13 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Crahskurs Mathematik für Informatiker
S. Jukna

Kapitel 1

1.1 (1) Angenommen, es gibt $a \neq b \in A$ mit $g(f(a)) = g(f(b))$. Da f injektiv ist, gilt $f(a) \neq f(b)$. Dann muss aber auch $g(f(a)) \neq g(f(b))$ gelten, da g injektiv ist. (2) und (3) folgen analog.

(4) Würde es $f(a) = f(b)$ für $a \neq b \in A$ gelten, so sollte auch $g(f(a)) = g(f(b))$ gelten, ein Widerspruch zu der Injektivität von $g \circ f$. (5) und (6) folgen analog.

Beispiel: Wir betrachten die Mengen $A = C = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ und die Abbildungen

$$\{a\} \xrightarrow{f} \{a, b\} \xrightarrow{g} \{a\}$$

mit $f(a) = a$ und $g(a) = g(b) = a$. Dann ist $g \circ f$ bijektiv, da $g(f(a)) = g(a) = a$ gilt. Aber f ist nicht surjektiv, da b nicht im Bildbereich von f liegt, und g ist nicht injektiv, da $g(a) = g(b)$ gilt.

1.2 Da die Implikation (3) $\Rightarrow$ (1) trivial ist, reicht es die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (3) zu zeigen. Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Die Mengen $f^{-1}(a_1), \ldots, f^{-1}(a_n)$ stellen eine Zerlegung der Menge A dar, woraus

$$\sum_{i=1}^{n} |f^{-1}(a_i)| = |A| = n$$

folgt.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ist f surjektiv, so sind alle n Terme $|f^{-1}(a_i)|$ ungleich Null. Da alle diese n Terme positiv sind und ihre Summe die Zahl n nicht überschreiten darf, kann dies nur dann der Fall sein, wenn $|f^{-1}(a_i)| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Somit können keine zwei Elemente in ein Element abgebildet werden, was die Injektivität von f bedeutet.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ist $f : A \to A$ injektiv, so müssen alle $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ *verschiedene* Elemente der Menge A sein. Da aber A nur n Elementen enthält, ist damit f eine Permutation dieser Elemente.

1.3 Es reicht nur die Richtung ($\Rightarrow$) zu zeigen (die andere ist völlig klar). Es gelte daher

$$\Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\} = \Big\{\{c\}, \{c, d\}\Big\}.$$

Dann muss das Element $\{a\}$ der ersten Menge zu der zweiten Menge gehören. Da aber diese (zweite) Menge nur eine einzige 1-ementige Menge $\{c\}$ als ihr Element enthält, muss

$\{a\} = \{c\}$ und damit auch $a = c$ gelten. Nach demselben Argument muss auch $\{a, b\} = \{c, d\} = \{a, d\}$ gelten (wir haben ja $a = c$ bereits bewiesen), woraus $b = d$ folgt.

1.4 Diese Aufgabe testet, wie gut Sie die Definitionen der Mengengleichheit und der Abbildungen verstanden haben. Um die Mengengleichheit $A = B$ zu zeigen, muss man die *beiden* Inklusionen $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zeigen. (Ein häufiger Fehler ist, nur eine davon zu zeigen.) Das Wichtigste in der Definition einer Abbildung $f : X \to Y$ ist:

$$\text{aus } U, V \subseteq Y \text{ und } U \cap V = \emptyset \text{ folgt } f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset\,.$$

Würde es nämlich ein Element $x \in X$ sowohl in $f^{-1}(U)$ wie auch in $f^{-1}(V)$ liegen, so sollte es nach der Definition des Urbides $f^{-1}(U)$ sowohl $f(x) \in U$ wie auch $f(x) \in V$ gelten. Dies ist aber nicht möglich, wenn die Mengen U und V disjunkt sind.

(1) Sei nun $U \subseteq Y$ eine beliebige Teilmenge. Um die Inklusion $f^{-1}(Y \setminus U) \subseteq X \setminus f^{-1}(U)$ zu zeigen, sei $x \in X$ ein Element in dem Uhrbild $f^{-1}(Y \setminus U)$. Dann gilt auch $f(x) \notin U$, woraus $x \notin f^{-1}(U)$ und damit auch $x \in X \setminus f^{-1}(U)$ folgt.

Um die umgekehrte Inklusion $X \setminus f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(Y \setminus U)$ zu zeigen, sei $x \in X$ ein Element von X, der nicht in dem Uhrbild $f^{-1}(U)$ von U liegt. Dann gilt $f(x) \in Y \setminus U$, woraus $x \in f^{-1}(Y \setminus U)$ folgt.

(2) Um die Inklusion $f^{-1}(U \cap V) \subseteq f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ zu zeigen, sei $x \in f^{-1}(U \cap V)$. Dann muss das Bild $f(x)$ von x sowohl in U wie auch in V liegen. Somit muss das Element x selbst sowohl in $f^{-1}(U)$ wie auch in $f^{-1}(V)$ liegen, woraus $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ folgt.

Um die Inklusion $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U \cap V)$ zu zeigen, sei $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Dann muss es Elemente $y_1 \in U$ und $y_2 \in V$ mit $f(x) = y_1$ und $f(x) = y_2$ geben. Da aber f eine Abbildung ist, muss dann $y_1 = y_2$ gelten. D. h. das Element $y_1 = f(x)$ gehört zu beiden Mengen U und V, woraus $x \in f^{-1}(U \cap V)$ folgt.

(3) Sei $y \in f(A \cap B)$. Dann gibt es ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$. Da aber x zu beiden Mengen A und B gehört, gehört auch y zu beiden Mengen $f(A)$ und $f(B)$.

Die umgekehrte Inklusion $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ gilt aber i.A. nicht! Seien zum Beispiel $X = \{a, b, c\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ und betrachte die Abbildung f mit $f(a) = f(c) = y$ und $f(b) = z$ mit $y \neq z$ Dann gehört zwar das Element y zu $f(A) \cap f(B) = \{y\}$, es gehört aber nicht zu $f(A \cap B) = f(\{b\}) = \{z\}$.

(4) Nach der Definition von f^{-1} ist $f^{-1}(f(A)) = \{x \in X\colon f(x) \in f(A)\}$. Gehört nun ein Element x zu der Menge A, so gehört auch $f(x)$ zu dem Bild $B = f(A)$ von A. Dann muss aber das Element x zu dem Urbild $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$ gehören.

Die umgekehrte Inklusion $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ gilt aber nicht! Betrachte zum Beispiel die Mengen $X = \{a, b\}$, $Y = \{y\}$, $A = \{a\}$ und sei $f(a) = f(b) = y$.

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(y) = \{a, b\} \nsubseteq \{a\} = A\,.$$

1.5 Sei $B = (V, E)$ ein Baum mit $E \neq \emptyset$ und sei $p = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$ ein *längster* einfacher Weg in B. Wir behaupten, dass dann der erste und der letzte Knoten den Grad 1 haben, d. h. $d(v_1) = 1$ und $d(v_r) = 1$ gilt.

Wäre $d(v_1) > 1$, dann müsste es einen zu v_1 adjazenten Knoten $x \in V$ geben mit $x \neq v_2$. Da $x \neq v_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ gilt (es gäbe sonst einen Kreis in B und B wäre nicht azyklisch), ist $p' = (x, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ ein einfacher Weg in B, der im Widerspruch zur Annahme länger als p ist. Es gilt also $d(v_1) = 1$. Eine analoge Argumentation zeigt $d(v_r) = 1$.

1.6 Sei $f : V \to \{1,2,\ldots,r\}$ eine legale Färbung von $G = (V,E)$ mit $r = \chi(G)$ Farben. Wegen der Legalität von f muss jede Knotenmenge $f^{-1}(i)$, $i = 1,\ldots,r$ eine unabhängige Menge sein und kann daher nicht mehr als $\alpha(G)$ Knoten enthalten. Da diese Knotenmengen auch disjunkt sind (f ist ja eine Abbildung), muss daher $n = |V| = \sum_{i=1}^{r} |f^{-1}(i)| \leq r \cdot \alpha(G)$ und somit auch $\chi(G) = r \geq \alpha(G)$ gelten.

Die zweite Ungleichung $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ ist wiederum einfach zu beweisen: Wir nehmen eine beliebige unabhängige Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = \alpha(G)$ Knoten und färben alle Knoten in S mit einer Farbe. Um eine legale Färbung des ganzen Graphen zu erhalten, reicht es zu jedem der verbleibenden $n - |S| = n - \alpha(G)$ Knoten seine eigene Farbe zu zuweisen.

1.7 Zunächst zeigen wir, dass die Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ mit $f(\emptyset) = 0$ und $f(X) = \sum_{x \in X} 2^x$ für $\emptyset \neq X \in \mathcal{E}$ surjektiv ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl, $n \neq 0$, und sei $n = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i 2^i$ ihre Binärdarstellung. Dann gilt $n = f(X)$ mit $X = \{i \colon \epsilon_i = 1\}$. Somit ist die Abbildung f surjektiv.

Nun zeigen wir, dass die Abbildung f auch injektiv ist. Seien $X \neq Y$ zwei beliebige endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ und sei k die größte Zahl in der symmetrischen Differenz $X \oplus Y$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $k \in X$ und $k \notin Y$ gilt. Dann ist die Differenz

$$f(X) - f(Y) \geq 2^k - \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \,.$$

Die Summe $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i$ ist eine geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{k-1} x^i$ mit $x = 2$ und ist daher gleich $(x^k - 1)/(x - 1) = 2^k - 1$. Somit ist die Differenz $f(X) - f(Y) \geq 1$ ungleich Null, woraus $f(X) \neq f(Y)$ folgt. Die Abbildung f ist also auch injektiv.

Da f surjektiv wie auch injektiv ist, ist die Menge $\mathcal{E}$ abzählbar.

Kapitel 2

2.1 Sei n die Anzahl der Bücher, die Hans hat. Den Fall $n \geq 1000$ können wir ausschließen, denn dann würden beide Aussagen A und C richtig sein. Den Fall $1 \leq n < 1000$ können wir auch ausschließen, denn dann würden beide Aussagen B und C richtig sein. Also bleibt nur der Fall $n = 0$ (Hans hat keine Bücher) übrig; in diesem Fall ist nur die Aussage B richtig.

2.2 Es gibt viele Möglichkeiten dies zu beweisen. Man kann z. B. das Universum $M = \{0,1\}$ betrachten mit zwei Prädikaten $P(x)$ für »$x = 0$« und $Q(x)$ für »$x = 1$«. Dann gilt zwar $\forall x : P(x) \vee Q(x)$, die Aussage $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$ gilt aber nicht, da $P(1)$ und $Q(0)$ falsch sind. Genauso gilt $(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$, da $P(0) \wedge Q(1)$ wahr ist. Die Aussage $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$ gilt aber wegen $1 \neq 0$ nicht.

2.3 Sei angenommen, dass $a \geq 2$ ein Teiler von n und ein Teiler von $n+1$ ist. Dann ist $n = a \cdot k$ und $n + 1 = a \cdot k'$ für zwei ganze Zahlen k und k'. Also ist $1 = a \cdot k' - a \cdot k = a \cdot (k' - k)$. Daraus folgt $1/a = k' - k$. Da $k' - k$ eine ganze Zahl ist, muss $a = 1$ gelten. Das ist ein Widerspruch zur Hypothese $a \geq 2$.

2.4 Um die Aussage $A =$ »$\sqrt{2}$ ist irrational« zu beweisen, benutzen wir die Wiederspruchsregel. Dazu nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Dann kann man diese Zahl als Quotient $\sqrt{2} = a/b$ zweier ganzen Zahlen a und b darstellen, wobei

(*) a und b *keinen* gemeinsamen Teiler $k \geq 2$ haben.

Um einen Widerspruch zur Annahme $\neg A =$ »$\sqrt{2}$ ist rational« zu erhalten, reicht es also zu zeigen, dass die Zahlen a und b in jeder Darstellung $\sqrt{2} = a/b$ duch 2 teilbar sein müssen.

Wegen $\sqrt{2} = a/b$ gilt durch Quadrieren auch $2 = a^2/b^2$. Wir multiplizieren beide Seiten mit b^2 und erhalten $a^2 = 2b^2$. Da a^2 gleich zwei mal eine ganze Zahl ist, muss a^2 gerade sein. Nach Beispiel 2.3 ist dann auch a gerade, also $a = 2c$ für eine ganze Zahl c. Aus $2b^2 = a^2$ und $a = 2c$ folgt nun $2b^2 = 4c^2$ und damit auch $b^2 = 2c^2$. Also ist b^2 eine gerade Zahl und, wieder nach Beispiel 2.3, muss auch b gerade sein. Da beide Zahlen a und b gerade sind, ist 2 ein gemeinsamer Teiler von a und b, ein Widerspruch zu (*). Also ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, wie behauptet.

2.5 Induktionsbasis: $h_1 = 2 - \frac{1}{2^{1-1}} = 2 - 1 = 1$. Es gelte nun $h_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (Induktionsannahme). Dann gilt auch

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}h_n + 1 = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) + 1 = 2 - \frac{1}{2^n}\,.$$

2.6 Wir wollen zeigen, dass $|2^S| = 2^n$ für alle Mengen S mit $n = |S|$ Elementen gilt. Induktionsbasis $n = 0$ ist trivial, da dann S die leere Menge ist und kann daher keine weiteren Teilmengen außer sich selbst haben.

Sei nun die Aussage für alle Mengen mit n Elementen richtig und S sei eine Menge mit $|S| = n + 1$ Elementen. Wir fixieren ein Element $a \in S$ und betrachten die Menge

$$\mathcal{F}_0 = \{A\colon A \subseteq S,\ a \notin A\}$$

aller Teilmengen von S, die das Element a *nicht enthalten*, und die Menge

$$\mathcal{F}_1 = \{A\colon A \subseteq S,\ a \in A\}$$

der verbleibenden Teilmengen von S, also diejenigen Teilmengen, die das Element a *enthalten*. Wenn wir dieses Element a aus allen Teilmengen $A \in \mathcal{F}_1$ entfernen, dann erhalten wir die Menge

$$\mathcal{F}_1' = \{A \setminus \{a\}\colon A \subseteq S,\ a \in A\}\,,$$

die genauso viele Teilmengen wie $\mathcal{F}_1$ hat. Da beide $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1'$ Potenzmengen von $S \setminus \{a\}$ sind, gilt nach Induktionsvoraussetzung $|\mathcal{F}_0| = 2^n$ sowie $|\mathcal{F}_1'| = 2^n$. Insgesamt ergibt dies

$$|2^S| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| = 2^n + |\mathcal{F}_1'| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}\,.$$

2.7 Induktion über n. Induktionsbasis $n = 1$ ist trivial, da $1 = 1^2$ gilt. Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Es gelte

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2\,.$$

Dann gilt auch

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2\,.$$

Bild 13.1 gibt einen alternativen (anschaulichen) Beweis.

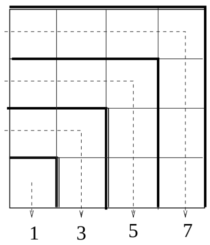

Bild 13.1: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich ist n^2.

2.8 Induktionsbasis: Für $n = 0$ gilt $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$, $0^3 - 0 = 0$ und Null ist durch alle Zahlen teilbar. Induktionsschritt $n \to n+1$: Nach Induktionsannahme sind beide Zahlen $n^3 + 2n$ und $n^3 - n$ durch 3 teilbar. Dann müssen auch die Zahlen

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n+1)\\ &= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1)\\ &= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n)\end{aligned}$$

durch 3 teilbar sein.

2.9 Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Wir wollen zeigen, dass $S_n \geq \sqrt{n+1} - 1$ für alle n gilt. Induktionsbasis $n = 1$ ist wegen $\sqrt{2} < 2$ trivial. Sei nun $S_n \geq \sqrt{n+1} - 1$ richtig. Dann gilt auch

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Es reich also zu zeigen, dass

$$\sqrt{n+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+2} - 1 \tag{13.1}$$

gilt. Dazu addieren wir 1 zu beiden Seiten und multiplizieren beide Seiten mit $\sqrt{n+1}$. Dann steht auf der linken Seite

$$\sqrt{(n+1)^2} + 1 = (n+1) + 1 = n + 2$$

und auf der rechten Seite steht

$$\sqrt{(n+2)(n+1)} < \sqrt{(n+2)(n+2)} = n + 2\,.$$

Somit ist die Ungleichung (13.1) und damit auch die Ungleichung $S_{n+1} \geq \sqrt{n+2} - 1$ bewiesen.

