10 Differenzialrechnung

In diesem Kapitel erweitern wir zunächst den Begriff des Grenzwertes auf allgemeine Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann benutzen wir diese Erweiterung, um die Steigung der Funktionen durch die sogenannten »Ableitungen« auszudrücken. Anschließend betrachten wir drei wichtige Anwendungen der Ableitungen in der Informatik: Bestimmung der Extremalstellen von $f(x)$, Bestimmung der Grenzwerte für Quotienten $f(x)/g(x)$ (Regeln von Bernoulli–l'Hospital) und Approximation von $f(x)$ durch Polynome (Taylorentwicklung). Außerdem werden wir die Bachmann–Landau Notation »groß-O« und »klein-o« für den Wachstumsvergleich von Funktionen kennenlernen.

10.1 Grenzwerte bei Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Eine Zahl A heißt *Grenzwert* von $f(x)$ im Punkt a, geschrieben

$$\lim_{x \to a} f(x) = A\,,$$

falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - A| < \epsilon$ für alle $x \neq a$ mit $|x - a| < \delta$ gilt. Oder anders gesagt: Für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ gibt es eine Umgebung von a, in der der Funktionswert um weniger als ϵ von A abweicht. Man sagt dann auch, dass der Funktionswert gegen A strebt, wenn das Argument gegen a strebt (siehe Bild 10.1). Um $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ zu zeigen, reicht es zum Beispiel, eine Konstante $C > 0$ zu finden, so dass $|f(x) - A| < C|x - a|$ für alle $x \neq a$ gilt. Man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A\,,$$

falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N > 0$ gibt, so dass $|f(x) - A| < \epsilon$ für alle $x > N$ gilt; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ ist analog definiert.

Beachte, dass in der Definition von $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nur die Zahlen $x \neq a$ mit $|x - a| < \delta$ in Frage kommen, die Zahl a selbst ist also nicht dabei.

Daher kann der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ auch dann existieren, wenn der Funktionswert $f(a)$ im Punkt a nicht definiert ist! Ist zum Beispiel $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)/x$, so ist der Funktionswert im Punkt $a = 0$ nicht definiert (Division durch Null), aber wie wir bald zeigen werden (Lemma 10.4) gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Jede Folge (x_n) ist auch eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = x_n$ und die oben gegebene Definition von $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$ stimmt mit der Definition in Abschnitt 9.1 überein. Somit ist der Begriff der Konvergenz für Folgen ein Spezialfall des Begriffes der Konvergenz für Funktionen. Nichtsdestotrotz kann man den Grenzwert für Funktionen durch den Grenzwert von Folgen bestimmen.

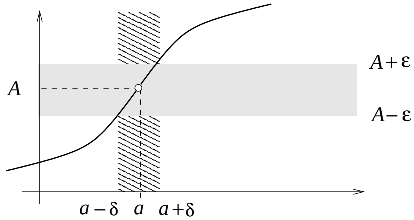

Bild 10.1: Definition von $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \neq a$ zwischen $a - \delta$ und $a + \delta$ der Funktionswert $f(x)$ zwischen $A - \epsilon$ und $A + \epsilon$ liegt.

Da in der Definition von $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nur die Werte $f(x)$ mit $x \neq a$ relevant sind (der Wert $f(a)$ kann ja auch nicht definiert sein), werden wir nur diejenigen gegen a strebenden Folgen (x_n) betrachten, die den Wert a vermeiden. Wir sagen nämlich, dass (x_n) *echt* gegen a strebt, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ für alle n gilt.

Satz 10.1: **Folgenkriterium für den Limes**

Es gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ für jede echt gegen a strebende Folge (x_n) gilt.

Beweis:

($\Rightarrow$) Sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig klein. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - A| < \epsilon$ für alle $x \neq a$ mit $|x - a| < \delta$ gilt. Sein nun (x_n) eine beliebige echt gegen a strebende Folge. Dann gibt es einen Schwellenwert N, so dass $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Also muss auch $|f(x_n) - A| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gelten, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

($\Leftarrow$) Kontraposition: Wir nehmen an, dass $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *nicht* gilt. Unser Ziel ist zu zeigen, dass es dann mindestens eine echt gegen a strebende Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$ geben muss. Wegen $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$ muss es nach Definition ein $\epsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft geben: Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $y_\delta \neq a$ mit $|y_\delta - a| < \delta$ und $|f(y_\delta) - A| \geq \epsilon$. Wir betrachten nun die Werte $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ und die entsprechende Folge (x_n) mit $x_n = y_{\frac{1}{n}}$. Diese Folge konvergiert echt gegen a, da $|x_n - a| = |y_{1/n} - a| < 1/n$ und $x_n \neq a$ für alle n gilt. Aus $|f(x_n) - A| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aber, dass A kein Grenzwert der Folge $(f(x_n))$ sein kann. $\square$

Aus Satz 10.1 und den Grenzwertregeln für Folgen erhalten wir unmittelbar, dass man Grenzwerte »termweise« berechnen darf.

Satz 10.2: **Grenzwertregeln**

Aus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ folgt

1. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$.

Beispiel 10.3:

In der Zerlegung

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \quad \text{für} \quad |x| \neq 1$$

von $(x^n - 1)/(x - 1)$ in eine geometrische Reihe strebt jeder Term gegen 1 (wenn x gegen 1 strebt) und wir erhalten

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n\,.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ auch dann existieren kann, wenn der Funktionswert $f(a)$ im Punkt $x = a$ nicht definiert ist (siehe Lemma 10.4 für weitere Beispiele solcher Funktionen). Aber auch wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und die Funktion im Punkt a definiert ist, muss $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ nicht unbedingt gelten! Ist zum Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(0) = 1$ und $f(x) = x$ für alle $x \neq 0$ definiert, so gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ und damit $f(0) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$. (Wir erinnern uns, dass in der Definition von $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nur die Zahlen x mit $x \neq a$ und $|x - a| < \delta$ relevant sind.)

Definition: Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist *stetig* im Punkt a, falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt.

Stillschweigend ist in dieser Definition gemeint, dass der Wert $f(a)$ definiert ist und der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert. Ist $f(x)$ im Punkt a stetig, so folgt auch nach dem Folgenkriterium für den Limes, dass

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n \to \infty} x_n\big)$$

für jede gegen a strebende Folge (x_n) gilt.

Intuitiv bedeutet die Stetigkeit von f in a, dass die Funktion keinen Sprung in a macht. Stetige Funktionen sind vorteilhaft, da kleine Änderungen im Argument auch nur kleine Änderungen im Funktionswert bewirken. Umgangssprachlich kann man sich überall stetige Funktionen als solche vorstellen, deren Graph man zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Zum Beispiel sind folgende Funktionen überall stetig (d. h. im ganzen Definitionsbereich):

- Alle »üblichen« Funktionen: Polynome, e^x, $\sqrt{x}$, $\log_a x$, x^a, n^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, usw.
- Ist f stetig in einem Bereich $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist auch die Funktion $1/f(x)$ stetig in I.
- Jede Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist auf dem ganzen Konvergenzbereich stetig.