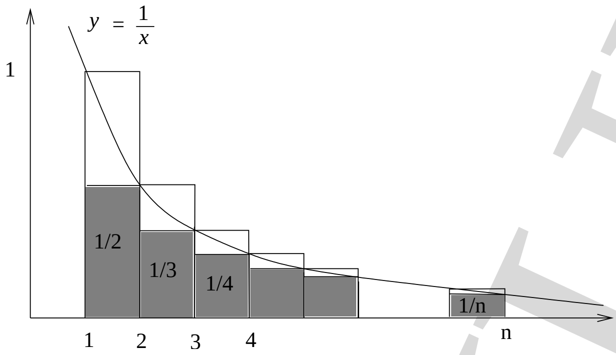

Bild 10.8: Abschätzung der harmonischen Reihe durch die Logarithmus-Funktion.

an einer konkreten Funktion $f(x) = 1/x$ demonstrieren – der allgemeine Fall ist völlig analog! Wir beweisen nämlich die in Abschnitt 8.1 (Satz 8.5) gegebenen Abschätzungen für die harmonische Reihe $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Satz 10.37:

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1\,.$$

Beweis:

Sei $f(x) = 1/x$. Aus $(\ln x)' = 1/x$ folgt, dass $F(x) = \ln x$ eine Stammfunktion für $f(x)$ ist. Das integral $\int_a^b f(x)dx$ entspricht der Fläche »unterhalb« der Funktion $f(x)$ in dem Intervall $[a, b]$.

Für $k = 2{,}3, \ldots, n$ ist die Fläche unter der Kurve $f(x) = 1/x$, zwischen $k-1$ und k, nach *unten* beschränkt durch die Fläche des (im Bild 10.8 schattierten) Rechtecks zwischen $k-1$ und k mit der Höhe $f(k) = 1/k$. Die Fläche dieses Rechtecks ist $f(k) \cdot 1 = f(k) = 1/k$. Somit erhalten wir unter Benutzung von Satz 10.36(2) und Satz 10.34(5)

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,dx = F(x)\Big|_1^n = \ln n\,.$$

Für $k = 1{,}2, \ldots, n-1$ ist die Fläche unter der Kurve $f(x) = 1/x$, zwischen k und $k+1$, nach *oben* beschränkt durch die Fläche des großen Rechtecks (inklusive des schattierten Teils) zwischen k und $k+1$ mit der Höhe $f(k) = 1/k$. Die Fläche dieses Rechtecks ist wiederum $f(k) \cdot 1 = f(k)$. Somit erhalten wir unter Benutzung von Satz 10.36(2) und Satz 10.34(5)

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,dx = F(x)\Big|_1^n = \ln n\,. \qquad \square$$