2.10 Induktionsbasis: Für $n = 0$ gilt $\sum\limits_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 2^1 - 1 = 2^n - 1$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei n beliebig und es gelte

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1\,.$$

Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \Big(\sum_{i=0}^{n} 2^i\Big) + 2^{n+1} = \big(2^{n+1} - 1\big) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1\,.$$

2.11 Es reicht zu zeigen, dass es für jedes *festes* n und für alle $k = 0{,}1{,}2, \ldots$ die Ungleichung $1 + k/n \leq (1 + 1/n)^k$ gilt. Induktionsbasis $k = 0$ ist trivial.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$. Wir nehmen an, dass

$$1 + \frac{k}{n} \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k$$

gilt. Wegen $(1 + 1/n)^r \geq 1$ für alle $r \geq 0$ gilt dann auch

$$\begin{aligned}
1 + \frac{k+1}{n} &= \Big(1 + \frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{n} \\
&\leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k + \frac{1}{n} && \text{Induktionsannahme} \\
&\leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k + \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k \cdot \frac{1}{n} && \text{wegen } (1 + 1/n)^r \geq 1 \\
&= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \\
&= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{k+1}.
\end{aligned}$$

2.12 Induktionsbasis: 4 Cents lassen sich mit zwei Zweicentstücken bezahlen.

Induktionsschritt: *Wenn* wir wissen, in welcher Stückelung a Cents zu bezahlen sind, können wir daraus recht leicht schließen, wie eine Stückelung für $a + 1$ Cents aussehen kann: Man stelle sich dazu den Münzenhaufen für a Pfennige vor.

1. Wenn er zwei Zweicentstücke enthält, nehmen wir sie fort und legen dafür ein Fünfcentstück hinzu.

2. Wenn er ein Fünfcentstück enthält, nehmen wir es fort und legen dafür drei Zweicentstücke hinzu.

Im ersten Fall enthält der Münzenhaufen $a - 2 \cdot 2 + 5 = a + 1$ Cents, und im zweiten Fall $a - 5 + 3 \cdot 2 = a + 1$ Cents. Da jeder solcher Münzenhaufen von mindestens 4 Cents entweder ein Fünfcentstück oder zwei Zweicentstücke enthalten muss, ist stets eine der beiden Regeln anwendbar.

2.13 Induktion über r. Für $r = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich richtig, da dann $\lambda_1 = 1$ gelten muss. Für $r = 2$ ist die Ungleichung auch richtig wegen der Konvexität. Nehmen wir also an, dass die Ungleichung für $r \geq 2$ Summanden richtig ist, und zeigen, dass sie dann auch für $r + 1$ Summanden richtig bleibt:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{r+1} x_{r+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_{r+1} f(x_{r+1})\,.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\lambda_1 \neq 0$ gilt. Nun ersetzen wir die Summe $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ der ersten zwei Terme durch μy mit

$$\mu = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{und} \quad y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \,.$$

Wegen $0 \leq \mu \leq 1$ und $\mu + \sum_{i=3}^{r} \lambda_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ können wir die Induktionsannahme anwenden, woraus

$$f\Big(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i\Big) = f\Big(\mu y + \sum_{i=3}^{r+1} \lambda_i x_i\Big) \leq \mu f(y) + \sum_{i=3}^{r+1} \lambda_i f(x_i)$$

folgt. Nun benutzen wir wieder die Konvexität von f und erhalten

$$\begin{aligned}
\mu f(y) &= (\lambda_1 + \lambda_2) f\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\Big) \\
&\leq (\lambda_1 + \lambda_2)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_2)\Big) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \,.
\end{aligned}$$

Ist die Funktion $f(x)$ konkav, so reicht es, alle Ungleichungen umzukehren.

2.14 Unser Maximierungsproblem ist durch das Paar (A, f) gegeben, wobei A eine endliche Menge und $f : A \to A$ eine Abbildung ist. Eine Lösung für das Problem ist eine größtmögliche Teilmenge $S \subseteq A$, so dass f eingeschränkt auf S eine bijektive Abbildung ist. Wir lösen dass Problem mittels Induktion über $n = |A|$.

Induktionsbasis $n = 1$ ist trivial, da in diesem Fall $S = A$ die einzige Lösung ist.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Angenommen wir wissen, wie man das Problem für alle Paare (B, g) mit $|B| = n$ und $g : B \to B$ lösen kann. Sei A eine beliebige Menge mit $|A| = n + 1$ Elementen und $f : A \to A$ sei eine beliebige Abbildung. Ist f bijektiv, so ist $S = A$ die einzige Lösung. Anderenfalls muss mindestens ein Element $x_0 \in A$ außerhalb des Bildbereiches von f liegen. Somit kann x_0 in keiner Lösung S für das Paar (A, f) enthalten sein. Dann sind aber die Lösungen für dieses Paar genau die Lösungen für das Paar (B, g), wobei $B = A \setminus \{x_0\}$ und g die Einschränkung von f auf B ist. Wir haben also das ursprüngliche Problem auf ein »kleineres« Problem reduziert, das nach der Induktionsannahme bereits lösbar ist.

2.15 Wir fragen zwei Personen A und B, ob A kennt B. Falls ja, dann kann A *nicht* eine Berühmtheit sein. Falls nein, dann kann B keine Berühmtheit sein. Damit können wir eine von diesen zwei Personen mit nur eine Frage aus der Befragung eliminieren. Nach $n - 1$ Fragen bleibt nur eine Person X übrig. Man kann dann mit $2(n - 1)$ zusätzlichen Fragen bestimmen, ob X tatsächlich eine Berühmtheit ist.

Kapitel 3

3.1 **(1)** Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(1-\sqrt{5})^n + (1+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(-1)^k\sqrt{5}^k + \sqrt{5}^k\right] .$$

Da die Binomialkoeffizienten ganzzahlig sind, reicht es zu zeigen, dass

$$Z_k = (-1)^k\sqrt{5}^k + \sqrt{5}^k$$

für alle $k = 0,1,\ldots,n$ ganze Zahlen sind. Ist k ungerade, so gilt $Z_k = -1\sqrt{5}^k + \sqrt{5}^k = 0$. Ist dagegen k eine gerade Zahl, also $k = 2m$ für eine natürliche Zahl m, dann ist

$$Z_k = (-1)^{2m}\sqrt{5}^{2m} + \sqrt{5}^{2m} = 5^m + 5^m$$

wiederum eine ganze Zahl.

(2) Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^n + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^{n-k}\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^{n-k}(-1)^k\sqrt{3}^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^{n-k}\left[\sqrt{3}^k + (-1)^k\sqrt{3}^k\right] ,$$

wobei $\sqrt{3}^k + (-1)^k\sqrt{3}^k$ nach demselben Argument wie in Teil (1) eine ganze Zahl (0 oder $2\cdot 3^{k/2}$) für jedes $k = 0,1,\ldots,n$ ist.

3.2 Nach Satz 3.9 gilt

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}$$
$$= \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
$$= \frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k} .$$

3.3 Seien $n+1, n+2, \ldots, n+k$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Da der Binomialkoeffizient

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!}$$

eine ganze Zahl ist, muss auch das Produkt $\prod_{i=1}^{k}(n+i)$ durch $k!$ teilbar sein.

3.4 Wir wenden das Prinzip des doppelten Abzählens an. Wir betrachten nämlich eine aus n

Zeilen und $\binom{n}{k}$ Spalten bestehende Tabelle T. Wir interpretieren die Zeilen als Elemente x von $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ und die Spalten als k-elementige Teilmengen von $[n]$. Der Eintrag zu (x, M) ist gleich 1, falls $x \in M$ gilt, und ist sonst gleich 0. Somit hat jede Spalte M genau $|M| = k$ Einsen. Die Anzahl der Einsen in der Zeile zu x is genau die Anzahl $\binom{n-1}{k-1}$ der k-elementigen Teilmengen M mit $x \in M$. Da die Summe über die Zeilen von T gleich der Summe über die Spalten sein muss, gilt

$$n\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}k\,.$$

3.5 Wir wenden wiederum das Prinzip des doppelten Abzählens an. Wir betrachten nämlich eine aus $\binom{n}{l}$ Zeilen und $\binom{n}{k}$ Spalten bestehende Tabelle T. Wir interpretieren die Zeilen als l-elementige Teilmengen L und die Spalten als k-elementige Teilmengen K von $[n]$. Der Eintrag zu (L, M) ist gleich 1, falls $L \subseteq M$ gilt, und ist sonst gleich 0. Somit hat jede Spalte K genau $\binom{k}{l}$ einsen und jede Zeile L genau $\binom{n-l}{k-l}$ Einsen, woraus die gewünschte Gleichung

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$$

folgt.

3.6 Wir beweisen den binomischen Lehrsatz $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ mittels Induktion n. Induktionsbasis $n = 0$ ist trivial. Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n \\
&= (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} && \text{Induktionsannahme} \\
&= x\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k} && \text{Vertausch der beiden Summen}\,.
\end{aligned}$$

Wir können nun die erste Summe als

$$\binom{n}{0}x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1}$$

und die zweite als

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{n}x^{n+1}y^0$$

umschreiben. Aufsummiert ergibt dies wegen

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \text{Satz 3.10}$$

und

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \quad \text{sowie auch} \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

die gewünschte Gleichung

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k} .$$

3.7 In einer Stadt wohnen x Frauen und y Männer, und die Einwohner haben Lust so viele Vereine wie möglich zu bilden. Die einzige Einschränkung ist, dass jeder Verein genau z Teilnehmer haben muss. Da wir insgesamt $x+y$ Einwohner in der Stadt haben, kann man genau $\binom{x+y}{z}$ solche Vereine bilden. Andererseits ist $\binom{x}{i}\binom{y}{z-i}$ genau die Anzahl der Vereine, in denen genau i Frauen und $z-i$ Männer beteiligt sind. Da in jedem Verein entweder keine Frauen ($i=0$) oder eine Frau ($i=1$) ... oder alle Frauen ($i=z$) teilnehmen können, erhalten wir

$$\binom{x+y}{z} = \sum_{i=0}^{z} \binom{x}{i}\binom{y}{z-i} .$$

Für $x=y=z=n$ ergibt dies die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} .$$

3.8 Sei $x_0 \in X$ fest und betrachte die folgenden zwei Teilmengen der Potenzmenge 2^X:

$$\mathcal{F}_0 = \{M \colon M \subseteq X,\ x_0 \notin M\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_1 = \{M \colon M \subseteq X,\ x_0 \in M\} .$$

Diese zwei Teilmengen sind disjunkt und ihre Vereinigung ist gleich 2^X. Sei $f : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$ die durch $f(M) = M \cup \{x_0\}$ gegebene Abbildung. Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv, woraus $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$ folgt. Außerdem gilt für jede Menge $M \in \mathcal{F}_0$

$$|M| \ \text{gerade} \quad \iff \quad |f(M)| \ \text{ungerade} .$$

Wir haben also jeder geraden bzw. ungeraden Teilmenge Y von X eine *eindeutige* ungerade bzw. gerade Teilmenge zugewiesen. Daher muss X genau so viele geraden wie ungeraden Teilmengen enthalten.

3.9 Aus dem binomischen Lehrsatz folgt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i} = (2+1)^n = 3^n .$$

3.10 Sei n die Anzahl der Bürger, X_i sei das Kapital des i-ten Bürgers und $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sei das gesamte Kapital. Dann ist das Durchschnittskapital gleich $K = X/n$, woraus $X = nK$

und somit auch

$$\sum_{i \text{ reich}} X_i = X - \sum_{i \text{ arm}} X_i \geq nK - n\frac{K}{2} = \frac{1}{2}nK = \frac{1}{2}X$$

folgt.

3.11 **(1)**: Markiere die kanten des Baumes B mit Bits 0 und 1: Die Kante zum linken Kind erhält Bit 0 und die Kante zum rechten Kind erhält Bit 1. Dann entspricht jeder Weg vom Wurzel zu einem Blatt i einem 0-1 Vektor $\boldsymbol{a}_i = (a_1, \ldots, a_{t_i})$ der Länge t_i, wobei t_i die Tiefe dieses Blattes (= die Anzahl der Kanten bis zu diesem Blatt) ist. Außerdem sind diese Vektoren für verschiedene Blätter auch verschieden. Sei $t = \max\{t_i : i = 1, \ldots, n\}$ die maximale Tiefe eines Blattes von B. Sei $A_i \subseteq \{0,1\}^t$ die Menge aller 2^{t-t_i} Vektoren, deren ersten t_i Bits mit den Bits auf dem Weg zum Blatt i übereinstimmen:

$$A_i = \{(b_1, \ldots, b_t) \colon b_k = a_k \text{ für alle } k = 1, \ldots, t_i\}\,.$$

Die Menge A_i besteht also aus diejenigen 0-1 Vektoren in $\{0,1\}^t$, mit denen man den Blatt i von der Wurzen beginend erreichen kann. Da die Wege zu verschiedenen Blätter verschieden sind, sind die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ disjunkt. Daher gilt

$$2^t \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{-t_i} = \sum_{i=1}^{n} 2^{t-t_i} = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq |\{0,1\}^t| = 2^t\,,$$

woraus die Kraft-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-t_i} \leq 1$$

folgt.

(2): Wie im Hinweis gegeben, wenden wir die Jensen-Ungleichung mit $f(x) = \log_2 x$, $x_i = 2^{-t_i}$ und $\lambda_i = 1/n$ für alle i an. Da die Logarithmusfunktion konkav ist, ergibt dies

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log_2(2^{-t_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) & & \text{wegen } \log_2(2^{-t_i}) = -t_i \\
\leq f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) & & \text{Jensen-Ungleichung} \\
= \log_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{-t_i}\Big) = \log_2\Big(\sum_{i=1}^{n} 2^{-t_i}\Big) - \log_2 n & & \\
\leq 0 - \log_2 n = -\log_2 n & & \text{Kraft-Ungleichung}\,.
\end{aligned}$$

3.12 Sei $f(x) = \mathrm{e}^x$, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1/n$ und $x_i = \ln a_i$, für alle $i = 1, \ldots, n$. Da e^x eine konvexe Funktion ist, ergibt die Jensen-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) & & \\
\geq f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) & & \text{Jensen-Ungleichung}
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n} = \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\ln a_i}\Big)^{1/n} = \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{1/n}.$$

3.13 **(a)** Betrachte n Nistplätze durchnummeriert als Zahlenpaare

$$(1{,}2), (3{,}4), (5{,}6), \ldots, (2n-1{,}2n)$$

und setze die Zahl $a \in S$ in den Nistplatz $(i, i+1)$ genau dann, wenn $a = i$ oder $a = i+1$ gilt. Da wir $|S| = n+1 > n$ Zahlen in S haben, müssen mindestens zwei Zahlen $a, b \in S$, $a \neq b$ in demselben Nistplatz sitzen, d. h. es muss entweder $b = a+1$ oder $a = b+1$ gelten.

(b) Betrachte n Nistplätze durchnummeriert als

$$(1{,}2n), (2{,}2n-1), (3{,}2n-2), \ldots, (n, n+1)$$

und setze die Zahl $a \in S$ in den einzigen Nistplatz $(i{,}2n-i+1)$ mit $a \in \{i{,}2n-i+1\}$. Da wir $|S| = n+1 > n$ Zahlen haben, müssen mindestens Zwei Zahlen $a \neq b$ aus S in demselben Nistplatz $(i{,}2n-i+1)$ sitzen. Dann muss aber $a+b = i+(2n-i+1) = 2n+1$ gelten.

(c) Jede Zahl $a \in \{1{,}2,\ldots{,}2n\}$ kann man als Produkt $a = x_a \cdot 2^k$ für eine *ungerade* Zahl x_a darstellen: Teile dazu a wiederholt durch 2. Zum Beispiel: $x_2 = 1$, $x_{10} = 5$, $x_{12} = 3$, usw. Zwischen 1 und $2n$ gibt es n ungerade Zahlen – diese Zahlen betrachten wir als Nistplätze und die Zahlen in S als Tauben. Wir setzen die Taube $a \in S$ in den Nistplatz x_a. Da es $|S| = n+1$ Tauben und nur n Nistplätze gibt, müssen zwei Tauben $a \neq b$ aus S in demselben Nistplatz sitzen. Dies bedeutet aber, dass $x_a = x_b = x$ und somit auch $a = x2^k$ und $b = x2^m$ für entsprechende Zahlen k und m gelten muss. Gilt nun $k \leq m$, so ist b durch a teilbar; sonst ist a durch b teilbar.

3.14 Wir betrachten eine Tabelle T, deren Zeilen mit Elementen $x \in X$ und Spalten mit Teilmengen $A_1, \ldots, A_m$ markiert sind. Wir setzen $T(x,i) = 1$ genau dann, wenn $x \in A_i$ gilt; sonst ist $T(x,i) = 0$. Die Anzahl der Einsen in der Zeile zu x ist dann gleich $d(x)$ und die Anzahl der Einsen in der Spalte zu A_i ist gleich $|A_i|$. Die gewünschte Gleichung $\sum_{i=1}^{m} |A_i| = \sum_{x \in X} d(x)$ folgt also aus dem Prinzip des doppelten Abzählens.

