

Inhaltsverzeichnis

Schulstoff	1
I Mengen, Logik und Kombinatorik	9
1 Grundbegriffe	10
1.1 Mengen und Relationen	10
1.2 Graphen	15
1.3 Abbildungen (Funktionen)	19
1.4 Kardinalität unendlicher Mengen	21
1.5 Aufgaben	24
2 Logik und Beweismethoden	26
2.1 Aussagen	26
2.2 Prädikate und Quantoren	28
2.3 Logische Beweisregeln	31
2.4 Induktion: Beweis von $\forall x P(x)$	32
2.4.1 Das Induktionsprinzip	32
2.4.2 Das Prinzip des »kleinsten Verbrechers«	34
2.4.3 Falsche Anwendungen	34
2.4.4 Richtige Anwendungen	37
2.5 Induktion und Entwurf von Algorithmen	40
2.5.1 Türme von Hanoi	41
2.5.2 Das Rucksackproblem	42
2.6 Aufgaben	44
3 Kombinatorik	47
3.1 Kombinatorische Abzählregeln	47
3.2 Prinzip des doppelten Abzählens	48
3.3 Binomialkoeffizienten	52
3.3.1 Auswahl mit Wiederholungen	54
3.3.2 Binomischer Lehrsatz	54
3.4 Das Taubenschlagprinzip: Beweis von $\exists x P(x)$	58
3.5 Widerspruchsregel und Entwurf von Algorithmen	62
3.6 Aufgaben	64
II Algebra und Zahlentheorie	67
4 Modulare Arithmetik	68
4.1 Teilbarkeit, Division mit Rest	68

4.2	Teilerfremde Zahlen	70
4.3	Rechnen modulo n	73
4.4	Euklid'scher Algorithmus	76
4.5	Primzahlen	78
4.6	Chinesischer Restsatz	82
4.7	Anwendung in der Kryptographie: RSA-Codes*	84
4.8	Anwendung: Schneller Gleichheitstest*	87
4.9	Aufgaben	88
5	Algebraische Strukturen	90
5.1	Gruppen	90
5.2	Morphismen: Vergleich der algebraischen Strukturen	97
5.3	Ringe und Körper	99
5.4	Polynome	102
5.4.1	Modulo-Rechnung für Polynome	104
5.5	Komplexe Zahlen: Rechnen in der Zahlenebene	105
5.5.1	Anwendung: Schnelle Fourier Transformation*	110
5.6	Lineare Räume	112
5.6.1	Basis und Dimension	117
5.6.2	Lineare Abbildungen	118
5.6.3	Koordinaten	121
5.6.4	Unterräume	123
5.7	Aufgaben	125
III	Lineare Algebra	127
6	Vektorkalkül	128
6.1	Das Matrix-Vektor Produkt	128
6.2	Rang der Matrizen	131
6.3	Homogene Gleichungssysteme	134
6.3.1	Anwendung: Zerlegung in bipartiten Cliques*	135
6.4	Das Lösen von Gleichungssystemen	137
6.4.1	Das Gauß-Verfahren	138
6.5	Geometrie des Skalarprodukts	141
6.6	Die Lineare-Algebra-Methode	144
6.7	Orthogonalräume	147
6.7.1	Anwendung: Fehlerkorrigierende Codes*	148
6.8	Orthogonale Projektionen	151
6.9	Orthonormalbasen	153
6.10	Aufgaben	155
7	Matrizenkalkül	157
7.1	Matrizenprodukt	157
7.2	Matrizenprodukt und Rang	161
7.3	Matrizendivision: Inverse Matrizen	163
7.3.1	Unitäre Matrizen	164

- 7.3.2 Hadamardmatrizen* 165
- 7.3.3 Elementarmatrizen 166
- 7.3.4 Bestimmung der Inversen 168
- 7.3.5 Matrizenprodukt und Basiswechsel* 169
- 7.4 Die Determinante 171
 - 7.4.1 Determinante und Elementartransformationen 174
 - 7.4.2 Das Matrizenprodukt und die Determinante 175
 - 7.4.3 Explizite Darstellung der Determinante 177
- 7.5 Eigenwerte und Eigenvektoren 180
 - 7.5.1 Eigenwerte und Diagonalisierung 185
 - 7.5.2 Eigenwerte, die Spur und die Determinante 188
- 7.6 Aufgaben 190

IV Analysis 194

8 Folgen und Rekursionsgleichungen 195

- 8.1 Endliche Summen (Reihen) 196
 - 8.1.1 Arithmetische Reihe 196
 - 8.1.2 Geometrische Reihe 197
 - 8.1.3 Harmonische Reihe 199
- 8.2 Rekursionsgleichungen 200
 - 8.2.1 Homogene Rekursionsgleichungen 201
 - 8.2.2 Nicht-homogene Rekursionsgleichungen 207
- 8.3 Aufgaben 208

9 Konvergenz von Zahlenfolgen 210

- 9.1 Unendliche Folgen 210
 - 9.1.1 Konvergenzkriterien für Folgen 215
- 9.2 Unendliche Summen (Reihen) 219
 - 9.2.1 Geometrische Reihe – die »Mutter aller Reihen« 220
 - 9.2.2 Allgemeine harmonische Reihen 221
 - 9.2.3 Konvergenzkriterien für Reihen 223
- 9.3 Aufgaben 228

10 Differenzialrechnung 230

- 10.1 Grenzwerte bei Funktionen 230
- 10.2 Ableitungen 234
- 10.3 Mittelwertsätze der Differenzialrechnung 240
- 10.4 Approximation durch Polynome: Taylorentwicklung 244
- 10.5 Die Regeln von Bernoulli–l’Hospital 247
- 10.6 Wachstumsvergleich: Klein-*o* und groß-*O* 250
 - 10.6.1 Das Master Theorem 252
- 10.7 Differenzialgleichungen 255
- 10.8 Integrale 256
- 10.9 Aufgaben 260

V Diskrete Stochastik	262
11 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten	263
11.1 Der Begriff der Wahrscheinlichkeit	263
11.2 Stochastische Unabhängigkeit	270
11.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit	272
11.4 Aufgaben	277
12 Zufallsvariablen	280
12.1 Erwartungswert und Varianz	282
12.1.1 Analytische Berechnung von $E(X)$ und $\text{Var}(X)$	290
12.2 Drei wichtige Zufallsvariablen	291
12.3 Abweichung vom Erwartungswert	293
12.3.1 Markov-Ungleichung	293
12.3.2 Tschebyschev-Ungleichung	295
12.3.3 Chernoff-Ungleichungen	298
12.4 Die probabilistische Methode	304
12.5 Aufgaben	307
Weiterführende Literatur	310
Stichwortverzeichnis	311