Die Wahrscheinlichkeit, dass der k-te Tag der beste ist, beträgt $1/n$, da wir n Tage haben und jeder davon der beste sein könnte. Nach Satz 11.3(c) gilt dann:

$$\Pr(A_k) = \Pr(T_k \text{ ist der beste Tag}) \cdot \Pr(\text{der Tag } T_k \text{ wird gewählt}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{j}{k-1},$$

weil T_k genau dann ausgewählt wird, wenn sich der beste der ersten $k-1$ Tage unter den ersten j Tagen befindet.

Die j-te Stoppstrategie ist genau dann erfolgreich, wenn dass Ereignis $A_{j+1} \cup A_{j+2} \cup \cdots \cup A_n$ eintritt. Da nur ein Tag ausgewählt wird, sind die Ereignisse A_s und A_r für $s \neq r$ disjunkt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} P(j) &= \Pr(j\text{-te Stoppstrategie ist erfolgreich}) \\ &= \Pr(A_{j+1}) + \Pr(A_{j+2}) + \cdots + \Pr(A_n) \\ &= \frac{j}{n} \cdot \Big(\frac{1}{j} + \cdots + \frac{1}{n-1}\Big). \end{aligned}$$

Um das optimale j zu finden, müssen wir die Funktion $P(j)$ maximieren. Da die harmonische Reihe $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ asymptotisch gleich $\ln n$ ist (siehe Satz 8.5), erhalten wir:

$$P(j) = \frac{j}{n}\,(H_{n-1} - H_{j-1}) \sim \frac{j}{n} \ln \frac{n}{j}\,.$$

Nach Lemma 10.17 erhält die Funktion $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$ ihr Maximum für $x = 1/\mathrm{e}$: Die erste Ableitung $f'(x) = \ln(1/x) - 1$ ist in diesem Punkt gleich Null und die zweite Ableitung $f''(x) = -1/x$ ist negativ. □

11.2 Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind (stochastisch) *unabhängig*, falls gilt:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)\ .$$

Das ist die *Definition* der Unabhängigkeit. Aussagen wie »zwei Ereignisse sind unabhängig, falls diese Ereignisse einander nicht beeinflussen« sind *keine* Definitionen!

Erst richtig falsch ist zu behaupten, dass je zwei disjunkte Ereignisse unabhängig sind. Unabhängigkeit von Ereignissen hat mit ihrer Disjunktheit nichts zu tun! Sind zum Beispiel $\Pr(A) > 0$, $\Pr(B) > 0$ und $A \cap B = \emptyset$, dann sind A und B abhängig, da dann $\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0$ und $\Pr(A) \cdot \Pr(B) > 0$ gilt.

Ist Pr eine Gleichverteilung in einem Wahrscheinlichkeitsraum der Größe n, so sind die Ereignisse A und B unabhängig genau dann, wenn $|A \cap B| = |A| \cdot |B|/n$ gilt (siehe Bild 11.2). Die (stochastische) Unabhängigkeit ist also selbst ein sehr seltenes Ereignis!

Beispiel 11.11:

Wir werfen zweimal eine faire 0-1 Münze und betrachten die Ereignisse:

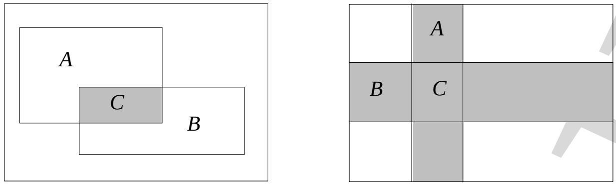

Bild 11.2: Der Wahrscheinlichkeitsraum sei das ganze Rechteck mit der Fläche n und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sei proportional zu seiner Fläche $|A|$. Dann sind A und B unabhängig genau dann, wenn $|C|/n = \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = (|A|/n)(|B|/n)$ gilt, d. h. wenn $|C| = |A| \cdot |B|/n$ gilt. »Quer stehende« Ereignisse sind aber immer unabhängig (Bild rechts).

A = »erster Wurf ergibt eine Eins«;
B = »beide Ausgänge sind gleich«;
C = »beide Ausgänge sind Einsen«.