3.15 Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|E| > 2(k-1)^2$ Kanten und sei $M \subseteq E$ ein Matching mit der größten Anzahl der Kanten. Ist $|M| \geq k$, so sind wir fertig. Nehmen wir deshalb an, dass $|M| \leq k-1$ gilt. Sei U die Menge der $2|M|$ Endknoten der Kanten in M. Da M sich nicht erweitern lässt, muss jede Kante aus E mindestens einen Endknoten in dieser Menge U enthalten. Wir können also eine Abbildung $f : E \to U$ definieren, indem wir jeder Kante $e \in E$ einen ihren Endknoten $y \in e$ mit $y \in U$ zuweisen. Wenn wir nun die Kanten $e \in E$ als Tauben und die Knoten $y \in U$ als Nistplätze betrachten, dann ergibt uns das Taubenschlagprinzip einen Knoten $y \in U$ mit

$$|f^{-1}(y)| \geq \frac{|E|}{|U|} > \frac{2(k-1)^2}{2(k-1)} = k-1\,.$$

Nach der Definition der Zuweisung $f : E \to U$ bedeutet dies, dass der Knoten y ein Endknoten von mindestens k Kanten sein muss. Somit haben wir einen Stern mit k Kanten in G gefunden.

Kapitel 4

4.1 $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$.

4.2 Wegen $1 = 10 \bmod 3$ ist die Summe $a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^k a_k$ modulo 3 gleich der Summe $a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_k$.

4.3

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= (a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a) - (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) \\ &= (a-1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)\,. \end{aligned}$$

4.4 Seien $r_a = a \bmod n$ und $r_b = b \bmod n$. Dann ist

$$ab = (xn + r_a)(yn + r_b) = (xyn + xr_b + yr_a)n + r_a r_b\,.$$

Da der erste Term durch n teilbar ist, müssen beide zahlen ab und $r_a r_b$ dieselben Reste geteilt durch n ergeben.

4.5 Aus $a = qb + r$ folgt $r = a - qb$. Da c beide Zahlen a und b teilt, muss c auch den rest r teilen.

4.6 **(a)**: Sei $d = (a, b)$. Da a gerade ist, gibt es eine Zahl m mit $a = 2m$. Wegen $d|a$ muss eine Zahl t mit $2m = td$ geben. Da d eine ungerade Zahl (die Zahl b) teilt, muss d ungerade sein. Dann muss aber die Zahl t gerade sein, also $t = 2r$ für ein r. Aus $2m = 2rd$ folgt nun $m = rd$, d. h. d muss ein Teiler von $m = a/2$ sein.

(b): Siehe Aufgabe 4.7

4.7 Nach Satz 4.4 gilt:

$$\begin{aligned} (an, bn) &= \min\{anx + bny \colon x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_+ && \text{Satz 4.4} \\ &= n \cdot \min\{ax + by \colon x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_+ \\ &= n \cdot (a, b) && \text{Satz 4.4}\,. \end{aligned}$$

4.8 Induktionsbasis $n = 2$: $f_2 = 0 + 1 = 1$, $f_3 = 1 + 1 = 2$ und $(1{,}2) = 1$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Wir wollen $(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$ aus $(f_n, f_{n+1}) = 1$ ableiten. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis aus. Sei $(f_{n+1}, f_{n+2}) = d$, wobei $d > 1$ ist. Aus $f_{n+2} = dp$, $f_{n+1} = dq$ für irgendwelche Zahlen p, q und aus $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ erhalten wir $f_n = f_{n+2} - f_{n+1} = d(p-q)$, d. h. f_n ist auch durch d teilbar. Da d beide Zahlen f_n und f_{n+1} teilt, muss $(f_n, f_{n+1}) \geq d$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Induktionsannahme $(f_n, f_{n+1}) = 1$.

4.9 ($\Rightarrow$): Sei $d = (a, n)$. Hat $ax \equiv b \bmod n$ eine Lösung x, so muss nach Lemma 4.2 die Differenz $ax - b$ sowohl durch die Zahl n wie auch durch die Zahl d teilbar sein. Da aber a durch d teilbar ist, muss auch b durch d teilbar sein.

($\Leftarrow$): Ist b durch $d = (a, n)$ teilbar, dann sind alle drei Zahlen a, b und n durch d teilbar und wir können die modifizeirte Gleichung

$$\frac{a}{d} x \equiv \frac{b}{d} \bmod \frac{n}{d}$$

betrachten. Da $d = (a, n)$ der *größte* gemeinsamer Teiler von a und n ist, müssen $\frac{a}{d}$ und $\frac{n}{d}$ teilerfremd sein. Daher hat die modifizierte Gleichung nach dem Satz von Bézout eine Lösung $x \in \mathbb{Z}_n$. Da aber $ax - b$ durch n genau dann teilbar ist, wenn $\frac{a}{d}x - \frac{b}{d}$ durch $\frac{n}{d}$ teilbar ist, muss x auch die Lösung von $ax \equiv b \bmod n$ sein.

4.10 Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} ,$$

wobei nach Beispiel 4.7 die letzte Summe durch p teilbar ist.

4.11 Sei

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_m^{s_m}$$

die Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ mit $2 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_m$. Dann hat jeder Teiler a von n die Form

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m} \tag{13.2}$$

mit $r_i \in \{0,1, \ldots, s_i\}$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Man kann also jedem Teiler a von n einen Vektor $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ mit $r_i \in \{0,1, \ldots, s_i\}$ zuweisen. Da es nach der Produktregen (Satz 3.1) genau $\prod_{i=1}^{m}(s_i + 1)$ solche Vektoren gibt, bleibt es zu zeigen, dass je zwei verschiedene Vektoren auch verschidenen Zahlen entsprechen.

Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, dass

$$p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m} = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}$$

für zwei verschiedene Vektoren $(r_1, \ldots, r_m)$ und $(t_1, \ldots, t_m)$ gilt. Wenn wir nun die beiden Seiten dieser Gleichung kürzen (also beide Seiten durch $p_i^{r_i}$ bzw. durch $p_i^{t_i}$ teilen, falls $r_i \leq t_i$ bzw. $r_i \geq t_i$ gilt), dann erhalten wir zwei verschiedene Darstellungen einer Zahl ≥ 2 als Produkt von Primzahlen, ein Widerspruch zu dem Fundamentalsatz der Arithmetik.

4.12 Sei $a = (k+1)! + 1$ wie in dem Hinweis. Dann ist die Zahl $a + i = (k+1)! + i + 1$ für alle $i = 1,2, \ldots, k$ durch $i + 1$ teilbar, denn es gilt $(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdots (i+1) \cdots (k+1)$. Also kann keine der Zahlen $a+1, a+2, \ldots, a+k$ eine Primzahl sein.

4.13 Wir können o. B. d.A. annehmen, dass $p > 2$ gilt: In $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ sind 0 und 1 verschiedene Wurzel. Sei nun $h = \lfloor p/2 \rfloor$, also $h = \frac{p-1}{2}$. Seien $x \neq y$ zwei verschiedene Zahlen in $\{0,1, \ldots, h\}$. Es reicht zu zeigen, dass dann auch die Quadrate x^2 und y^2 ungleich modulo p sein müssen.

Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, dass $x^2 \equiv y^2 \bmod p$ gilt. Wegen $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ muss dann $(x+y)(x-y) \equiv 0 \bmod p$ und somit auch $x \equiv y \bmod p$ oder $x \equiv -y \bmod p$ gelten. Wegen $x \neq y$ kann die erste Gleichung $x \equiv y \bmod p$ nich gelten, denn bede Zahlen x und y liegen in $\mathbb{Z}_p$. Es muss also $x \equiv -y \bmod p$ oder äquivalent $x = p - y$ gelten (in $\mathbb{Z}_p$ ist ja $-y = p - y$ das additive Inverse von y). Dies kann aber nicht der Fall sein, da beide Zahlen x und y nicht größer als $h = \frac{p-1}{2}$ sind.

4.14 Zunächst müssen wir klären, wieviele Zahlen aus $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ durch eine (feste) ganze positive Zahl $m \leq n$ ohne Rest teilbar sind. Die durch m teilbaren Zahlen aus $[n]$ sind genau die Zahlen $m, 2m,3m,\ldots,rm$, wobei r die größte natürliche Zahl mit $r \leq n/m$ ist, also $r = \lfloor n/m \rfloor$. Somit ist m ein Teiler von genau $\lfloor n/m \rfloor$ der Zahlen $1,2,\ldots,n$.

Nach unserer oberen Überlegung sind genau $\lfloor n/p \rfloor$ der Faktoren $1,2,3,\ldots,n$ von

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

durch p teilbar. Dies ergibt

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

Vorkommen der Zahl p in der Primzahlzerlegung von $n!$. Nun haben wir

$$\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$$

Faktoren von $n!$, die nicht nur durch p sondern auch durch p^2 teilbar sind. Jeder von diesen Faktoren bringt zusätzlich noch einen Vorkommen von p in der Primzahlzerlegung von $n!$ bei, usw.

Nun etwas präziser. Da die Primzahlzerlegung von $n \ = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ Produkt der Primzahlzerlegungen der Faktoren $1,2,\ldots,n$ ist, gilt

$$\chi_p(n!) = \chi_p(1) + \chi_p(2) + \cdots + \chi_p(n)\,.$$

Sei

$$r = \max\{k \colon p^k \leq n\}$$

die größte natürliche Zahl mit $\lfloor n/p^r \rfloor \neq 0$. Wir wollen also zeigen, dass

$$\chi_p(n!) = \sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{13.3}$$

gilt. Um dies zu zeigen, benutzen wir das Prinzip des doppelten Abzählens. Dafür betrachten wir eine $r \times n$ Tabelle T mit

$$T(k,m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p^k \text{ teilt } m; \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die m-te Spalte dieser Tabelle besteht also aus $\chi_p(m)$ Einsen gefolgt von Nullen; eine Eins an der k-ten Stelle bedeutet, dass m immer noch durch p^k ohne Rest teilbar ist. Aufsummiert über alle n Spalten ergibt dies

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} T(k,m) = \sum_{m=1}^{n} \chi_p(m) = \chi_p(n!)\,.$$

Andererseits hat die k-te Zeile von T genau $\lfloor n/p^k \rfloor$ Einsen, da genau so viele Zahlen m aus $\{1,2,\ldots,n\}$ durch p^k ohne Rest teilbar sind. Aufsummiert über alle n Zeilen ergibt dies also

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{n} T(k,m) = \sum_{k=1}^{r}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$$

und die gewünschte Gleichheit (13.3) ist damit bewiesen.

4.15 Eine Zahl x in

$$\mathbb{Z}_{p^k} = \{0,1,2,\ldots,p^{k-1}-1\} = \{1,2,\ldots,p^k-1,p^k\} \qquad \text{wegen } p^k \bmod p^k = 0$$

ist *nicht* relativ prim zu p^k genau dann, wenn x durch p teilbar ist, d. h. wenn x ein Vielfaches von p ist. Daher sind das genau die p^{k-1} Zahlen

$$A = \{p, 2p, 3p, \ldots, (p^k-1)p, p^k\}\,.$$

Da die restlichen Zahlen in $\mathbb{Z}_{p^k}$ relativ prim zu p_k sein müssen, erhalten wir

$$\Phi(p^k) = |\mathbb{Z}_{p^k}| - |A| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)\,.$$

4.16 Sei $n = pq$ und $A = \{a \in \mathbb{Z}_n\colon (a,n) > 1\}$ sei die Menge aller Zahlen $a \neq 0$ in $\mathbb{Z}_n$, die *nicht* teilerfremd zu n sind. Nach dem Euklid'schen Hilfssatz kann die Zahl $d = (a,n) > 1$ das Produkt $n = pq$ nur dann teilen, wenn $d = p$ oder $d = q$ gilt; daher muss a ein Vielfaches von p oder von q sein. Die Menge A hat also die Form

$$A = \{q, 2q, ,3q, \ldots, pq\} \cup \{p, 2p,2p, \ldots, qp\}\,.$$

Wegen $|A| = p + q - 1$ (pq kommt zweimal in A vor!) erhalten wir

$$\phi(n) = n - |A| = n - p - q + 1 = (p-1)(q-1) = \phi(p)\cdot\phi(q)\,.$$

4.17 Nach dem Kleinen Satz von Fermat gilt $k^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ und $k^p \equiv k \bmod p$ für alle $k = 1,2,\ldots,p-1$. Daher gilt modulo p

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{p-1 \text{ mal}} = p - 1 = -1$$

und

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^p = \sum_{k=1}^{p-1} k = 1 + 2 + \cdots + (p-1) = p\frac{p-1}{2} = 0 \qquad \text{arithmetische Reihe}\,.$$

Beachte, dass $(p-1)/2$ eine *ganze* Zahl ist.

4.18 Gilt $a \equiv b \bmod p_i$ für alle $i = 1,\ldots,t$, so muss (nach dem Chinesischen Restsatz) auch $a \equiv b \bmod P$ für das Produkt

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$$

gelten. Da alle p_i Primzahlen sind, muss $p_i \geq 2$ für alle i gelten, also

$$P \geq 2^t\,.$$

Sind nun $a \neq b$ zwei verschiedene Zahlen in $\{1{,}2,\ldots,N\}$, dann kann $a \equiv b \bmod P$ nur dann gelten, wenn die Zahl P kleiner als N ist. Zusammen ergibt dies $2^t \leq P < N$, woraus $t \leq \log_2 N$ folgt.

Kapitel 5

5.1

$$\begin{aligned}
ab &= e(ab)e && \text{hier ist } ab \text{ die Abkürzung für } a \circ b\\
&= (b^2)(ab)(a^2) && \text{wegen } x^2 = e\\
&= b((ba)(ba))a && \text{Assoziativität}\\
&= b(ba)^2 a &&\\
&= b(e)a && \text{wegen } x^2 = e\\
&= ba\,.
\end{aligned}$$

5.2 Sei $(G,\circ,e)$ eine endliche Gruppe der Ordnung n und sei n gerade. Wir bilden die Paare (x,y) mit $y = x^{-1}$ »Element und sein Inverses« und sei m die Anzahl der Paare mit $x \neq y$. Die verbleibenden Elemente in G müssen dann $x = x^{-1}$ (oder äquivalent $x^2 = e$) erfüllen; diese enthalten das neutrale Element e (ein Element) und alle Elemente der Ordnung 2. Es muss also $n - 2m - 1$ Elemente der Ordnung 2 geben. Da n gerade ist, muss diese Zahl $n - 2m - 1$ ungerade und damit ungleich Null sein.

5.3 Gegenbeispiel:

$$(2 \circ 2) \circ 3 = (2^2)^3 = 2^6 \neq 2^8 = 2^{2^3} = 2 \circ (2 \circ 3)\,.$$

5.4 Sei X eine nicht-leere Menge. Dann sind $(2^X,\cap)$ und $(2^X,\cup)$ beide Halbgruppen. In der ersten Halbgruppe ist $e = X$ das neutrale Element. Aber für $A \in 2^X$ mit $A \neq X$ gibt es kein Inverses, da es $A \cap B \subseteq A \neq X$ für alle $B \in 2^X$ gilt. In der zweiten Halbgruppe ist $e = \emptyset$ das neutrale Element. Aber keine nicht-leere Teilmenge $A \in 2^X$ kann ihr Inverses haben, da es $A \cup B \supseteq A \neq \emptyset$ für alle $B \in 2^X$ gilt.

5.5 **(a)** Da jede Funktion $f \in S_M$ bijektiv ist, ist die Umkehrfunktion f^{-1} das Inverse von f.

(b) Wir wollen zunächst zeigen, dass die Gruppe $(S_M,\circ)$ kommutativ ist, wenn $|M| \leq 2$ gilt. Sei $M = \{1{,}2\}$. Dann besteht S_M aus nur zwei Funktionen (Permutationen)

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist klar, dass für sie $f \circ g = g \circ f$ gilt (f ist ja eine identische Abbildung).

Wir wollen nun zeigen, dass für $|M| \geq 3$ die Gruppe $(S_M,\circ)$ nicht kommutativ, also nicht abelsich, ist. Dazu betrachte die folgenden zwei Permutationen

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $f(g(1)) = f(2) = 3 \neq 2 = g(1) = g(f(1))$, und damit gilt das Kommutativgesetz $f \circ g = g \circ f$ in dieser Gruppe nicht.

