[5] *Куратовский К.* Топология, том 1. — М.: Мир, 1966. — 594 с.

О сравнительной сложности реализации матрицы и ее дополнения вентильными схемами

И. С. Сергеев

isserg@gmail.com

ФГУП «НИИ «Квант», Москва

В настоящей работе строятся примеры квадратных булевых матриц A, таких, что сложность реализации матрицы A и дополнительной матрицы $\bar{A}$ вентильными схемами различается существенно.

Напомним, что *вентильная* (m, n)*-схема* — это ориентированный ациклический граф, в котором n вершин отмечены как входы и m вершин отмечены как выходы. Вентильная схема реализует булеву $m \times n$-матрицу A тогда и только тогда, когда при любых i и j выполнено: $A[i, j] = 1$ равносильно тому, что в схеме имеется ориентированный путь из j-го входа в i-й выход. Сложностью схемы называется число ребер в ней, а глубиной — максимальная длина ориентированного пути. Подробнее см. в [1].

Сложность минимальной по числу ребер схемы, реализующей матрицу A, обозначаем через $L(A)$; сложность минимальной схемы глубины d — через $L_d(A)$.

В работе [2] методом [3] доказано существование $n \times n$-матриц A, удовлетворяющих соотношению

$$L(\bar{A})/L(A) = \Omega(n/\log^3 n).$$

Отметим, что согласно результатам об асимптотической сложности [1, 4] класса булевых матриц подобное отношение не может по порядку превосходить $n/\log n$.

Назовем k*-прямоугольником* сплошь единичную матрицу размера $k \times k$. Матрица называется k*-редкой*, если она не содержит k-прямоугольников в качестве подматриц.

В [2] доказано существование матрицы A, допускающей простую реализацию в глубине 2, $L_2(A) = O(n \log^2 n)$, дополнительная матрица $\bar{A}$ к которой является 2-редкой и имеет при этом достаточно большой вес (число единиц), $|\bar{A}| = \Omega(n^{5/4})$. Как следствие из [4], $L(\bar{A}) = L_2(\bar{A}) = |\bar{A}|$.

Ниже матрицы, обладающие аналогичными свойствами, строятся явно.

Теорема 1.

(i) *Для некоторой конкретно заданной булевой* $n \times n$*-матрицы* C *выполнено* $L(\bar{C})/L(C) = n \cdot 2^{-O(\sqrt{\ln n \ln \ln n})}$.

(ii) *Для некоторой конкретно заданной булевой* $n \times n$*-матрицы* C *выполнено:* $L(C) = O(n)$*, матрица* $\bar{C}$ *является 2-редкой и* $|\bar{C}| = \Omega(n^{4/3})$.

(Напомним, что 2-редкая матрица не может иметь вес выше $n^{3/2} + n$.)

Доказательство теоремы опирается на простую комбинаторную лемму.

Лемма 1. *Пусть $n\times n$-матрица A имеет вес $|A|\geqslant 2n^{3/2}$. Тогда она содержит $\Omega((|A|/n)^4)$ 2-прямоугольников.*

Доказательство. Скажем, что строка матрицы покрывает пару столбцов u, если в позициях на пересечении строки и этих столбцов стоят единицы. Если обозначить через a_i число единиц в i-й строке матрицы A, то общее число покрытий строками пар столбцов можно оценить как

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{|A|}{2}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{2n}-\frac{|A|}{2}=\frac{|A|^2}{2n}-\frac{|A|}{2}\geqslant\frac{|A|^2}{4n}.$$

Обозначим через b_u число строк, покрывающих пару столбцов u. Тогда $\sum_u b_u=\sigma$. Число 2-прямоугольников в матрице A при этом равно

$$\sum_u\binom{b_u}{2}=\frac{1}{2}\sum_u b_u^2-\frac{\sigma}{2}\geqslant\frac{\left(\sum_u b_u\right)^2}{n(n-1)}-\frac{\sigma}{2}=\frac{\sigma^2}{n(n-1)}-\frac{\sigma}{2}\geqslant\frac{\sigma^2}{2n^2}=\Omega\left(\left(\frac{|A|}{n}\right)^4\right).$$

∎

Пусть $n=\binom{m}{2}$. По булевой $m\times m$-матрице A построим $n\times n$-матрицу B следующим образом. Занумеруем строки и столбцы матрицы B 2-элементными подмножествами множества $[m]$. Положим $B[a,b]=1$ в том и только том случае, когда на пересечении строк a и столбцов b в матрице A расположен 2-прямоугольник.

