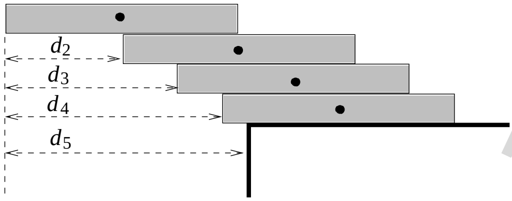

Bild 8.1: Auflegen der Bauklötze.

8.1.3 Harmonische Reihe

Die Situation mit der harmonischen Reihe

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ist etwas komplizierter: Es ist für die Summe H_n *keine* geschlossene Form bekannt, die sie vereinfacht. Man weiß aber, dass H_n sehr nah an $\ln n$ liegt.

Satz 8.5:

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1\,.$$

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir einige Begriffe, wie Ableitungen und Integrale, die wir erst später betrachten werden; daher verschieben wir den Beweis auf Abschnitt 10.8. Die etwas schwächeren Abschätzungen $1 + \frac{1}{2}\log_2 n \leq H_n \leq \log_2 n + 1$ haben wir bereits mittels Induktion bewiesen (siehe Satz 2.13).

Beispiel 8.6: Ein physikalisches »Paradoxon«

Wir möchten mit Bauklötzen gleicher Größe und Gewicht einen Turm am Rande einer Tischkante bauen, der so weit wie möglich über den Tisch übersteht, ohne umzufallen. Die Bauklötze haben die Länge 2 und haben den Schwerpunkt in der Mitte. Für $n \geq 2$ sei d_n der Abstand der linken Kante des ersten (obersten) Bauklotzes vom n-ten Klotz (siehe Bild 8.1).

Um nicht umzufallen, reicht es für alle $n \geq 1$ die folgende Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen: Der gemeinsame Schwerpunkt der oberen n Klötze muss vertikal *über* dem $(n+1)$-ten Klotz liegen. Da n Objekte gleichen Gewichts mit Schwerpunkt an den Positionen $p_1, \ldots, p_n$ den Gesamtschwerpunkt an der Position $(p_1 + \cdots + p_n)/n$ haben, reicht es also, die Bedingung

$$\frac{1 + (d_2 + 1) + (d_3 + 1) + \cdots + (d_n + 1)}{n} \geq d_{n+1}$$

zu erfüllen. Im Grenzfall (Gleichheit) erhalten wir die Zahlen

$$d_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (d_i + 1) \quad \text{mit } d_1 = 0 \text{ und } d_2 = 1\,.$$

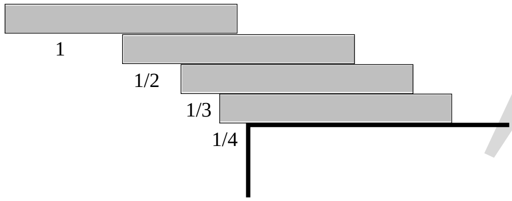

Bild 8.2: Auflegen der vier Bauklötze der Länge 2. Wegen $H_4 = 1+1/2+1/3+1/4 = 50/24 > 2$ liegt der oberste Klotz vollständig außerhalb der Tischplatte.

Für diese Zahlen gilt

$$\begin{aligned} n(d_{n+1} - d_n) &= \sum_{i=1}^{n}(d_i + 1) - \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(d_i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(d_i + 1) - \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n-1}(d_i + 1) \\ &= d_n + 1 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(d_i + 1) = 1 \end{aligned}$$

und somit auch

$$d_{n+1} = d_n + \frac{1}{n} = \left(d_{n-1} + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} = \ldots = d_2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n\,.$$

Wegen $H_n > \ln n$ ist dieser Fakt etwas überraschend: Man kann den obersten Klotz auf eine Position beliebig weit außerhalb der Tischplatte versetzen, wenn man genügend viele Klötze zur Verfügung hat. So wird wegen $H_4 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 50/24 > 2$ der oberste Klotz bereits bei vier Klötzen vollständig außerhalb des Tisches liegen (siehe Bild 8.2).