5.6 Da $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist, reich es zu zeigen, dass jedes Element $a + \sqrt{2}b \neq 0$ von $R = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ sein multiplikatives Inverses in R hat. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ kann $a^2 - 2b^2 = 0$ nur dann gelten, wenn $a + \sqrt{2}b$ gleich Null ist. Warum? Da die Zahl $\sqrt{2}$ irrational ist: Wäre es nämlich $b \neq 0$, so würde dann $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ eine rationalle Zahl sein. Somit ist

$$(a + \sqrt{2}b)^{-1} = \frac{1}{a + \sqrt{2}b} = \frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

das multiplikative Inverse von $a + \sqrt{2}b \neq 0$.

5.7 Ein Polynom vom Grad 2 oder 3, ist *kein* Primpolynom genau dann, wenn er einen linearen Faktor $x - a$ enthält. Die Behauptung folgt also direkt aus Lemma 5.25.

5.8 Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}_2/p(x) = \{0, 1, x, 1 + x\}$ mit $p(x) = x^2 + 1$. Wegen $2x = 0$ und $-x = x$ in $\mathbb{Z}_2$ gilt

$$x(1 + x) = x^2 + x \equiv x + 1 \bmod p(x)$$

und

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1 \equiv 0 \bmod p(x)\,.$$

Die Multiplikationstabelle sieht also folgendermaßen aus:

$\cdot$	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	1	$1+x$
$1+x$	0	$1+x$	$1+x$	0

Somit ist $\mathbb{Z}_2/p(x)$ kein Körper, da zum Beispiel $1 + x$ kein multiplikatives Inverses hat.

5.9 $p(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \\
&= (x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x) - (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \\
&= x^n - 1\,.
\end{aligned}$$

5.10 Ist $b \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle von $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, dann gilt

$$0 = p(b) = \underbrace{a_n b^n + \cdots + a_1 b}_{\text{teilbar durch } b} + a_0\,.$$

Daher muss auch a_0 durch b teilbar sein.

5.11 Sei $a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$. Dann gilt $(a+b)\boldsymbol{u}+(a-b)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. Da $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ linear unabhängig sind, muss $a+b=0$ und $a-b=0$ gelten. Dann muss aber $a+a=b-b=0$ wie auch $b+b=a-a=0$ gelten. Wegen $\operatorname{char}(\mathbb{F})\neq 2$ kann dies nur dann der Fall sein, wenn a und b beide gleich Null sind.

5.12 $(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)+(\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)-(\boldsymbol{v}_4+\boldsymbol{v}_1)=\mathbf{0}$.

5.13 Sei $a(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+b(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)+c(\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_1)=\mathbf{0}$. Dann gilt auch

$$(a+c)\boldsymbol{v}_1+(a+b)\boldsymbol{v}_2+(b+c)\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}\,,$$

woraus $a+c=a+b=b+c=0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ folgt. Aus $a+c=a+b$ folgt nun $c=b$, aus $a+b=b+c$ folgt $a=c$, also $a=b=c$. Wegen $a+c=0$ müssen alle drei Zahlen gleich Null sein.

5.14 Zunächst zeigen wir die lineare Unabhängigkeit der Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3,\ldots,\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_m\,.$$

Sei

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_m)=\mathbf{0}\,.$$

Dann gilt auch

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_m)\boldsymbol{v}_1+(\lambda_2+\cdots+\lambda_m)\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{v}_m=\mathbf{0}\,.$$

Die lineare Unabhängigkeit von $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ ergibt

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m&=0\,,\\ \lambda_2+\cdots+\lambda_m&=0\,,\\ &\cdots\\ \lambda_m&=0\,,\end{aligned}$$

woraus $\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0$ durch Einsetzen folgt. Es bleibt also zu zeigen, dass sich jeder Vektor $\boldsymbol{x}\in V$ als eine Linearkombination von Vektoren $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_m$ darstellen lässt. Da die Vektoren $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ eine Basis von V bilden, kann man $\boldsymbol{x}$ als eine Linearkombination

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_m\boldsymbol{v}_m$$

darstellen. Es bleibt also, nur die Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ zu bestimmen, für die

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_m)\\ &=(\lambda_1+\cdots+\lambda_m)\boldsymbol{v}_1+(\lambda_2+\cdots+\lambda_m)\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{v}_m\end{aligned}$$

gilt. Die Gleichungen

$$a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_m\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{x}=(\lambda_1+\cdots+\lambda_m)\boldsymbol{v}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{v}_m$$

ergeben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m &= a_1\,, \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_m &= a_2\,, \\ &\cdots \\ \lambda_m &= a_m\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\lambda_1 = a_1 - a_2, \quad \lambda_2 = a_2 - a_3, \quad \ldots, \quad \lambda_m = a_m\,.$$

5.15 Angenommen, es gibt eine nicht-triviale lineare Kombination

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m = \mathbf{0}\,;$$

dabei ist $\mathbf{0} : A \to \mathbb{F}$ eine Nullfunktion mit $\mathbf{0}(a) = 0$ für alle $a \in A$. Sei i das *kleinste* Index mit

$$\lambda_i \neq 0\,.$$

Wir ersetzen die Variablen durch das Element a_i und erhalten

$$0 = \overbrace{\lambda_1 f_1(a_i) + \cdots + \lambda_{i-1} f_i(a_i)}^{\lambda_j = 0 \text{ für } j<i} + \lambda_i f_i(a_i) + \overbrace{\lambda_{i+1} f_i(a_i) + \cdots + \lambda_m f_m(a_i)}^{f_j(a_i)=0 \text{ für } j>i} = \lambda_i f_i(a_i)\,.$$

Wegen $f_i(a_i) \neq 0$ folgt daraus $\lambda_i = 0$, ein Widerspruch.

5.16 Seien $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x^4$ und $h(x) = 4x$. Sei $af + bg + ch = \mathbf{0}$ eine Linearkombination, die die Nullfunktion $\mathbf{0}$ ergibt. Dann gilt $(af + bg + ch)(x) = 0$ oder äquivalent

$$a\mathrm{e}^x + bx^4 + 4cx = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $x = 0$ ergibt dies $a = 0$. Es gilt also

$$bx^4 + 4cx = 0$$

für alle x. Für $x = 1$ ergibt dies $b + 4c = 0$, also $b = -4c$. Für $x = 2$ folgt dann $-64b + 8b = -56b = 0$, also $b = 0$ und somit auch $c = 0$.

5.17 Induktion über n. Induktionsbasis $n = 0$ ist trivial:

$$E(0 \cdot \theta) = E(0) = \cos 0 + i \sin 0 = \cos 0 = 1 = E(\theta)^0\,.$$

Gilt nun $E(\theta)^n = E(n\theta)$, so gilt wegen der Additionstheoreme für Kosinus und Sinus

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(x + y) &= \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y \end{aligned}$$

auch

$$\begin{aligned} E((n + 1)\theta) &= \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta) \cdot \cos\theta - \sin(n\theta) \cdot \sin\theta + i\,[\sin(n\theta) \cdot \cos\theta + \cos(n\theta) \cdot \sin\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \cdot [\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \\ &= E(\theta)^{n+1}. \end{aligned}$$

Kapitel 6

6.1 Angenommen gibt es Vektoren $\boldsymbol{u}_1 \in U_1 \setminus U_2$ und $\boldsymbol{u}_2 \in U_2 \setminus U_1$. Ist nun $U_1 \cup U_2$ ein Vektorraum, so muss auch der Vektor $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ in $U_1 \cup U_2$ liegen, d. h. es muss $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w}$ für ein $\boldsymbol{w} \in U_1$ (oder $\boldsymbol{w} \in U_2$) gelten. Da aber U_1 (wie auch U_2) ein Vektorraum ist, muss dann auch der Vektor $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_1$ in U_1 (oder der Vektor $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_2$ in U_2) liegen. Ein Widerspruch. Die andere Richtung ist trivial.

6.2 Sei $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ eine Linearkombination. Wir wollen zeigen, dass dann $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ gilt. Dies ergibt sich aus

$$0 = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{0} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_i,\, \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k \rangle = \lambda_1\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \cdots + \lambda_k\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k \rangle\,,$$

was wegen $\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ schon $\lambda_i = 0$ zur Folge hat. Warum? Da

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j\,, \\ \|\boldsymbol{v}_i\|^2 & \text{für } i = j \end{cases}$$

und $\|\boldsymbol{v}_i\| \neq 0$ wegen $\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ gilt ($\mathbb{R}$ ist ja ein euklidischer Vektorraum).

6.3 **(a)** Es gilt

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2). \end{aligned}$$

(b) Aus $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$ folgt

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2 = 0\,. \end{aligned}$$

(c) Aus

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$$

und

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$$

folgt

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 4\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\,.$$

6.4 Betrachte (wie im Hinweis) den Vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_i = 1$ falls $u_i > 0$, und $v_i = -1$ sonst. Dann gilt $|u_i| = u_i v_i$ für alle i und damit auch $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{u}|$. Andererseits sind alle Koordinaten von $\boldsymbol{v}$ gleich ± 1, woraus

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i^2} = \sqrt{n}$$

folgt. Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt nun

$$|\boldsymbol{u}| = |\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{u}\| .$$

6.5 Betrachte $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\boldsymbol{v} = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Wegen $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$ gilt dann nach Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{\sigma(i)} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

6.6 Wir zerlegen den Vektorraum (wie im Hinweis gegeben) in zwei Teilmengen

$$V_0 = \{\boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} \rangle = 0\} ,$$
$$V_1 = \{\boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} \rangle = 1\} .$$

Die Menge V_1 ist nicht leer, da wegen $\boldsymbol{y} \notin V^{\perp}$ nicht alle Vektoren in V orthogonal zu $\boldsymbol{y}$ sein können. Wir wollen zunächst zeigen, dass

$$\boldsymbol{u} + V_0 \subseteq V_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{w} + V_1 \subseteq V_0$$

für alle $\boldsymbol{u} \in V_1$ und $\boldsymbol{w} \in V_0$ gilt. Dazu nehmen wir einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{u} + V_0$ mit $\boldsymbol{x} \in V_0$ und betrachten sein Skalarprodukt mit $\boldsymbol{y}$:

$$\langle (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 1 + 0 = 1 .$$

Somit gehört $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}$ zu V_1. Die zweite Inklusion $\boldsymbol{w} + V_1 \subseteq V_0$ folgt analog. Somit gilt

$$|V_0| = |\boldsymbol{u} + V_0| \leq |V_1| = |\boldsymbol{w} + V_1| \leq |V_0|,$$

woraus $|V_0| = |V_1|$ folgt.

6.7 **(a)** Diese Aussage ist i. A. falsch! Betrachte zum Beispiel die Vektorräume $V = \mathbb{Z}_2^2$ und $U = \text{span}(\{\boldsymbol{1}\})$ mit $\boldsymbol{1} = (1{,}1)$. Dann ist $U^{\perp} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$. Der Vektor $\boldsymbol{e}_1 = (1{,}0)$ liegt aber nicht in $\text{span}(U \cup U^{\perp}) = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$.

(b) Diese Aussage ist richtig! Gehört ein Vektor $\boldsymbol{x}$ zu U, so muss er zu allen Vektoren in $U^{\perp}$ orthogonal sein, woraus $\boldsymbol{x} \in (U^{\perp})^{\perp}$ und damit auch $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$ folgt. Der Vektorraum U liegt also in dem Vektorraum $V = (U^{\perp})^{\perp}$. Außerdem hat U nach Satz 6.23 die gleiche Dimension wie V:

$$\dim V = \dim{(U^{\perp})^{\perp}} = n - \dim U^{\perp} = n - (n - \dim U) = \dim U ,$$

woraus $U = V$ folgt.

6.8 Wir wollen zuerst zeigen, dass $\text{span}(V \cup V^{\perp}) = \text{span}(V \cap (V^{\perp})^{\perp})$ gilt. Ein Vektor $\boldsymbol{x}$ liegt im $\text{span}(V \cup V^{\perp})$ genau dann, wenn er orthogonal zu allen Vektoren in V wie auch zu allen

Vektoren in $V^\perp$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn $\boldsymbol{x} \in V^\perp \cap (V^\perp)^\perp = V \cap V^\perp$ gilt. (Hier haben wir die Aufgabe 6.7(b) benutzt.)

Sei nun $\boldsymbol{x}$ ein beliebiger Vektor in $V \cap V^\perp$. Dann gehört $\boldsymbol{x}$ zu V wie auch zu $V^\perp$, woraus $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ folgt. Da wir aber modulo 2 rechnen, bedeutet dies, dass die Anzahl der Einsen in $\boldsymbol{x}$ gerade ist und somit $\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{1} \rangle = 0$ gilt. Damit haben wir gezeigt, dass der Vektor $\mathbf{1}$ in $(V \cap V^\perp)^\perp \subseteq \operatorname{span}((V \cap V^\perp)^\perp) = \operatorname{span}(V \cup V^\perp)$ liegt.

6.9 Es gelte $\langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \rangle < 0$ für alle $i \neq j$ und betrachte die Vektoren $\boldsymbol{x}'_i = (\boldsymbol{x}_i, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ für $i = 1, \dots, n+2$. Der Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ hat die Dimension $n+1$. Da wir mehr als $n+1$ Vektoren in diesem Vektorraum haben, müssen diese Vektoren linear abhängig sein. Es muss also eine Linearkombination

$$a_1 \boldsymbol{x}'_1 + a_2 \boldsymbol{x}'_2 + \cdots + a_{n+2} \boldsymbol{x}'_{n+2} = \mathbf{0}$$

geben, wobei nicht alle a_i gleich Null sind. Dann gilt aber sowohl

$$a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{n+2} \boldsymbol{x}_{n+2} = \mathbf{0} \tag{13.4}$$

wie auch

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+2} = 0\,. \tag{13.5}$$

Da nicht alle a_i gleich Null sind, müssen nach (13.5) die Mengen $P = \{i : a_i > 0\}$ und $N = \{i : a_i < 0\}$ beide nicht leer sein. Aßerdem gilt nach (13.4)

$$\sum_{i \in P} a_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{j \in N} a_j \boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}\,.$$

Daher kann man den Vektor

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i \in P} a_i \boldsymbol{x}_i$$

auch als

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j \in N} (-a_j) \boldsymbol{x}_j$$

darstellen. Nach der Definition der Mengen N und P gilt $-a_i a_j > 0$ und nach unserer Annahme auch $\langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \rangle < 0$ für alle $i \in P$ und alle $j \in N$. Somit ist das Skalarprodukt

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \Big\langle \sum_{i \in P} a_i \boldsymbol{x}_i,\ \sum_{j \in N} -a_j \boldsymbol{x}_j \Big\rangle = \sum_{i \in P} \sum_{j \in N} -a_i a_j \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \rangle < 0$$

negativ, ein Widerspruch zu $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$.

6.10 Sei $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Dann ist $\operatorname{Bild} f_A$ der Spaltenraum und $\operatorname{Bild} f_{A^\top}$ ist der Zeilenraum von A. Nach Satz 6.4 besitzen diese beiden Vektorräume die gleiche Dimension:

$$\dim \operatorname{Bild} f_A = \dim \operatorname{Bild} f_{A^\top}\,.$$

Zusammen mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 5.48 in Abschnitt 5.6.2) erhalten wir

$$\dim \operatorname{Null} f_{A^\top} = m - \dim \operatorname{Bild} f_{A^\top} = m - \dim \operatorname{Bild} f_A\,.$$

Da das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ genau dann für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}^m$ lösbar ist, wenn $\dim \operatorname{Bild} f_A = m$ gilt, ist dass genau der Fall, wenn $\dim \operatorname{Null} f_{A^\top} = 0$ gilt.

Kapitel 7

7.1 Sei x_1 die Älte des Vaters, x_2 die Älte des ältesten Sohnes und x_3 die Älte des jüngsten Sohnes. Dann können wir unsere Information über diese unbekannten Zahlen als ein Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

darstellen. Vorwärtselimination:

$$\begin{array}{rrr|r|l}
1 & 1 & 1 & 100 & \\
1 & -2 & 0 & 0 & z_2 - z_1 \\
1 & 0 & -1 & 30 & z_3 - z_1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 100 & \\
0 & -3 & -1 & -100 & \\
0 & -1 & -2 & -70 & z_3 - z_2/3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 100 & \\
0 & -3 & -1 & -100 & \\
0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{110}{3} &
\end{array}$$

Lösbarkeitsentscheidung: Das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist *eindeutig* lösbar, da $\operatorname{rk}(A) = 3$ gleich der Anzahl der Zeilen ist.

