

$$D_{\mathscr{E}_1}^{\neg}(n) \leqslant \,]n - \log_2 \log_2 n + o(1)[\, + 3\ ^{*}). \tag{4}$$

Доказательство. Из [2] следует, что для любой ф.а.л. $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить формулу Φ_f над $\mathscr{E}_1$, реализующую f и такую, что:

*) В [1] при помощи специального метода синтеза, основанного на конструкции О. Б. Лупанова [4], было доказано, что $D_{\mathscr{E}_1}(n) \leqslant \,]\,n - \log_2\log_2 n + o(1)\,[\, + 2$.

1) входы элементов отрицания присоединяются в Φ_f только к входам самой формулы;

2) для формулы Φ_f

$$L(\Phi_f) \leqslant (2^n/\log_2 n)(1 + o(1)); \tag{5}$$

3) для формулы Φ_f' над базисом $\{\&, \vee\}$, которая получится из формулы Φ_f, если удалить из нее все элементы отрицания, а их выходы объявить новыми входами,

$$H(\Phi_f') = 3. \tag{6}$$

Оценка (4) непосредственно вытекает из леммы 1 и (5), (6).

Замечание. Из мощностных соображений (см., например, [1]) легко выводится, что $D_{\mathscr{E}_1}(n) \geqslant]n - \log_2 \log_2 n + o(1)[$.

Теорема 2. *Для базиса* $\mathscr{E}_2 = \{\&, \vee\}$

$$D_{\mathscr{E}_2}(n) \leqslant n - {}^1/_2 \log_2 n - \log_2 \log_2 n + c_1, \tag{7}$$

где c_1 *— некоторая константа* *).

Доказательство. Из [6] следует, что для любой монотонной ф.а.л. $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить Φ_f над $\mathscr{E}_2$, реализующую f и такую, что

$$H(\Phi_f) \leqslant 6, \quad L(\Phi_f) \leqslant c_2\, 2^n/(\sqrt{n} \log_2 n), \tag{8}$$

где c_2 — некоторая константа. Оценка (7) вытекает из леммы 1 и (8).

Замечание. Из мощностных соображений легко выводится, что для некоторой константы c_3 $D_{\mathscr{E}_2}(n) \geqslant n - {}^1/_2 \log_2 n - \log_2 \log_2 n + c_3$.

В заключение отметим, что при доказательстве леммы 1 мы использовали фактически только коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции и тождества $1 \cdot x = x$, $0 \vee x = x$. Следовательно, она будет справедлива для любого базиса, состоящего из двуместных коммутативных и ассоциативных операций, имеющих единицу. В частности, лемма 1 будет справедлива для сложения и умножения действительных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гашков С. Б. О глубине булевых функций.— Проблемы кибернетики, вып. 34, М.: Наука, 1978, с. 265—268.
2. Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$.— Проблемы кибернетики, вып. 6, М.: Физматгиз, 1961, с. 5—14.
3. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем.— Проблемы кибернетики, вып. 10, М.: Физматгиз, 1963, с. 63—97.
4. Лупанов О. Б. О сложности универсальной параллельно-последовательной сети глубины 3.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1973, т. 133, с. 127—131.
5. Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов.— Проблемы кибернетики, вып. 7, М.: Физматгиз, 1962, с. 61—114.
6. Редькин Н. П. О реализации монотонных булевых функций контактными схемами.— Проблемы кибернетики, вып. 35, М.: Наука, 1979, с. 87—110.
7. Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул.— Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем, вып. 32, Новосибирск, 1978, с. 76—94.
8. McColl W. F. The maximum depth of monotone formulae.— Information processing letters, 1978, v. 7, № 2, p. 65.

Поступило в редакцию 18 II 1980

*) Аналогичная оценка была получена при помощи специального метода синтеза, основанного на конструкции Н. П. Редькина [6], в курсовой работе А. А. Семенова; в работе [8] было доказано, что $D_{\mathscr{E}_2}(n) \leqslant n$.