Obwohl die Ereignisse A und B sich gegenwärtig zu »beeinflussen« scheinen, sind sie in Wirklichkeit unabhängig:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(11) = \frac{1}{4},$$
$$\Pr(A) \cdot \Pr(B) = \Pr(11{,}10) \cdot \Pr(11{,}00) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Die Ereignisse A und C sind aber abhängig, denn es gilt

$$\Pr(A \cap C) = \Pr(11) = \frac{1}{4},$$
$$\Pr(A) \cdot \Pr(C) = \Pr(11{,}10) \cdot \Pr(11) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\,.$$

Den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit kann man auch auf mehrere Ereignisse erweitern: Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen *unabhängig*, falls für alle $1 \leq k \leq n$ und alle $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ gilt

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \Pr(A_{i_1}) \cdot \Pr(A_{i_2}) \cdots \Pr(A_{i_n})\ .$$

Beispiel 11.12:

Wir werfen dreimal eine faire 0-1 Münze und betrachten die Ereignisse:
A = »die ersten zwei Ausgänge sind gleich«;
B = »der erste und der dritte Ausgänge sind gleich«;
C = »die letzten zwei Ausgänge sind gleich«.

Dann gilt $\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = 1/2$, und alle Ereignisse $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ und $A \cap B \cap C$ sind gleich dem Ereignis $\{111, 000\}$, das mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ eintritt. Damit sind alle drei Paare unabhängig aber

$$\Pr(A \cap B \cap C) = 1/4 \quad \text{und} \quad \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C) = 1/8$$

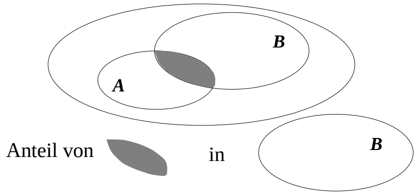

Bild 11.3: Bedingte Wahrscheinlichkeit bei der Gleichverteilung.

gilt. Also sind die Ereignisse A, B, C *nicht* unabhängig.

11.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Alice und Bob gehen zum Abendessen. Um zu entscheiden, wer bezahlen soll, werfen sie dreimal eine faire 0-1 Münze. Falls mehr Einsen als Nullen rauskommen, bezahlt Alice, sonst bezahlt Bob. Es ist klar, dass die Chancen gleich sind. Der Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{0,1\}^3$ besteht aus 8 Elementarereignissen und die Ereignisse »bezahlt Alice« und »bezahlt Bob« sind entsprechend $A = \{011, 101, 110, 111\}$ und $B = \{000,001,010,100\}$. Sie werfen die Münze einmal und das Resultat ist »1«; bezeichne dieses Ereignis durch E, also $E = \{111,110, 101, 100\}$. Wie sollte man jetzt (nachdem das Ereignis E bereits eingetreten ist) die Chancen berechnen?

Da wir bereits wissen, dass E eingetreten ist, hat sich unser Wahrscheinlichkeitsraum von Ω auf E *verkleinert*, da die Elementarereignisse, die nicht in E liegen, nicht mehr möglich sind! In diesem neuen Experiment sehen die Ereignisse »bezahlt Alice« und »bezahlt Bob« folgendermaßen aus: $A \cap E = \{101, 110, 111\}$ und $B \cap E = \{100\}$. Die neue Wahrscheinlichkeiten, wer nun bezahlen soll, sind jetzt $3/4$ für Alice und nur $1/4$ für Bob.

Die allgemeine Situation ist folgende: Ist ein Ereignis E bereits eingetreten, wie sieht dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein anderes Ereignis A eintreten wird? Im Allgemeinen können wir nicht mehr einfach die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\omega \in A$ aufsummieren, denn (nachdem E eingetreten ist) werden sich auch die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse ändern.

Definition:

Seien A und B zwei Ereignisse mit $\Pr(B) \neq 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr(A|\, B)$ für das Ereignis A unter der Bedingung B ist definiert durch

$$\Pr(A|\, B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(A|\, B)$ bezeichnet man als *a-posteriori-Wahrscheinlichkeit* von A bezüglich B.

Für das Beispiel oben (mit Alice und Bob) gilt

$$\Pr(A|\, E) = \frac{\Pr(A \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4},$$