Rückwärtssubstitution: Aus $-\frac{5}{3}x_3 = -\frac{110}{3}$ folgt $x_3 = 22$. Aus $-3x_2 - 22 = -100$ folgt $x_2 = 78/3 = 26$. Schließlich folgt $x_1 = 52$ aus $x_1 + 26 + 22 = 100$. Also ist der Vater 52 Jahre alt, der älteste Sohn ist 26 und der jüngste Sohn ist 22 Jahre alt.

7.2 Für $a = 1$ kollabiert das Gleichungssystem zu einer einzigen Gleichung $x+y+z = 1$. Diese besitzt unendlich viele Lösungen. Sei nun $a \neq 1$. Das Eliminationsverfahren liefert dann

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & 1-a \end{array}\right].$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich die Bedingung $(-a^2-a+2)z = 1-a$. Da $a \neq 1$ vorausgesetzt ist, ist diese Gleichung nur dann erfüllbar, wenn $-a^2 - a + 2 \neq 0$ gilt. Das ist für alle $a \notin \{-2,1\}$ der Fall. Für $a = -2$ besitzt das Gleichungssystem also keine Lösung. Sei nun $a \notin \{-2,1\}$. Dann gilt

$$z = \frac{1-a}{-a^2-a+2} = \frac{1-a}{(-a+1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}\,.$$

Rückwärts Einsetzen liefert

$$(a-1)y + (1-a)\frac{1}{a+2} = 0\,,$$

also

$$y = -\frac{1-a}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-1}{(a+2)(a-1)} = \frac{1}{a+2}\,.$$

Weiter ist dann

$$x + \frac{1}{a+2} + a\frac{1}{a+2} = 1\,,$$

folglich gilt

$$x = 1 - \frac{a+1}{a+2} = \frac{1}{a+2}\,.$$

Zusammenfassend ergibt sich also:

(i) Keine Lösung für $a = -2$.
(ii) Genau eine Lösung für $a \notin \{-2{,}1\}$. Diese Lautet

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right).$$

(iii) Mehrere Lösungen für $a = 1$.

7·3 Aus

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & x \\ -x & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -4 & x \\ -x & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & x \\ -x & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-x^2 & 0 \\ 0 & 16-x^2 \end{bmatrix}$$

folgt $16 - x^2 = -1$ und damit auch $x = \pm\sqrt{17}$.

7·4 Zunächst lohnt es sich $X^2 - 2X$ bis zu einem Quadrat zu erweitern, d. h. durch

$$(X-E)^2 = X^2 - 2X + E$$

zu ersetzen. Wir addieren deshalb die Einheitsmatrix E zu beiden Seiten der gegebenen Gleichung

$$X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}. \tag{13.6}$$

Die äquivalente Gleichung ist somit

$$(X-E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sei nun

$$(X-E) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Unser Ziel ist, die Einträge dieser Matrix zu bestimmen. Dafür setzen wir diese Matrix in die Gleichung (13.6) ein und erhalten

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} = (X-E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Da $c(a+d) = 6$ ungleich Null ist, ist auch $a+d$ ungleich Null. Aus $b(a+d) = 0$ folgt daher $b = 0$. Aus $a^2 + bc = 0$ folgt somit auch $a = 0$. Dies ergibt $a = b = 0$, $cd = 6$ und $d^2 = 4$, woraus $d = \pm 2$ und $c = \pm 3$ folgt. Also

$$X - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm 3 & \pm 2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen X der Gleichung (13.6) und somit der ursprünglichen Gleichung sind also

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.5 (1) f_A ist injektiv $\iff$ $A\boldsymbol{x} \neq A\boldsymbol{y}$ oder äquivalent $A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^n$ gilt. Da $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ äquivalent zu $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ ist, ist dies zu der linearen Unabhängigkeit der Spalten der Matrix A äquivalent.

(2) Surjektivität von $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ bedeutet, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle Vektoren $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}^m$ lösbar sein muss. Dies bedeutet aber, dass die Spalten von A den ganzen Vektorraum $\mathbb{F}^m$ aufspannen müssen.

(3) folgt aus (1) und (2), da S genau dann eine Basis von $\mathbb{F}^m$ ist, wenn $\operatorname{span}(S) = \mathbb{F}^m$ gilt und die Vektoren in S linear unabhängig sind.

7.6 Nach ein paar Schritten kommt man zu der Vermutung

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit der Induktion kann man diese Vermutung auch begründen:

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.7 Da A invertierbar ist, so ist auch A^{-1}. Da A^{-1} und B invertierbar sind, so ist auch das Produkt $A^{-1}B$. Deshalb muss $A^{-1}B$ den vollen Rang n haben, d. h. alle n Spalten von $A^{-1}B$ müssen linear unabhängig sein. Da $\dim \mathbb{R}^n = n$ gilt, folgt die Behauptung.

7.8 Sei $B = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n]$. Dann ist $AB = [A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n]$. Wir wissen, dass $A\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{b}_n \neq \boldsymbol{0}$ gilt. Damit ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_n$ eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Dies bedeutet, dass die Spalten von A linear abhängig sind.

7.9 Da die Spalten von $B = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n]$ linear abhängig sind, muss eine der Spalten, sei es o. B. d. A. die letzte Spalte $\boldsymbol{b}_n$, eine Linearkombination $\boldsymbol{b}_n = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1}$ der anderen Spalten sein. Aus $AB = [A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n]$ folgt nun, dass auch die letzte Spalte $A\boldsymbol{b}_n$ von AB eine Linearkombination der anderen Spalten von AB sein muss:

$$A\boldsymbol{b}_n = A(c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1}) = c_1 A\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{n-1}A\boldsymbol{b}_{n-1}.$$

Also sind auch die Spalten von AB linear abhängig.

7.10 Ist $\mathrm{rk}(A) < n$, so muss es einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ und $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ geben. Somit gilt auch $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ und die Matrix ist nicht positiv definit.

7.11 Aus $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ folgt $CA\boldsymbol{x} = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Andererseits gilt $CA\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Also muss $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ gelten.

7.12 Für $\boldsymbol{x} = D\boldsymbol{b}$ gilt $A\boldsymbol{x} = A(D\boldsymbol{b}) = (AD)\boldsymbol{b} = E\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$. Also ist $\boldsymbol{x} = D\boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

7.13 Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung $(B - C)D = \mathbf{0}$ mit D^{-1}. Dies ergibt

$$B - C = (B - C)DD^{-1} = \mathbf{0} \cdot D^{-1} = \mathbf{0}$$

und somit auch $B = C$.

7.14 Sei $U = \mathrm{span}(A)$ der Spaltenraum von A und $W = \mathrm{span}(A, \boldsymbol{b})$ sei der Spaltenraum der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$. Wegen der Dimensionsformel für direkte Summen gilt

$$\dim U + \dim U^\perp = m = \dim W + \dim W^\perp ,$$

woraus

$$U^\perp = W^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad U = W$$

folgt. Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\iff \mathrm{span}(A, \boldsymbol{b}) = \mathrm{span}(A) \\ &\iff \mathrm{span}(A, \boldsymbol{b})^\perp = \mathrm{span}(A)^\perp \\ &\iff \text{aus } \boldsymbol{y}^\top A = 0 \text{ folgt } \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 . \end{aligned}$$

7.15 Nach Satz 7.1 gilt

$$(A + A^\top)^\top = A^\top + (A^\top)^\top = A^\top + A = A + A^\top .$$

Somit ist die Matrix $A + A^\top$ symmetrisch. Es gilt auch

$$(A - A^\top)^\top = A^\top - (A^\top)^\top = -(A - A^\top) .$$

Somit ist $A - A^\top$ fast symmetrisch. Es reicht also die Matrix A als die Summe

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$$

zu schreiben.

7.16 Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 ; \\ \det(B) \det &\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = -8 - 15 = -23 ; \end{aligned}$$

$$\det(A+B) = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = 18 - 28 = -10 \neq -22 = \det(A) + \det(B)\,;$$
$$\det(AB) = \det \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} 28 - 51 = -23 \neq -23 = \det(A) \cdot \det(B)\,.$$

7.17 Nimm $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \notin \{0, a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ und betrachte die Matrizen

$$X = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

und

$$Y = \begin{bmatrix} \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $A = X + Y$, $\det(X) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \neq 0$ und $\det(Y) = \lambda^n \neq 0$.

7.18 Aus $A^\top A = E$ folgt

$$1 = \det(E) = \det(A^\top \cdot A) = \det(A^\top) \cdot \det(A) = \det(A)^2$$

und somit auch $\det(A) = \pm 1$.

7.19 Ist A eine $m \times n$ Matrix und sind ihre Spalten linear unabhängig, so muss $\mathrm{rk}(A) = n$ gelten. Dann gilt auch $\mathrm{rk}(A^\top) = \mathrm{rk}(A) = n$, woraus $A^\top \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ folgt.

7.20 Nach Satz 7.3 gilt $a_{ij} \neq 0$ genau dann, wenn die Knoten i und j adjazent sind, und $b_{ij} \neq 0$ gilt genau dann, wenn es einen Weg der Länge 2 von i nach j über einen dritten Knoten $k \notin \{i, j\}$ gibt. Somit bilden die Knoten i, j und k einen Dreieck genau dann, wenn $a_{ij} \neq 0$ und $b_{ij} \neq 0$ gilt.

7.21 Nach Aufgabe 6.2 reicht es zu zeigen, dass die Zeilen von H_{2m} paarweise orthogonal sind. Dafür benutzen wir Induktion über m. Für $m = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Für den Induktionsschritt $m - 1 \mapsto m$ seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ zwei Zeilen von H_{2m}. Diese Zeilen haben die Form $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \pm\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{v}, \pm\boldsymbol{v})$, wobei nach der Induktionsannahme $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ gilt. Somit muss aber auch $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \pm \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \pm 0 = 0$ gelten.

7.22 Wegen $A^3 = B^3$ und $A^2B = B^2A$ gilt

$$(A^2 + B^2)(A - B) = A^3 - A^2B + B^2A - B^3 = \mathbf{0} \qquad \mathbf{0} \text{ ist hier die Nullmatrix}\,.$$

Hätte also die Matrix $A^2 + B^2$ ein Inverses $(A^2 + B^2)^{-1}$, dann würde

$$A - B = E(A - B) = (A^2 + B^2)^{-1}(A^2 + B^2)(A - B) = \mathbf{0}$$

gelten, woraus $A - B = \mathbf{0}$ im Widerspruch zu $A \neq B$ folgen würde.

7.23 Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda = 2$ und $\lambda = 1$. Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)\,.$$

Die Lösungen von $\det(B - \lambda E) = 0$ sind also $\lambda = 1$ (mit Vielfachheit 2) und $\lambda = 2$.

7.24

$$A^{-1}\boldsymbol{v} = A^{-1}(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(A\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\lambda}(A^{-1}A)\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}\,.$$

7.25 Seien $\lambda \neq \mu$ verschiedene Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ seien Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ und $A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\boldsymbol{y}^\top$, die zweite mit $\boldsymbol{x}^\top$ und erhalten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} &= \langle \boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \lambda\boldsymbol{x}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle, \\ \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y} &= \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle. \end{aligned}$$

Die linken Seiten stimmen wegen der Symmetrie von A (also $A^\top = A$) und der Gleichungen $(XY)^\top = Y^\top X^\top$ und $(X^\top)^\top = X$ überein:

$$\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} = (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top((A\boldsymbol{y})^\top)^\top = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y}\,.$$

Damit ergibt sich $\lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$. Da aber $\lambda \neq \mu$ gilt, muss daher $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$ gelten.

7.26 Induktion über n. Die Basis $n = 2$ ist richtig, denn es gilt:

$$\det(X_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1 = x_2 - x_1\,.$$

Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$. Für $i = 1, \ldots, n-1$ multiplizieren wir die i-te Spalte von

$$X_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

mit x_1 und ziehen die resultierende Spalte von der $(i+1)$-ten Spalte ab. Somit erhalten wir die Matrix

$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}.$$

Wegen der Linearität bleibt die Determinante dabei unverändert, also $\det(X_n) = \det(Y_n)$ gilt. Die Matrix Y_n enthält nur eine Eins in der ersten Zeile. Nach der Laplace'scher Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte können wir die erste Zeile und die erste Spalte streichen. Für die resultierende Matrix Z_n gilt dann auch $\det(Y_n) = 1 \cdot \det(Z_n) = \det(Z_n)$. Nun benutzen wir die Linearität der Determinante (hier ist $\boldsymbol{z}$ ein Zeilenvektor)

$$\det(\ldots, \lambda\boldsymbol{z}, \ldots) = \lambda \cdot \det(\ldots, \boldsymbol{z}, \ldots)\,,$$

um die Zahlen $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_1$ »nach Vorne« zu bringen

$$\det(Z_n) = \det\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Die dabei enstehende $(n-1)\times(n-1)$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix (für Elementen $x_2, \ldots, x_n$). Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher

$$\det(X_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{2\le i<j\le n} (x_j - x_i) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)\,.$$

7.27 Für n verschiedenen Element $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ sei A eine $n \times n$ Matrix A mit den Zeilen

$$\boldsymbol{x}_i = \left(1, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{n-1}\right), \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Da alle Elemente $a_1, \ldots, a_n$ verschieden sind und A eine Vandermonde-Matrix ist, gilt

$$\det(A) = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i) \neq 0\,.$$

Nach dem Singularitätskriterium (Korollar 7.19) müssen daher alle Zeilen $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ der Matrix A linear unabhängig sein.

7.28 Sei $A = (a_{ij})$ eine streng diagonal dominante $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$, d.h. $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für alle Zeilen $i = 1, \ldots, n$ gilt. Angenommen, A ist singulär, also $\operatorname{rk}(A) < n$. Dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ und $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Wegen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ist die Zahl

$$|x_k| = \max\{|x_i| \;:\; i = 1, \ldots, n\}$$

positiv. Wir betrachten nun die k-te Koordinate $\sum_{j=1}^n a_k j x_j$ des Vektors $A\boldsymbol{x}$. Wegen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ muss diese Koordinate gleich Null sein. Für den Absolutbetrag dieser Koordinate gilt aber

$$\Big|\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j\Big| \geq |a_{kk}x_k| - \sum_{j\neq k}^n |a_{kj}x_j| \geq |x_k|\Big(|a_{kk}| - \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\Big) > 0,$$

ein Widerspruch.

7.29 Da auf der Diagonalen von A nur Einsen stehen, gilt $\mathrm{Tr}(A) = n$. Wie sieht dann $\mathrm{Tr}(A^2)$ aus? Sind $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ die Zeilen von A, so ist der Eintrag b_{ij} der Matrix $A^2 = (b_{ij})$ genau das Skalarprodukt $b_{ij} = \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle$ der i-ten und der j-ten Zeile von A (die Matrix A ist ja symmetrisch). Somit gilt wegen $a_{ii} = 1$ und $|a_{ij}| \le 1/\sqrt{n}$ für alle $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A^2) &= \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \\
&= \sum_{i=1} a_{ii}^2 + \sum_{1 \le i \neq j \le n} a_{ij}^2 \\
&\le n + n(n-1)(1/\sqrt{n})^2 = 2n - 1 \,.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.39 gilt daher

$$\mathrm{rk}(A) \ge \frac{\mathrm{Tr}(A)^2}{\mathrm{Tr}(A^2)} \ge \frac{n^2}{2n-1} > \frac{n}{2} \,. \qquad \square$$

Kapitel 8

8.1

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k+1} b^k - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} - b^{n+1} \,.
\end{aligned}$$

8.2 Sei x bzw. y die Anzahl der Flachen in der obersten bzw. untersten Reihe. Mathematisch kann man das Problem wie folgt formulieren: Für gegebene Zahl $a = pm$ gesucht sind zwei Zahlen $x < y$, so dass die Gleichung $a = \sum_{i=x}^{y} i$ gilt. Dazu betrachten wir arithmetische Reihen von der Form

$$S_r = (m-r) + \dots + (m-2) + (m-1) + m + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+r) \,.$$

Dann gilt $S_r = (2r+1)m$. Es reicht also r so zu wählen, dass $p = 2r+1$ gilt. Dann gilt auch $a = \sum_{i=x}^{y} i$ mit $x = m - r$ und $y = m + r$.

8.3 Sei a_k die Weglänge, die der Frosch nach k Sprüngen zurücklegt. Dann gilt $a_1 = 1$ und $a_{k+1} = \frac{2}{3} a_k$. Somit wir der Frosch nach n Sprüngen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Meter zurücklegen. Da S_6 »ungefähr« 2,74 ist, wird der arme Frosch nicht überleben. Noch schlimmer: Auch nach *unendlich* vielen Sprüngen würde der Frosch nur

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \frac{1}{1-(2/3)} = 3$$

Meter zurücklegen und würde somit immer noch in Gefahr bleiben.