8.2 Rekursionsgleichungen

Wie wir bereits oben erwähnt haben, sind die Folgen (x_n) meist durch eine rekursive Definition gegeben: Zuerst gibt man die Werte der ersten $k+1$ Folgenglieder $x_0, \ldots, x_k$ an und dann definiert man die nächsten Folgenglieder durch eine Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, \ldots, x_{n-k})\,.$$

Um eine so definierte Folge zu analysieren, braucht man eine *explizite* Darstellung der Folge, also eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $x_n = f(n)$ für alle n. Eine solche Funktion f nennt man auch die »geschlossene« Form für (x_n) oder die »Lösung« der entsprechenden Rekursionsgleichung.

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man eine geschlossene Form für rekursiv definierte Folgen finden kann, wenn die Funktion φ eine *lineare* Kombination der vorigen Folgenglieder ist. Dazu betrachten wir bestimmte Transformationen der Folgen und »schütteln«

Tabelle 8.1: Transformationen von Folgen.

Transformation	Definition
Addition/Subtraktion	$(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$
Skalarmultiplikation	$c(x_n) = (cx_n)$
Verschiebung	$\mathbf{E}(x_n) = (x_{n+1})$
k-malige Verschiebung	$\mathbf{E}^k(x_n) = (x_{n+k})$
Kompositionsregeln	$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})(x_n) = \mathbf{A}(x_n) \pm \mathbf{B}(x_n)$
	$\mathbf{AB}(x_n) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(x_n)) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(x_n))$
Transformation von Summen	$\mathbf{A}(x_n \pm y_n) = \mathbf{A}(x_n) \pm \mathbf{A}(y_n)$

mit ihrer Hilfe die gegebene Folge hin und her bis etwas »Vernünftiges« herauskommt.

Es gibt zwei Basistransformationen: Multiplikation der Folgenglieder mit einer Konstanten und Verschiebung der Folge um ein Glied nach links (das erste Glied x_0 verschwindet dabei):

$$\begin{aligned} (x_n) &= x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots \\ c(x_n) = (cx_n) &= cx_0, cx_1, cx_2, cx_3, \ldots \\ \mathbf{E}(x_n) = (x_{n+1}) &= x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \end{aligned}$$

Ausgehend von diesen zwei einfachen Basistransformationen $\mathbf{E}(x_n)$ und $c(x_n)$ kann man auch kompliziertere Transformationen erhalten, indem man die Basistransformationen entsprechend kombiniert. Die wichtigsten Transformationen sind in Tabelle 8.1 aufgelistet. So gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (2 + \mathbf{E})(x_n) &= 2(x_n) + \mathbf{E}(x_n) = (2x_n + x_{n+1}), \\ \mathbf{E}^2(x_n) &= \mathbf{E}(x_{n+1}) = (x_{n+2}). \end{aligned}$$

8.2.1 Homogene Rekursionsgleichungen

Sei (x_n) eine durch die homogene Rekursionsgleichung

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} \tag{8.3}$$

gegebene Folge; das Wort »homogen« bedeutet, dass wir auf der rechten Seite keinen zusätzlichen Term haben, der nicht von früheren Folgenglieder abhängt. Wir wollen diese Rekursionsgleichung lösen, d. h. eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $x_n = f(n)$ finden. Dazu schreiben wir die Rekursionsgleichung zunächst um

$$x_{n+k} - a_1 x_{n+(k-1)} - a_2 x_{n+(k-2)} - \cdots - a_{k-1} x_{n+1} - a_k x_n = 0,$$

was in unseren neuen Bezeichnungen die Form

$$\mathbf{E}^k(x_n) - a_1 \mathbf{E}^{k-1}(x_n) - a_2 \mathbf{E}^{k-2}(x_n) - \cdots - a_{k-1} \mathbf{E}(x_n) - a_k(x_n) = (0)$$