Zusammengefasst:[1]

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{oder} \quad \sum a_k \quad \text{ist die Bezeichnung für} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Jede Reihe ist also die Folge ihrer Partialsummen. Umgekehrt ist auch jede Folge die Partialsummenfolge einer Reihe, denn es gilt

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n \,.$$

Reihen, die man in der Form $\sum(a_k - a_{k-1})$ darstellen kann, nennt man *Teleskopreihen.*

Eine Reihe $\sum a_k$ heißt ***absolut konvergent***, wenn die Reihe $\sum |a_k|$ der Absolutbeträge konvergiert. Die Reihe ist ***bedingt konvergent***, wenn sie zwar konvergiert, aber die Reihe $\sum |a_k|$ divergiert.

9.2.1 Geometrische Reihe – die »Mutter aller Reihen«

Eine der wichtigsten und in vielen Anwendungen benutzten Reihen ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

für $x \in \mathbb{R}$. Für $x \geq 1$ ist diese Reihe offensichtlich divergent, da die Folge $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ der Partialsummen monoton (wachsend) und unbeschränkt ist. Man kann sich leicht überzeugen, dass die Reihe auch für alle $x \leq -1$ divergiert (Übungsaufgabe!). Ist $|x| < 1$, so ist die Reihe bereits konvergent.

Satz 9.18:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,, \tag{9.1}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}\,. \tag{9.2}$$

Beweis:

Wir wissen bereits, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

1 Reihen sind also nur spezielle Folgen. Dieselbe Bezeichnung $\sum a_k$ einmal für die Reihe selbst und einmal für ihren Grenzwert kann anfangs etwas verwirren. Diese »Dualität« in der Bezeichnung ist aber in der Literatur sehr verbreitet.

für beliebiges $x \neq 1$ gilt. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ für alle Zahlen x mit $|x| < 1$ (siehe Behauptung 9.6(3)) strebt der rechte Term gegen Null.

Die zweite Gleichung (9.2) werden wir erst in Abschnitt 10.2 mit Hilfe der Ableitungen zeigen (siehe Beispiel 10.13). □

Hier sind ein paar Beispiele:

$$0{,}9999\ldots = 0{,}9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 0{,}9 \cdot \frac{1}{1-(1/10)} = 0{,}9 \cdot \frac{10}{9} = 1;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-(1/2)} = 2;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}\,.$$

Man muss darauf achten, bei welchem k man zu summieren beginnt. So ist zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = 2 - 1 = 1\,.$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe kann man Grenzwerte von vielen anderen Reihen und Folgen bestimmen. Man kann mit ihrer Hilfe sogar einige allgemeine Konvergenzkriterien ableiten (siehe zum Beispiel Satz 9.29).

Beispiel 9.19: Binomische Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{-n-k} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^{-n} && \text{binomischer Lehrsatz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-3/4} = 4\,.\end{aligned}$$

9.2.2 Allgemeine harmonische Reihen

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ divergiert, da die Folge $H_n \geq \ln n$ ihrer Partialsummen monoton und unbeschränkt ist. Mit dem folgenden Satz kann man aber zeigen, dass die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}$ für jedes $r > 1$ konvergiert.

Satz 9.20: Verdichtungssatz

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Konvergiert die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \cdots + 2^k a_{2^k} + \cdots$$