8.4 Sei $q = 1 + p$ der Zuwachsfaktor des Kapitals in einem Jahr und sei K_i der Kontostand am Anfang des $(i+1)$-ten Jahres. Dann gilt

$$K_1 = Kq - x\,,$$
$$K_2 = K_1 \cdot q - x = Kq^2 - xq - x\,,$$
$$K_3 = K_2 \cdot q - x = Kq^3 - xq^2 - xq - x\,,$$

und die Vermutung leigt nahe: Es sollte

$$K_n = Kq^n - xq^{n-1} - xq^{n-2} - \ldots - xq^0 = Kq^n - x\sum_{i=0}^{n-1} q^i = Kq^n - x \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

gelten. Wir beweisen diese Vermutung

$$K_n = Kq^n - x \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \tag{13.7}$$

mittels Induktion über n. Induktionsbasis $n = 1$ ist trivial, da

$$K_1 = Kq - x = Kq^1 - x\frac{1-q^1}{1-q}$$

gilt. Induktionsschritt $n \mapsto n+1$. Es gilt $K_{n+1} = K_n \cdot q - x$, denn in einem Jahr hat das Kapital vom Vorjahr um q mal zugewachsen und Theo zieht den Betrag x davon ab. Außerdem gilt nach der Induktionsannahme die Gleichung (13.7). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} K_{n+1} = K_n \cdot q - x &= \Big(Kq^n - x \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\Big) \cdot q - x \\ &= Kq^{n+1} - x\Big(\frac{q-q^{n+1}}{1-q} + 1\Big) \\ &= Kq^{n+1} - x \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (13.7) bewiesen. Es bleibt also nur die Gleichung $K_n = 0$ nach x zu lösen:

$$x = K \cdot \frac{q^n(1-q)}{1-q^n}\,.$$

8.5 Das charakteristische Polynom von $x_n = 7x_{n-1} - 16x_{n-2} + 12x_{n-3}$ ist

$$z^3 - 7z^2 + 16z - 12 = (z-2)^2(z-3)\,.$$

Somit ist $(\mathbf{E}-2)^2(\mathbf{E}-3)$ ein Vernichter der Folge (x_n). Der erste Faktor $(\mathbf{E}-2)^2$ vernichtet die Folge von der Form $((an+b)2^n)$ und der zweite Faktor $\mathbf{E}-3$ vernichtet die Folge von der Form $(c3^n)$. Die allgemeine Lösung ist also die Summe

$$x_n = (an+b)2^n + c3^n$$

diesen beiden Folgen. Nun benutzen wir die Randbedingungen, um die Koeffizienten a, b, c

zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 1 = x_0 &= (a \cdot 0 + b)2^0 + c3^0 = b + c \\ 5 = x_1 &= (a \cdot 1 + b)2^1 + c3^1 = 2a + 2b + 3c \\ 17 = x_2 &= (a \cdot 2 + b)2^2 + c3^2 = 8a + 4b + 9c\,. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem und erhalten $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$. Somit ist

$$x_n = n2^n + 3^n$$

die gesuchte Lösung.

8.6 Der Vernichter der Erbffolge (n) ist $(\mathbf{E}-1)^2$ und er die Folgen von der Form $bn+c$ vernichten kann. Das charakteristische Polynom des homogenen Teils ist $z^2-4z+4 = (z-2)^2$. Deshalb hat dieses Teil $(\mathbf{E}-2)^2$ als Vernichter, und dieser vernichtet Folgen von der Form $an2^n$. Zusammen ergibt sich die allgemeine Lösung $x_n = an2^n + bn + c$. Aus Randbedingungen folgt $a = 1$, $b = 1$ und $c = 4$. Eine Lösung ist also $x_n = n2^n + n + 4$.

Kapitel 9

9.1 Sei $\epsilon > 0$ beliebig klein. Wir wissen, dass es ein N gibt mit $|a - a_n| < \epsilon/2$ für alle $n \geq N$. Sei $C = |a - a_1| + |a - a_2| + \cdots + |a - a_N|$ (eine Konstante!) und sei $M = \max\{N, 2C/\epsilon\}$. Dann gilt $C/n < \epsilon/2$ für alle $n > M$. Für solche n gilt somit auch

$$\begin{aligned} |a - b_n| = \left|a - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right| &= \left|\frac{(a - a_1) + (a - a_2) + \cdots + (a - a_n)}{n}\right| \\ &\leq \frac{|a - a_1| + |a - a_2| + \cdots + |a - a_n|}{n} \\ &< \frac{C}{n} + \frac{(\epsilon/2)n}{n} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

9.2 Aus $a_n = n(n+1)/2n^2 = 1/2 + 1/2n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1/2n) = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

9.3 Wegen $x - y = (x^2 - y^2)/(x + y)$ gilt:

$$|a_n - 0| = a_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

9.4 Zuerst wollen wir zeigen, dass die Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(z) = 2z - az^2$ konvergiert. Dazu wenden wir das Monotonie-Kriterium an. Die Ungleichung $f(z) \leq 1/a$ ist äquivalent zu $2az - (az)^2 \leq 1$, was wiederum äquivalent zu $(az-1)^2 \geq 0$ ist. Somit ist die Folge (x_n) nach oben durch $1/a$ beschränkt. Aus

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n - ax_n^2 - x_n = x_n - ax_n^2 \geq 0 \iff ax_n \leq 1 \iff x_n \leq 1/a$$

folgt, dass die Folge (x_n) auch monoton wachsend ist und muss daher nach Monotonie-Kriterium einen Grenzwert b haben. Unter der Benutzung der Grenzwertregeln erhalten wir

$$b = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2x_n - ax_n^2) = 2\lim_{n\to\infty} x_n - a(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 = 2b - ab^2 .$$

Also muss b die Gleichung $b = 2b - ab^2$ erfüllen, woraus $b = 1/a$ folgt.

9.5 Die x-Koordinate ändert sich nur in geraden Schritten $2k+2$ für $k = 0,1,2,\ldots$, also in Schritten $2,4,6,8,\ldots$. Die x-Koordinate ändert sich nur in ungeraden Schritten $2k+1$ für $k = 0,1,2,\ldots$, also in Schritten $1,3,5,7,\ldots$. Außerdem wächst für $k = 0,1,2,\ldots$

$$x\text{-Koordinate im Schritt } 2k+2 \text{ um } \ (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}}$$

und

$$y\text{-Koordinate im Schritt } 2k+1 \text{ um } \ (-1)^k \frac{1}{2^{2k}}, .$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \ldots\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{-1}{4} + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{-1}{4}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots \\ &= 1 + \frac{-1}{4} + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{-1}{4}} \\ &= \frac{4}{5} . \end{aligned}$$

Also wird sich die Fliege nach unendlich vielen Schritten im Punkt $(2/5,4/5)$ befinden.

9.6 Indem wir $|x|$ als $\frac{1}{1+q}$ für ein $q > 0$ schreiben, folgt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} |nx^n| = \frac{n}{(1+q)^n} &= \frac{n}{1 + \binom{n}{1}q + \binom{n}{2}q^2 + \ldots + q^n} \\ &< \frac{n}{\binom{n}{2}q^2} = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} < c \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

mit $c = 4/q^2$. Damit haben wir gezeigt, dass die Nullfolge $(1/n)$ eine Majorante für die

Folge (nx^n) darstellt und muss daher nach dem Majorantenkriterium für Nullfolgen gegen Null streben.

9.7

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots \right] \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^k \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \leq \frac{2}{(n+1)!}\,,
\end{aligned}$$

da die Zahl in Klammern nicht größer als 2 sein kann.

9.8 Wegen

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

gilt (Teleskopsumme)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{Teleskopsumme}\,.
\end{aligned}$$

9.9 Unsere Reihe hat die Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k = \frac{1}{k(\log_2 k)^{1+\alpha}}$$

und $\alpha > 0$. Die verdichtete Reihe ist somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log_2 2^k)^{1+\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$$

mit $r = 1+\alpha > 1$. Daher ist die verdichtete Reihe eine verallgemeinerte harmonische Reihe und muss nach Satz 9.21 konvergieren.

9.10 Die Gesamthöhe des Turms ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\,.$$

9.11 Mit $A_0 = 0$ gilt wegen $A_k - A_{k-1} = a_k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k &= \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1}) \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} \cdot b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1} \\ &= A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_k - \Big(A_0 \cdot b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}\Big) \\ &= A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1})\,.\end{aligned}$$

9.12 Der Gesamtvorsprung der Schildkröte ist

$$10 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 10 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} < 12.$$

Also wird Achill die Schildkröte spätestens nach 12 Eilen einholen.

Kapitel 10

10.1 Nach dem Teilfolgenkriterium (Satz 9.2) konvergiert jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$$

gegen e:

$$\lim_{k\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k} = \mathrm{e}\,. \tag{13.8}$$

Wir haben nun vor, das Folgenkriterium für den Limes (Satz 10.1) auszunutzen.

Sei (x_k) eine *beliebige* Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$; wir können o.B.d.A. annehmen, dass $x_k > 1$ für alle k gilt. Wir setzen

$$n_k := \lfloor x_k \rfloor\,.$$

Dann gilt

$$n_k \le x_k < n_k + 1\,,$$

also auch

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k}$$

und somit auch

$$\Big(1 + \frac{1}{n_k+1}\Big)^{n_k} < \Big(1 + \frac{1}{x_k}\Big)^{x_k} \le \Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k+1}\,.$$

Die Terme auf der linken und auf der rechten Seite kann man umschreiben als

$$\Big(1+\frac{1}{n_k+1}\Big)^{n_k} = \frac{\Big(1+\frac{1}{n_k+1}\Big)^{n_k+1}}{\Big(1+\frac{1}{n_k+1}\Big)} und \Big(1+\frac{1}{n_k}\Big)^{n_k+1} = \Big(1+\frac{1}{n_k}\Big)^{n_k}\cdot\Big(1+\frac{1}{n_k}\Big).$$

Strebt nun k (und somit auch n_k) gegen Unendlich, so streben nach (13.8) auch die beiden Terme gegen e. Damit muss nach dem Vergleichskriterium (Satz 9.3) auch

$$\lim_{k\to\infty}\Big(1+\frac{1}{x_k}\Big)^{x_k} = \mathrm{e}$$

gelten. Da das für eine *beliebige* Folge (x_k) mit $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$ gilt, muss nach dem Folgenkriterium für den Limes (Satz 10.1)

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x} = \mathrm{e}$$

gelten.

10.2 Gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, so muss es für jedes $\epsilon > 0$ einen Schwellenwert N_ϵ geben, so dass $|f(x)| < \epsilon$ für alle $x > N_\epsilon$ gilt. Dann gilt auch $|f(x)^k| = |f(x)|^k < \epsilon$ für alle $x > N_{\epsilon^{1/k}}$.

10.3 Um die Ungleichung $\ln x \le x-1$ zu beweisen, wenden wir den 2. Mittelwertsatz mit $f(z) = \ln z$ und $g(z) = z-1$ an und erhalten

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{(x-1)-0} = \frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{1}{\xi}$$

für ein ξ zwischen x und 1. Ist $x > 1$, so ist auch $\xi > 1$ und $x-1 > 0$, und wir erhalten $\ln x < x-1$. Ist $0 < x < 1$, so ist auch $\xi < 1$ und $x-1 < 0$. Da in diesem Fall $(\ln x)/(x-1) > 1$ gilt und $x-1$ negativ ist, erhalten wir wiederum $\ln x < x-1$.

10.4 **(a)** Die Regeln von Bernoulli–l'Hospital ergeben

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\,,$$

woraus

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

folgt.

(b) Die Regeln von Bernoulli–l'Hospital ergeben

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) Logarithmieren und die Regeln von Bernoulli–l'Hospital ergeben

$$\lim_{x\to\infty} bx\ln(1+\frac{a}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{bx}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+a}\left(\frac{-a}{x^2}\right)}{\frac{-1}{bx^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{abx}{x+a}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ab}{1+a/x} = ab\,.$$

Also ist

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} bx\ln(1+\frac{a}{x})\right) = \mathrm{e}^{ab}\,.$$

(d) Wir überführen zuerst den Ausdruck zu dem Fall $\frac{0}{0}$ und wenden dann die Regeln von Bernoulli–l'Hospital an:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{(x-1)(\ln x)'+(x-1)'\ln x} && \text{Bernoulli–l'Hospital} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{(x-1)(1/x)+\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{1-1/x+\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1/x^2}{1/x^2+1/x} && \text{Bernoulli–l'Hospital} \\
&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(e) Die Regeln von Bernoulli–l'Hospital ergeben

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2\mathrm{e}\,.$$

(f) Die Regeln von Bernoulli–l'Hospital ergeben

$$\lim_{x\to a}\frac{x^p-a^p}{x^q-a^q} = \lim_{x\to a}\frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{p}{q}x^{p-q}\,.$$

10.5 Wir beweisen nur (10.1), alle anderen Gleichungen sind analog zu behandeln. Sei $h(x) = \log_a(1+x)$. Dann ist $h(x) = f(g(x))$ mit $g(x) = 1+x$ und $f(y) = \log_a y = (\ln y)/(\ln a)$. Also gilt $g'(x) = 1$ und $f'(y) = 1/(y\ln a)$. Die Regeln von Bernoulli–l'Hospital ergeben somit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(g(x))g'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)\ln a} = \frac{1}{\ln a} = \log_a \mathrm{e}\,.$$

10.6 Das stimmt! Wegen $f = O(g)$ gibt es einen Schwellenwert K und eine Konstante $c > 0$, so dass $f(k) \le c\cdot g(k)$ für alle $k \ge K$ gilt. Sei nun

$$D = \max\{f(k)\colon k = 1,\ldots,K\}$$

(eine Konstante!). Dann gilt auch für alle n

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{K} f(k) + c \cdot \sum_{k=K+1}^{n} g(k) \leq K \cdot D + c \cdot G(n) \leq C \cdot G(n)\,,$$

wobei $C = K \cdot D + c$ eine Konstante ist.

10.7 **(a)** Wir bringen zuerst auch die zweite $g(x) = \sqrt{x}$ Funktion in eine Exponentenform

$$g(x) = \mathrm{e}^{(\ln x)/2}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2(\ln\ln x)^2}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4\ln\ln x(\ln\ln x)'}{(1/x)} && \text{Bernoulli–l'Hospital} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4\ln\ln x}{\ln x} && \text{da } (\ln\ln x)' = \tfrac{1}{\ln x}(\ln x)' = \tfrac{1}{x\ln x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x\ln x} \cdot \frac{1}{(1/x)} && \text{Bernoulli–l'Hospital} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\ln x} = 0\,.
\end{aligned}$$

(b) Beide Logarithmen sind konstanten Vielfachen von $\ln x$: $\log_4 x = c_1 \ln x$ mit $c_1 = 1/\ln 4$ und $\log_2 x = c_2 \ln x$ mit $c_2 = 1/\ln 2$. Es reicht also die Funktionen $F(x) = x\ln x$ und $G(x) = \sqrt{x}(\ln x)^3$ zu vergleichen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{\sqrt{x}(\ln x)^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}} && \text{Bernoulli–l'Hospital} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\ln x} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} && \text{Bernoulli–l'Hospital} \\
&= \frac{1}{8}\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{8}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty\,.
\end{aligned}$$

Also ist $G(x) = o(F(x))$ und damit auch $g(x) = o(f(x))$.

(c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\log_2 4} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{(\log_2 x)^{1/3}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to\infty} (\log_2 x)^{1/6} = \infty.$$

Also ist $g(x) = o(f(x))$.

10.8 Da nach Basisvertauschregel für Logarithmen $\log_a f(n) = c \cdot \log_b g(n)$ mit $c := 1/\log_b a$ gilt, ist $\log_a f(n)$ einfach ein c-faches von $\log_b g(n)$.

10.9 Aus $f(n) = o(g(n))$ folgt (insbesondere), dass $f(n) \leq \frac{1}{2}g(n)$ für fast alle n gilt. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$ strebt somit der Quotient $\mathrm{e}^{g(n)}/\mathrm{e}^{f(n)} = \mathrm{e}^{g(n)-f(n)} \geq \mathrm{e}^{g(n)/2}$ gegen Unendlich, woraus $\mathrm{e}^f = o(\mathrm{e}^g)$ folgt.

10.10 Sei $f(x) = 1/x^{1/m}$. Wir haben vor, das Integral-Kriterium anzuwenden. Dazu brauchen wir eine Funktion (Stammfunktion) $F(x)$ deren Ableitung gleich $f(x)$ ist. Dazu wählen wir

$$F(x) = \frac{m}{m-1}x^{1-1/m}\,.$$

Da

$$F'(x) = \frac{m}{m-1}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)x^{1-1/m-1} = x^{-1/m} = f(x)$$

gilt, ist $F(x)$ tatsächlich eine Stammfunktion für $f(x)$. Da $f(x)$ monoton fallend (mit wachsendem x) ist, liefert uns das Integral-Kriterium die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{k}} \leq F(x)\Big|_1^n + f(1) = O(n^{1-1/m})$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{k}} \geq F(x)\Big|_1^n + f(n) = \Omega(n^{1-1/m})\,,$$

da m eine Konstante ist.

