Лемма 1: Пусть нам дан двудольный граф и степень каждой вершины левой доли равна k ($k > 0$), а каждой вершины правой доли не превосходит k. Тогда в таком графе существует такое паросочетание, что любая вершина левой доли принадлежит какому-то ребру паросочетания.

Доказательство: Рассмотрим произвольные x вершин левой доли и все соединенные с ними вершины правой (пусть их y). Тогда из взятого подмножества левой доли выходит ровно kx ребер, а в правую входит не более ky ребер (потому что в каждую вершину входит не более k ребер). Значит $kx \le ky$. Значит $x \le y$. Теперь видно, что из теоремы Холла о свадьбах следует, что искомое паросочетание существует.

Лемма 2: Пусть нам дан двудольный граф такой что
1) степень каждой вершины левой доли > 0
2) степень каждой вершины правой доли не превосходит степени любой соединенной с ней вершины левой доли.
Тогда в таком графе существует такое паросочетание, что любая вершина левой доли принадлежит какому-то ребру паросочетания.

Доказательство: Пусть не все вершины левой доли имеют одинаковую степень. Рассмотрим вершины левой доли имеющие максимальную степень. Пусть это вершины $C_1, \dots, C_q$ и их степнь равна k. Тогда если в правой доли все вершины имеют степень меньше k, то тогда можно для каждой вершины C_i выкинуть по одному ребру, связанному с ней. При этом свойства 1) и 2) в нашем графе сохранятся.

Если же в правой доле есть вершины $D_1, \dots, D_p$ степени k, то в силу свойства 2) каждая вершина D_i может быть соединена только с какими-то вершинами $C_{j_1}, \dots, C_{j_k}$.Тогда можно заметить, что к двудольному графу, у которого левая доля состоит из D_i, а правая - из C_i применима лемма 1. Тогда выбросим из исходного двудольного графа все ребра, принадлежащие найденному паросочетанию. Видим, что свойства 1) и 2) сохранятся, но в правой доли не останется вершин степени k. И теперь для каждого C_i, которое не принадлежало ни одному ребру из паросочетания, выкенем произвольное ребро, связанное с ним.

После нескольких таких операций наступит момент, когда все вершины левой доли имеют одинаковую ненулевую степень. Тогда в силу леммы 1 в таком графе существует паросочетание.

Теорема 1 (Шпернер): Максимальное количество попарно несравнимых подмножеств n-элементного множества равно коэффициенту перед $x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ после раскрытия скобок в выражении $(1+x)^n$.

Доказательство: Пусть нам дано m попарно несравнимых подмножеств. Рассмотрим те из них, которые имеют максимальную мощность (назовем их $C_1, \dots, C_q$). Пусть эта мощность равна k и $k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Рассмотрим тогда такой двудольный граф: левая доля состоит из всех C_i, а правая из всех подмножеств, которые могут быть получены из какого-либо C_i удалением из него одного произвольного элемента. Так как $\boldsymbol{k} > \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{2} \right\rfloor$, то к такому графу применима лемма 1. Тогда рассмотрим новые $\boldsymbol{m}$ подмножеств: возьмем старые и удалим из них все $\boldsymbol{C_i}$, а на их место добавим те подмножества, которые были соединены с ними в построенном паросочетании. Заметим, что мы все еще имеем $\boldsymbol{m}$ попарно несравнимых подмножеств, но теперь мощность максимального из них не превосходит ($\boldsymbol{k}$-1). После нескольких таких операций мы можем добиться того, что мощность любого нашего подмножества $\leq \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{2} \right\rfloor$. Аналогичным способом можно добиться того, чтобы мощность любого нашего подмножества $\geq \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{2} \right\rfloor$.

Если же нам даны $\boldsymbol{m}$ попарно несравнимых подмножеств мощности $\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{2} \right\rfloor$, то утверждение теоремы очевидно.

Манжина Ольга, Сагдеев Арсений

Теорема 2: Если разрешается в каждое подмножество каждый элемент включать не более 2 раз, то максимальное количество попарно несравнимых подмножеств $\boldsymbol{n}$-элементного множества равно коэффициенту перед $x^{\boldsymbol{n}}$ после раскрытия скобок в выражении $\left(1 + x + x^2\right)^{\boldsymbol{n}}$.

Доказательство (оно аналогично доказательству теоремы 1) : Пусть нам дано $\boldsymbol{m}$ попарно несравнимых подмножеств. Рассмотрим те из них, которые имеют максимальную мощность (назовем их $\boldsymbol{C_1, \ldots, C_q}$). Пусть эта мощность равна $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k > n}$. Рассмотрим тогда такой двудольный граф: левая доля состоит из всех $\boldsymbol{C_i}$, а правая из всех подмножеств, которые могут быть получены из какого-либо $\boldsymbol{C_i}$ удалением из него одного произвольного элемента.

Заметим, что если $\boldsymbol{k > n}$, то в каждом $\boldsymbol{C_i}$ количество элементов учтенных дважды, больше количества элементов, не учтенных ни разу. И значит из любой вершины левой доли выходит не меньше ребер, чем входит в любую вершину правой доли, соединенной с ней. Последнее предложение в точности эквивалентно условию 2) из леммы 2. Значит к нашему графу применима лемма 2.

Тогда рассмотрим новые $\boldsymbol{m}$ подмножеств: возьмем старые и удалим из них все $\boldsymbol{C_i}$, а на их место добавим те подмножества, которые были соединены с ними в построенном паросочетании. Заметим, что мы все еще имеем $\boldsymbol{m}$ попарно несравнимых подмножеств, но теперь мощность максимального из них не превосходит ($\boldsymbol{k}$-1).

После нескольких таких операций мы можем добиться того, что мощность любого нашего подмножества $\leq \boldsymbol{n}$. Аналогичным способом можно добиться того, чтобы мощность любого нашего подмножества $\geq \boldsymbol{n}$. Если же нам даны $\boldsymbol{m}$ попарно несравнимых подмножеств мощности $\boldsymbol{n}$, то утверждение теоремы очевидно.

Сагдеев Арсений