Лемма 2. *Если матрица A является k-редкой, то матрица B является K-редкой, $K=\binom{k-1}{2}+1$.*

Доказательство. Если матрица B содержит K-прямоугольник на пересечении строк $s_1,\dots,s_K$ и столбцов $t_1,\dots,t_K$, то матрица A содержит прямоугольник на пересечении строк $\cup s_i$ и столбцов $\cup t_i$. При этом $|\cup s_i|,|\cup t_i|\geqslant k$, что противоречит k-редкости матрицы A. ∎

Лемма 3. *Если матрица A является k-редкой и $|A|\geqslant 2m^{3/2}$, то*

$$L(B)=\Omega\left(\left(\frac{|A|}{kn}\right)^4\right),$$

при этом $L_3(\bar{B})=O(n)$.

Доказательство. Согласно лемме 1, $|B|=\Omega((|A|/n)^4)$, а из леммы 2 следует, что B является K-редкой. Поэтому по теореме Нечипорука [4]

$$L(B)\geqslant\frac{|B|}{K^2}=\Omega\left(\left(\frac{|A|}{kn}\right)^4\right).$$

Покажем, что матрицу $\bar{B}$ можно реализовать схемой глубины 3 и линейной сложности. На втором и третьем уровнях схемы разместим по m вершин и занумеруем их числами из $[m]$. Вход $a=\{i,j\}$ соединим с вершинами i, j второго уровня. Аналогично поступим с выходами и вершинами третьего уровня. Вершины второго и третьего уровня соединим ребрами согласно матрице $\bar{A}$.

По построению, схема имеет $O(m^2)$ ребер. То, что схема реализует матрицу $\bar{B}$, вытекает из того, что путь, соединяющий вход a и выход b содержится в схеме в том и только том случае, когда подматрица матрицы $\bar{A}$, образованная строками b и столбцами a, не является сплошь нулевой. ∎

Для доказательства п. (i) теоремы в качестве матрицы A выберем нормматрицу из работы [5], которая при подходящем выборе параметров является Δ-редкой и имеет вес m^2/Δ, где $\Delta = 2^{O(\sqrt{\log m \log\log m})}$. Положим $C = \bar{B}$.

Для доказательства п. (ii) выберем в качестве матрицы A 3-редкую матрицу Брауна [6] веса $\Theta(m^{5/3})$. Положим $C = \bar{B}$. Теорема доказана.

Автор благодарен С. Юкне за предложения по усовершенствованию доказательства.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00671а.

Литература

[1] *Лупанов О. Б.* О вентильных и контактно-вентильных схемах // ДАН СССР. — 1956. — Т. 111, № 6. — С. 1171–1174.

[2] *Jukna S., Sergeev I.* Complexity of linear boolean operators // Foundations and Trends in TCS. — 2013. — V. 9, № 1. — P. 1–123.

[3] *Katz N. H.* On the CNF-complexity of bipartite graphs containing no squares // Lithuanian Math. Journal. — 2012. — V. 52, № 4. — P. 385–389.

[4] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 5–102.

[5] *Kóllar J., Rónyai L., Szabó T.* Norm-graphs and bipartite Turán numbers // Combinatorica. — 1996. — V. 16, № 3. — P. 399–406.

[6] *Brown W. G.* On graphs that do not contain a Thomsen graph // Canad. Math. Bull. — 1966. — V. 9. — P. 281–285. [Русский перевод: *Браун У. Г.* Графы, не содержащие графа Томсена // Кибернетический сборник. Вып. 18. — М.: Мир, 1981. — С. 34–38.]

О подобии блочно-диагональных матриц над кольцом целых чисел

С. В. Сидоров

sesidorov@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, национальный исследовательский университет, Нижний Новгород

Определение. Пусть A и B — две целочисленные матрицы порядка n. Они называются подобными над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, если существует такая матрица $X \in \mathbf{Z}^{n\times n}$, что $AX = XB$ и $\det X = \pm 1$ (при этом пишут $A \sim B$). Матрица X называется трансформирующей матрицей.

Пусть матрица $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ имеет характеристический многочлен $d(x) = \det(xE - A)$, который раскладывается на неприводимые над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ множители. Будем считать, что кратность каждого множителя