Kapitel 11

11.1 Antworten: (a) 0,8 (b) 0,3 (c) 0,4 (d) 0,5 (e) 0,2 (f) 0,2 (g) 0,1 (h) 0,3

11.2 Es gibt genau $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot3} = 10$ Möglichkeiten, die drei Fragen auszuwählen. Aus diesen sind aber nur $\binom{4}{3} = \frac{4\cdot3\cdot2}{2\cdot3} = 4$ Möglichkeiten für den Student günstig. Somit wird der Student die Prüfung nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ bestehen.

11.3

$$\begin{aligned}
\Pr(A\cap\overline{B}) &= \Pr(A\setminus B) = \Pr(A) - \Pr(A\cap B) && \text{Satz 11.3(f)}\\
&= \Pr(A) - \Pr(A)\cdot\Pr(B) && \text{Unabhängigkeit}\\
&= \Pr(A)\,(1-\Pr(B)) = \Pr(A)\cdot\Pr(\overline{B}) && \text{Satz 11.3(d)}\,.
\end{aligned}$$

11.4 Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden *beide* gezogene Zahlen positiv sein? Am Anfang hat unser Wahrscheinlichkeitsraum die Form $(+,+,+,-,-,-)$. Die erste Zahl wird also positiv mit Wahrscheinlichkeit $3/6 = 1/2$. Ist die erste Zahl bereits gezogen und ist sie positiv, dann verkleinert sich der Wahrscheinlichkeitsraum auf $(+,+,-,-,-)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweite gezogene Zahl positiv wird, ist daher gleich $2/5$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Produkt ist positiv}) &= \Pr(\text{beide Zahlen positiv}) + \Pr(\text{beide Zahlen negativ})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{5}\,.\end{aligned}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die erste gezogene Zahl positiv und die zweite negativ? Wie bisher wird die erste Zahl positiv mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Danach hat der Wahrscheinlichkeitsraum die Form $(+,+,-,-,-)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Zahl negativ wird, ist daher gleich $3/5$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Produkt ist negativ}) &= \Pr(\text{erste Zahl positiv, zweite negativ})\\ &\quad + \Pr(\text{erste Zahl negativ, erste positiv})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\,.\end{aligned}$$

Es ist also günstiger, auf ein *negatives* Produkt zu setzen.

11.5 Wir betrachten zwei Ereignisse:

$$\begin{aligned}A &= \text{»es wurde unfaire Münze gewählt«}\,;\\ B &= \text{»beide Würfe der Münze ergeben Kopf«}\,.\end{aligned}$$

Es ist also $\Pr(A|\,B)$ zu bestimmen. Wir haben

$$\begin{aligned}\Pr(A) = \Pr\left(\overline{A}\right) &= \frac{1}{2}\,;\\ \Pr(B|\,A) &= 1\,;\\ \Pr(B|\,\overline{A}) &= \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Aus der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(A)\Pr(B|\,A) + \Pr\left(\overline{A}\right)\Pr(B|\,\overline{A})\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8}\,.\end{aligned}$$

Nun können wir die Formel von Bayes anwenden und erhalten schließlich

$$\Pr(A|\,B) = \frac{\Pr(A)}{\Pr(B)}\Pr(B|\,A) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}\,.$$

11.6 Die Überlegung von Paul ist falsch, den $\Pr(A\cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ nur für disjunkte Ereignisse gilt. Wir sollten so überlegen. Der Wahrscheinlichkeitsraum Ω besteht aus $|\Omega| = 6^3 = 216$ Vektoren (a_1,a_2,a_3) mit $a_i \in \{1,\cdots,6\}$. Ungünstige für Paul ist die Teilmenge $U \subseteq \Omega$ der Elementarereignisse (a_1,a_2,a_3) mit $a_i \in \{1,\cdots,5\}$ für alle $i = 1{,}2{,}3$. Da wir genau $|U| = 5^3 = 125$ solche Vektoren haben, wird Paul mit Wahrscheinlichkeit $|U|/|\Omega| = 5^3/6^3 = 125/216 > 1/2$ verlieren.

11.7 Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Augensumme 11 zu erhalten? Wenn wir die Ordnung der Augenzahlen *ignorieren*, dann gibt es genau 6 Möglichkeiten:

$$6+4+1=6+3+2=5+4+2=5+5+1=5+3+3=4+4+3=11\,.$$

In diesem Fall gibt es auch genau 6 Möglichkeiten die Augensumme 12 zu erhalten:

$$6+5+1=6+4+2=5+4+3=6+3+3=5+5+2=4+4+4=12\,.$$

Sind nun die Wahrscheinlichkeiten wirklich gleich? Nein! Wir haben ja die Ordnung ignoriert. Der Wahrscheinlichkeitsraum besteht aber aus *geordneten* 3-Tupeln von Zahlen. Wir müssen also auch die Ordnung dieser Zahlen berücksichtigen. Dazu lohnt es sich die folgenden Ereignisse zu betrachten:

$$S_i = \text{»genau } i \text{ Augenzahlen sind gleich«}, \qquad i = 1{,}2{,}3\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
A \cap S_1 &= \text{jeweils 6 Permutationen von } \ (6{,}4{,}1), (6{,}3{,}2), (5{,}4{,}2) \\
&\quad\Rightarrow \quad |A \cap S_1| = 6 \cdot 3 = 18\,; \\
A \cap S_2 &= \text{jeweils 3 Permutationen von } \ (5{,}5{,}1), (5{,}3{,}3), (4{,}4{,}3) \\
&\quad\Rightarrow \quad |A \cap S_2| = 3 \cdot 3 = 9\,; \\
A \cap S_3 &= \emptyset \quad \Rightarrow \quad |A \cap S_3| = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B \cap S_1 &= \text{jeweils 6 Permutationen von } \ (6{,}5{,}1), (6{,}4{,}2), (5{,}4{,}3) && \Rightarrow \quad |A \cap S_1| = 6 \cdot 3 = 18 \\
B \cap S_2 &= \text{jeweils 3 Permutationen von } \ (6{,}3{,}3), (5{,}5{,}2) && \Rightarrow \quad |A \cap S_2| = 3 \cdot 2 = 6 \\
B \cap S_2 &= \text{nur eine einzige Permutation von} (4{,}4{,}4) && \Rightarrow \quad |B \cap S_3| = 1\,.
\end{aligned}$$

Da wir insgesamt $6^3 = 216$ 3-Tupeln (x_1, x_2, x_3) mit $x_i \in \{1, \ldots, 6\}$ haben, gilt:

$$\Pr(A) = \frac{1}{216}(18+9+0) = \frac{27}{216}$$

und

$$\Pr(B) = \frac{1}{216}(18+6+1) = \frac{25}{216}\,.$$

11.8 Wegen der Unabhängigkeit der Ereignisse A udn B gilt $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$. Somit gilt auch

$$\frac{1}{2} = \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 2\Pr(A) - (\Pr(A))^2\,.$$

Setzt man nun $x := \Pr(A)$, so erhält man eine quadratische Gleichung $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Löst man diese Gleichung, so erhält man

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = 1 \pm \sqrt{\frac{8}{16}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Da die Lösung $x = \Pr(A)$ nicht größer als 1 sein kein, gilt $\Pr(A) = 1 - 1/\sqrt{2}$.

11.9 Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i) \cdot \Pr(A|\, B_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i) \cdot \max_i \Pr(A|\, B_i)\\ &= \max_i \Pr(A|\, B_i) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i) \Big) = \max_i \Pr(A|\, B_i).\end{aligned}$$

11.10 Wir betrachten die Ereignisse

$A =$ »gezogen ist die WW-Münze« ;
$B =$ »es kommt Wappen« .

Dann ist

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B|\, A) = \frac{1}{3},$$

da $\Pr(B|\, A) = 1$ gilt. Außerdem ist $\Pr(B) = 1/2$, da nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(\text{WW-Münze gezogen}) \cdot \Pr(B|\, \text{WW-Münze gezogen})\\ &\quad + \Pr(\text{WK-Münze gezogen}) \cdot \Pr(B|\, \text{WK-Münze gezogen})\\ &\quad + \Pr(\text{KK-Münze gezogen}) \cdot \Pr(B|\, \text{KK-Münze gezogen})\\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Witerhin erhalten wir

$$\Pr(A|\, B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{(1/3)}{(1/2)} = \frac{2}{3}.$$

Wegen

$$\Pr(\text{KK-Münze gezogen}|\, B) = 0$$

ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\Pr(\text{WK-Münze gezogen}|\, B) = 1 - \Pr(A|\, B) - 0 = \frac{1}{3}.$$

11.11 Wir betrachten die Ereignisse

$R =$ »die gezogene Kugel ist rot« ;
$U_i =$ »die i-te Urne ist gewäht« .

Wir müssen die Wahrscheinlichkeit $\Pr(U_1|\, R)$ bestimmen. Nach dem Satz von Bayes gilt

$$\Pr(U_1|\, R) = \frac{\Pr(U_1)}{\Pr(R)} \cdot \Pr(R|\, U_1).$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\Pr(U_1)$ und $\Pr(R|\,U_1)$ sind leicht zu bestimmen: Es gilt $\Pr(U_1) = 1/5$ und $\Pr(R|\,U_1) = 4/6 = 2/3$ (die erste Urne hat 6 Kugeln und nur 4 davon sind rot). Um die Wahrscheinlichkeit $\Pr(R)$ zu bestimmen, wenden wir den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an:

$$\begin{aligned}\Pr(R) &= \sum_{i=1}^{5} \Pr(U_i) \cdot \Pr(R|\,U_i)\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\right) = 0{,}4855\,.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\Pr(U_1|\,R) = \frac{\Pr(U_1)}{\Pr(R)} \cdot \Pr(R|\,U_1) = \frac{0{,}20}{0{,}4855} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}61791\,.$$

11.12 Für $i = 1{,}2$ sei $R_i =$ »aus der i-ten Urne ist eine rote Kugel gezogen« und B_i analog. Wir wissen dass die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr((R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap B_2))$$

genau 0,44 beträgt. Unser Ziel deshalb ist, diese Wahrscheinlichkeit in Bezug auf uns unbekannte Zahl b darzustellen. Dazu beachten wir, dass

(i) die Ereignisse $R_1 \cap R_2$ und $B_1 \cap B_2$ *disjunkt* sind, und
(ii) dass die Ereignisse R_1, R_2 wie auch B_1, B_2 unabhängig sind (wir ziehen ja eine Kugel von beiden Urnen unabhängig voneinander).

Somit gilt

$$\begin{aligned}0{,}44 &= \Pr((R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap B_2))\\ &= \Pr(R_1 \cap R_2) + \Pr(B_1 \cap B_2) && \text{Disjunktheit}\\ &= \Pr(R_1)\cdot\Pr(R_2) + \Pr(B_1)\cdot\Pr(B_2) && \text{Unabhängigkeit}\\ &= \frac{4}{10}\cdot\frac{16}{b+16} + \frac{6}{10}\cdot\frac{b}{b+16}\,,\end{aligned}$$

woraus

$$0{,}44 \cdot 10 \cdot (b+16) = 4 \cdot 16 + 6b$$

und schließlich $b = 4$ folgt.

11.13 Ist das Sortiment S »gut«, so enthält es höchstens 2 defekte Teile, und es gibt immer noch mindestens $\binom{18}{4}$ Möglichkeiten diese defekte Teile (falls sie überhaupt vorhanden sind) zu vermeiden. Also wird der Verkäufer in diesem Fall mit Wahrscheinlichkeit

$$p_v \geq \binom{18}{4} \Big/ \binom{20}{4} = \frac{12}{19} = 0{,}631$$

das Sortiment verkaufen.

Ist das Sortiment »schlecht«, so enthält es mindesten 4 defekte Teile, und es gibt höchsten $\binom{16}{4}$ Möglichkeiten alle diese Teile zu vermeiden. Also wird der Käufer in diesem Fall nur mit Wahrscheinlichkeit

$$p_k \leq \binom{18}{4} \Big/ \binom{20}{4} = \frac{364}{969} = 0{,}375$$

das Sortiment kaufen.

Das Risiko für den Verkäufer, ein gutes Sortiment *nicht* zu verkaufen, ist $1 - p_v = 0{,}369$, und das Risiko für den Käufer, ein schlechtes Sortiment *zu kaufen*, ist $p_k = 0{,}375$.

Damit trägt der *Käufer* etwas (um $0{,}375 - 0{,}369 = 0{,}006$) größere Risiko als der Verkäufer.

Kapitel 12

12.1 Sei $q = 1-p = 0{,}9$. Das Spiel ist eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Sei A_N das Ereignis, in ersten N Spielrunden zu gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr\left(\overline{A}_N\right)$ *alle* N Spielrunden zu verlieren ist gleich $q^N = 0{,}9^N$. Wegen der Äquivalenz

$$\Pr(A_N) \geq 0{,}75 \quad \Longleftrightarrow \quad \Pr\left(\overline{A}_N\right) < 0{,}25$$

reicht es die *kleinste* ganze Zahl N mit $q^N < 0{,}25$ zu bestimmen. Es gilt also

$$q^N < 0{,}25 \quad \Longleftrightarrow \quad N < \frac{\ln 0{,}25}{\ln q} = \frac{-1{,}386}{-0{,}105} = 13{,}20\,.$$

Die kleinste Zahl N mit $\Pr\left(\overline{A}_N\right) < 0{,}25$ ist somit $N = 13$. Man kann also bereits in den ersten 13 Spielrunden mit Wahrscheinlichkeit mindestens 0,75 gewinnen.

12.2 Wir können die Würfel als nummeriert betrachten. Dann besteht unser Wahrscheinlichkeitsraum aus allen $6^3 = 216$ 3-Tupel (x, y, z) mit $x, y, z \in \{1, \ldots, 6\}$. Sei X die Anzahl der Würfel, die die gewettete Zahl zeigen. Wir wollen den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ bestimmen.

Sei $a \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ die gewettete Zahl.

Das Ereignis $X = 1$ besteht dann aus allen $3 \cdot 5^2$ Tupeln

$$(a, y, z), (x, a, z), (x, y, a) \quad \text{mit } x, y, z \in \{1, \ldots, 6\} \setminus \{a\}.$$

Das Ereignis $X = 2$ besteht aus allen $3 \cdot 5$ Tupeln

$$(a, a, z), (a, y, a), (x, a, a) \quad \text{mit } x, y, z \in \{1, \ldots, 6\} \setminus \{a\}.$$

Das Ereignis $X = 3$ besteht nur aus einem Tupel

$$(a, a, a)\,.$$

Schließlich besteht das Ereignis $X = 0$ (die gewettete Zahl erscheint überhaupt nicht) aus allen 5^3 Tupeln (x, y, z) mit $x, y, z \in \{1, \ldots, 6\} \setminus \{a\}$.

Somit gilt (nach der Definition des Erwartungswertes):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1 \cdot \Pr(X = 1) + 2 \cdot \Pr(X = 2) + 3 \cdot \Pr(X = 3) - 1 \cdot \Pr(X = 0) \\
&= 1 \cdot \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 5}{6^3} + 3 \cdot \frac{1}{6^3} - 1 \cdot \frac{5^3}{6^3} = \frac{108 - 125}{216} = -\frac{83}{216} \approx -0{,}384
\end{aligned}$$

Der erwartete Gewinn ist also negativ und das Spiel ist somit für den Spieler *nicht* fair.

12.3 **(a)** Nach der Definition des Erwartungswertes gilt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot \Pr\left(X^2 = i^2\right) = \mathrm{E}(X^2).$$

(b) Nach der Definition des Erwartungswertes gilt wiederum

$$\Pr(X \neq 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X = i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) = \mathrm{E}(X).$$

12.4 Wir wissen, dass $\Pr(X = x, Y = y) = \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y)$ für alle x aus dem Wertebereich von X und alle y aus dem Wertebereich von Y gilt. Seinen nun $s, t \in \mathbb{R}$ beliebige zwei Zahlen. Für verschiedene $x, x' \in f^{-1}(s)$ sind die Ereignisse »$X = x$« und »$X = x'$« disjunkt. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\Pr(f(X) = s, f(Y) = t) &= \Pr\left(X \in f^{-1}(s), Y \in f^{-1}(t)\right) \\
&= \sum_{x \in f^{-1}(s)} \sum_{y \in f^{-1}(t)} \Pr(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x \in f^{-1}(s)} \sum_{y \in f^{-1}(t)} \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y) \\
&= \sum_{x \in f^{-1}(s)} \Pr(X = x) \cdot \sum_{y \in f^{-1}(t)} \Pr(Y = y) \quad \text{totale W'keit} \\
&= \sum_{x \in f^{-1}(s)} \Pr(X = x) \cdot \Pr(f(Y) = t) \\
&= \Pr(f(Y) = t) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(s)} \Pr(X = x) \quad \text{totale W'keit} \\
&= \Pr(f(Y) = t) \cdot \Pr(f(X) = s)\ .
\end{aligned}$$

12.5 Elementarereignisse sind binäre Vektoren $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{0,1\}^n$ mit $\omega_i = 1$ genau dann, wenn der Preis am i-ten Tag um den Faktor r gestiegen ist. Jedes solche Elementarereignis ω mit k Einsen bedeutet, dass der Preis k mal gestiegen und $n - k$ mal gefallen ist. Daher ist der Wert auf einem solchen Ereignis gleich

$$X(\omega) = r^k \left(\frac{1}{r}\right)^{n-k} = r^{2k-n}\ .$$

Aus

$$\Pr(\omega \text{ enthält genau } k \text{ Einsen}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

mit $q = 1 - p$ erhalten wir

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{2k-n} p^k q^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= r^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pr^2)^k q^{n-k} \\
&= r^{-n} (pr^2 + q)^n \\
&= \Big(\frac{pr^2 + 1 - p}{r}\Big)^n \\
&= \Big(pr + \frac{1-p}{r}\Big)^n .
\end{aligned}
$$

12.6 Sei $Y = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit $Y_i = 1 - 2X_i$. Da X_i Bernoulli-Variablen sind, nehmen die Zufallsvariablen $Y_i = 1 - 2X_i$ ihre Werte in $\{-1, +1\}$. Wegen $X_i = 1 \iff Y_i = -1$ gilt daher

$$
\sum_{i=1}^{n} X_i \bmod 2 = 1 \quad \iff \quad \prod_{i=1}^{n} Y_i = -1 .
$$

Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $\Pr(X = 1) = \Pr(Y = -1)$. Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, sind auch die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig, woraus $\mathrm{E}(Y) = \prod_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i)$ folgt. Außerdem gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_i) &= \Pr(Y_i = 1) - \Pr(Y_i = -1) = (1 - \Pr(Y_i = -1)) - \Pr(Y_i = -1) \\
&= 1 - 2 \cdot \Pr(Y_i = -1) \\
&= 1 - 2p_i .
\end{aligned}
$$

Hiermit erhalten wir

$$
1 - 2 \cdot \Pr(Y = -1)\, \mathrm{E}(Y) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i) = \prod_{i=1}^{n} (1 - 2p_i) ,
$$

woraus

$$
\Pr(X = 1) = \Pr(Y = -1) = \frac{1}{2}\Big[1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 2p_i)\Big]
$$

folgt.

12.7 Sei $X = X_1 + \cdots + X_n$, wobei X_i die Indikatorvariable für das Ereignis A_i ist. Wegen $\mathrm{E}(X_i) = \Pr(A_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt dann nach der Linearität des Erwartungswertes

$$
\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) = a .
$$

Nach der Tschebyschev-Ungleichung gilt dann auch

$$
\begin{aligned}
\Pr(X = 0) \le \Pr(|X - a| \le a) &\le \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} = \frac{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2}{a^2} \\
&= \frac{\mathrm{E}(X^2) - a^2}{a^2} = \frac{\mathrm{E}(X^2)}{a^2} - 1 .
\end{aligned}
$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathrm{E}(X^2) = a + 2b$ gilt. Nach der Linearität des Erwartungswertes gilt wiederum

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i^2) + \sum_{1\le i\ne j\le n} \mathrm{E}(X_i X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) + \sum_{1\le i\ne j\le n} \Pr(A_i \cap A_j) \\
&= a + 2b\,.
\end{aligned}$$

12.8 Sei $B \subseteq \Omega$ die Menge aller Elementarereignissen $\omega \in \Omega$ mit $X(\omega) < M - b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
M - a = \mathrm{E}(X) &= \sum_{\omega: X(\omega) < M-b} X(\omega)\Pr(\omega) + \sum_{\omega: X(\omega)\ge M-b} X(\omega)\Pr(\omega) \\
&\le \Pr(B)\cdot(M-b) + \Pr\left(\overline{B}\right)\cdot M\,,
\end{aligned}$$

woraus nach der Umformung $\Pr(B) \le a/b$ und somit auch

$$\Pr(X \ge M - b) = 1 - \Pr(B) \ge \frac{b-a}{b}$$

folgt.

12.9 **(1)** Sei X = Anzahl der Kugel in der *ersten* Urne. Dann ist $X = X_1 + \cdots + X_m$ wobei X_i die Indikatorvariable für das Ereignis »i-te Kugel fliegt in die erste Urne« ist. Die Linearität des Erwartungswertes ergibt:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}\,.$$

(2) Die Anzahl der Urnen mit genau einer Kugel ist $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, wobei Y_j die Indikatorvariable für das Ereignis »j-te Urne enthält genau eine Kugel« ist. Das Ereignis $Y_j = 1$ tritt genau dann ein, wenn eine der m Kugeln in die j-te Urne fliegt und die verbleibenden $m-1$ Kugeln diese Urne vermeiden. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_j) &= \Pr(Y_j = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Pr(\text{nur Kugel } i \text{ fliegt in Urne } j\ ) \\
&= m\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-1}
\end{aligned}$$

und somit auch

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(Y_j) = m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-1} \sim m e^{-(m-1)/n}\,.$$

(3) Angenommen k Urnen sind bereits besetzt (enthalten mindestens eine Kugel). Wie lange müssen wir dann noch werfen bis eine Kugel in eine leere Urne fliegt? Sei T_k die entsprechende Zufallsvariable: T_k = Anzahl der Versuche bis eine Kugel in eine leere Urne fliegt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(\text{Anzahl der Versuche} > i) && \text{Satz 12.9}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(\text{alle ersten } i \text{ Kugeln fliegen in besetzten Urnen})\\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^i\\
&= \frac{1}{1-k/n} = \frac{n}{n-k} && \text{geometrische Reihe}\,.
\end{aligned}$$

Man kann auch anders überlegen. Die Wahrscheinlichkeit eine leere Urne zu treffen ist $p = (n-k)/n$. Das ist also ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und wir wollen die erwartete Anzahl $\mathrm{E}(T_k)$ der Versuche bis zum erstem Erfolg bestimmen. Da T_k eine geometrisch verteilte Zufallsvariable ist, ist ihr Erwartungswert gleich $1/p = n/(n-k)$.

12.10 Sei Z die Anzahl der *leeren* Urnen. Dann ist $Z = Z_1 + \cdots + Z_n$, wobei Z_i die Indikatorvariable für das Ereignis »i-te Urne bleibt leer« ist. Nun haben wir

$$\mathrm{E}(Z_i) = \Pr(Z_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m,$$

da jede Kugel die i-te Urne mit Wahrscheinlichkeit $1 - 1/n$ vermeidet und $Z_i = 1$ genau dann gilt, wenn *alle* m Kugeln dies tun. Damit ist

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Z_i) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \sim n \cdot \mathrm{e}^{-m/n}\,.$$

Wenn wir also $m > n \ln n$ Kugeln in n Urnen werfen, dann kann man *keine* leere Urne mehr erwarten: In diesem Fall ist

$$\mathrm{E}(Z) \sim n \cdot \mathrm{e}^{-m/n} < n \cdot \mathrm{e}^{-\ln n} = 1\,.$$

12.11 Sei K ein Parameter, den wir später bestimmen wollen. Wir sagen, dass eine Urne *überfüllt* ist, falls sie mehr als K Kugeln enthält. Wir betrachten die Zufallsvariable $X = X_1 + \cdots + X_n$, wobei X_i die Indikatorvariable für das Ereignis »i-te Urne hat mehr als K Bäller« ist, also

$$\Pr(X_i = 1) = \Pr(i\text{-te Urne hat mehr als } K \text{ Bäller})\,.$$

Dann ist X genau die Anzahl der überfüllten Urnen. Wir vollen also ein K bestimmen, für das $\mathrm{E}(X) < 1$ gilt. Insbesondere wollen wir zeigen, dass dies bereits für $K > \ln n$ gilt.

Dazu betrachten wir die Ereignisse

$$A_{i,j} = \text{»}i\text{-te Urne enthält } \textit{genau } j \text{ Kugeln«}\,.$$

Dann ist $\Pr(A_{i,j})$ gleich

der Anzahl $\binom{n}{j}$ der Möglichkeiten, die j Bäller auszuwählen

mal die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{n}\right)^j$, dass alle diese Bälle in Urne i fliegen
mal die Wahrscheinlichkeit $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-j}$, dass keiner der verbleibenden $n-j$ Bäller in diese Urne fliegen:

$$\begin{aligned}
\Pr(A_{i,j}) &= \binom{n}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-j} \\
&\le \binom{n}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j && \text{wegen } 1-1/n<1 \\
&\le \left(\frac{n\mathrm{e}}{j}\right)^j\left(\frac{1}{n}\right)^j = \left(\frac{\mathrm{e}}{j}\right)^j && \text{Lemma 3.14}
\end{aligned}$$

und damit auch

$$\mathrm{E}(X_i) = \sum_{j=K+1}^{n} \Pr(A_{i,j}) \le \sum_{j=K+1}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}}{j}\right)^j \le \left(\frac{\mathrm{e}}{K}\right)^K\left[1+\frac{\mathrm{e}}{K}+(\frac{e}{K})^2+\cdots+\right].$$

Für $K\to\infty$ können wir die Summe in Klammern ignorieren (sie strebt gegen 1) und wir haben eine (asymptotische) Ungleichung

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) \le n\cdot\left(\frac{\mathrm{e}}{K}\right)^K.$$

Es reicht also K so auszuwählen, dass $(\mathrm{e}/K)^K < 1/n$ oder äquivalent (nach der Logarithmieren) die Ungleichung

$$K(1-\ln K) < -\ln n$$

gilt. Dazu reicht es $K := (\ln n)/(\ln\ln n)$ zu wählen; dann gilt

$$K(1-\ln K) = \frac{\ln n}{\ln\ln n}\,(1-\ln\ln n+\ln\ln\ln n) \sim -\ln n\,.$$

Wenn wir also n Kugeln in n Urnen werfen, dann können wir erwarten, dass keine Urne mehr als $K\approx\ln n$ Kugeln enthalten wird.

12.12 Linearität des Erwartungswertes ergibt

$$\mathrm{E}((X+Y)^2) = \mathrm{E}(X^2+2XY+Y^2) = \mathrm{E}(X^2)+2\,\mathrm{E}(XY)+\mathrm{E}(Y^2)\,.$$

Wir müssen den Term $\mathrm{E}(XY)$ berechnen. Dazu benutzen wir die Unabhängigkeit von X und Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \Pr(X=a_i, Y=b_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \Pr(X=a_i)\cdot\Pr(Y=b_j) && \text{Unabhängigkeit} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \Pr(X=a_i)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \Pr(Y=b_j)\Big)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X+Y) &= \mathrm{E}((X+Y)^2) - \mathrm{E}(X+Y)^2 \\
&= (\mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2)) \\
&- (\mathrm{E}(X)^2 + 2\,\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Y)^2) \\
&= (\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2) + (\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2) \\
&+ 2(\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)) \\
&= \mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Var}\,(Y) && \mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\,.
\end{aligned}$$

12.13 Sei $X \in \{1{,}2\}$ mit $\Pr(X=1) = 1/2$ und $\Pr(X=2) = 1/2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3} = \frac{1}{\mathrm{E}(X)}\,.
\end{aligned}$$

12.14 **(a)** Hier haben wir mit einem Bernoulli-Experiment $B(n,p)$ zu tun, wobei die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/n$ ist. Die erwartete Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg ist daher $\mathrm{E}(X) = 1/p = n$ (geometrische Verteilung).

(b) Sei Y_i die Indikatorvariable für das Ereignis »in i-tem Versuch hat der Mann den richtigen Schlüssel gefunden«. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Pr(X=k) &= \Pr(Y_1 = 0,\dots,Y_{k-1} = 0, Y_k = 1) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \Pr(Y_i = 1 \,|\, Y_1 = 0,\dots,Y_{i-1} = 0) && \text{Multiplikationssatz} \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist in diesem Fall

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\Pr(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}\,.$$

12.15 Nach der Linearität des Erwartungswertes gilt $\mathrm{E}(|A\cap B|) = p^2 n$. Somit beginnen sich die Mengen bereits ab $p = 1/\sqrt{n}$ zu schneiden.

12.16 **(a)** Die Anzahl der von einem bestimmten Kind gefangenen Bonbons ist binomiel $B(n,p)$ mit $p = 1/r$ verteilt. Somit ist die erwartete Anzahl der von diesem Kind gefangenen Bonbons gleich $pn = n/r$.

(b) Wieviele Bonbons müssen geworfen werden, bis dieses Kind ein Bonbon überhaupt gefangen hat? Diese Anzahl der Bonbons ist bereits geometrisch mit der gleichen Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/r$ verteilt. Daher ist ihr Erwartungswert gleich $1/p = r$.

(c) Wir definieren die Zufallsvariablen X_i wie folgt: Wenn bereits $i-1$ Kinder ein Bonbon gefangen haben, gibt X_i die Anzahl der Würfe an, die gemacht werden müssen, bis das i-te

Kind ein Bonbon fängt. Die Misserfolgswahrscheinlichkeit dieses Versuchs ist $\frac{i-1}{r}$. Alle X_i sind voneinander unabhängig und unterliegen der geometrischen Verteilung. Also ist

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{1-\frac{i-1}{r}} = \frac{r}{r-i+1}\,.$$

Der Erwartungswert der Anzahl der zu werfenden Bonbons ergibt sich aus der Summe der Erwartungswerte der X_i

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{E}(X_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{r}{r-i+1} \quad = \quad r \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \leq r \cdot (\ln r + 1)\,.$$

12.17 Sei X_i die von dem Kind im i-ten Schritt zurückgelegte Strecke. Dann gilt $\Pr(X_i = 1) = 2/3$ und $\Pr(X_i = -1) = 1/3$. Die nach 500 Schritten insgesamt zurückgelegte Strecke also ist

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{500}\,.$$

Nach der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\mathrm{E}(X) = 500 \cdot \mathrm{E}(X_i) = 500(2/3 - 1/3) = 500/3\,.$$

Nach der Definition der Varianz haben wir auch

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - (\mathrm{E}(X_i))^2 = (2/3 + 1/3) - (1/3)^2 = 8/9\,.$$

Da die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind, erhalten wir $\mathrm{Var}(X) = 500 \cdot \mathrm{Var}(X_i) = 4000/9$. Mit der Tschebyschev-Ungleichung können wir die Wahrscheinlichkeit, an Ziel anzukommen, wie folgt abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 100) &\geq \Pr(|X - 500/3| \leq 200/3) \\ &\geq \Pr(|X - \mathrm{E}(X)| < 200/3) \\ &\geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{(200/3)^2} = 1 - 1/10 = 0{,}9 \qquad\qquad \text{Tschebyschev}\,. \end{aligned}$$

Zur Begründung der ersten Ungleichung: Hier benutzen wir die Eigenschaft, dass $\Pr(A) \geq \Pr(B)$ aus $A \supseteq B$ folgt. In unserem Fall ist A das Ereignis »$X \geq 100$« und B das Ereignis »$|X - 500/3| \leq 200/3$«. Da aus B insbesondere $X \geq 500/3 - 200/3 = 300/3 = 100$ folgt, muss auch $B \subseteq A$ gelten.

12.18 Der Münzwurf wird durch eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ beschrieben mit $\Pr(X_i = 1) = \Pr(X_i = 0) = p = 0{,}5$. Die relative Häufigkeit von Eins ist durch die Zufallsvariable

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

gegeben. Gesuch ist n minimal, so dass

$$\Pr(|Y_n - 0{,}5| \geq 0{,}1) \leq 1/4$$

gilt. Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathrm{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = p = 0{,}5\,.$$

Da die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind, gilt auch

$$\mathrm{Var}\,(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p) = \frac{1}{4n}\,.$$

Tschebyschev-Ungleichung liefert uns die Ungleichung

$$\Pr\left(|Y_n - 0{,}5| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\,(Y_n)}{0{,}1^2} = \frac{100}{4n} = \frac{25}{n}\,.$$

Da $\frac{25}{n} \leq 1/4$ für $n \geq 100$ gilt, reicht es also die Münze $n = 100$ zu werfen.