Bild 7.5: Das von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannte Parallelogramm.

leicht zu bestimmen:

$$P_{A,S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_{B,S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nach Korollar 7.12(b) ist $P_{S,B}$ einfach das Inverse von $P_{B,S}$:

$$P_{S,B} = P_{B,S}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nach Korollar 7.12(c) gilt somit

$$P_{A,B} = P_{S,B} P_{A,S} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Ist nun $\boldsymbol{x} = a + bz$ ein Polynom in V, so haben wir in Beispiel 5.52 seine Koordinatendarstellungen in beiden Basen A und B bereits bestimmt:

$$[\boldsymbol{x}]_A = \begin{bmatrix} a - b \\ b \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{x}]_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2a + b \\ 2a - b \end{bmatrix}.$$

Man kann leicht verifizieren, dass auch $[\boldsymbol{x}]_B = P_{A,B} \cdot [\boldsymbol{x}]_A$ gilt.

7.4 Die Determinante

Der Begriff der Determinante wurde im Jahr 1683 fast zeitgleich in Japan durch Seki und in Europa durch Leibniz erfunden worden. Den modernen Begriff der Determinante hat Cauchy im Jahr 1812 erstmals ausführlich beschrieben. Dieser Begriff ist aus der folgenden Fragestellung entstanden.

Man hat zwei Vektoren $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ in $\mathbb{R}^2$ und will die Fläche (oder das Volumen) F des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelogramms bestimmen. Sind die Vektoren linear abhängig, so sind sie *kolinear* (liegen auf einer Geraden). In diesem Fall ist $F = 0$. Anderenfalls spannen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ein Parallelogramm auf; dieses hat die Fläche $F = \|\boldsymbol{b}\| \cdot \|\boldsymbol{a}\| \sin\alpha$, wobei α der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist (siehe Bild 7.5). Wenn wir nun das Quadrat von F betrachten, erhalten wir

$$\begin{aligned} F^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot \sin^2\alpha = \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha) && \text{Pythagoras} \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 \cdot \Big(1 - \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2}\Big) && \text{Def. (6.3) von } \cos\alpha \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 .
\end{aligned}
$$

Ist nun A eine 2×2 Matrix mit den Zeilen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, dann heißt die Zahl $a_1 b_2 - a_2 b_1$ die Determinante von A und wird mit $\det(A)$ bezeichnet:

$$
\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 . \tag{7.4}
$$

Als nächstes wollen wir diese Idee auf $n \times n$ Matrizen A erweitern.

Wenn wir die Zeilen einer quadratischen $n \times n$ Matrix $A = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ als »Variablen« betrachten, können wir uns die Determinante als eine Abbildung $\det : V^n \to \mathbb{R}$ mit $V = \mathbb{R}^n$ vorstellen. Diese Abbildung soll das »Volumen« des durch die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ aufgespannten Parallelogramms wiederspiegeln. Für die Einheitsvektoren soll also das Volumen gleich 1 sein. Außerdem sollte das Volumen linear in jeder Richtung und gleich Null für jede Eingabe mit zwei gleichen Vektoren $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ sein. Erfüllt eine Abbildung diese drei Bedingungen, so nennt man sie »Determinantenfunktion«.

Eine Abbildung $\det(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ heißt *Determinantenfunktion*, falls sie außer der Bedingung $\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(a) $\det(\ldots, \boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{z}, \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots) + \lambda \cdot \det(\ldots, \boldsymbol{z}, \ldots)$ (Linearitätseigenschaft);

(b) $\det(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots) = 0$ (Nulleigenschaft).

Beispiel 7.14:

Wir wollen zeigen, dass die durch (7.4) definierte Funktion tatsächlich eine Determinantenfunktion für 2×2 Matrizen ist:

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1; \\
\det \begin{bmatrix} a_1 + \lambda z_1 & a_2 + \lambda z_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} &= (a_1 + \lambda z_1) b_2 - (a_2 + \lambda z_2) b_1 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \lambda (z_1 b_2 - z_2 b_1) \\
&= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} + \lambda \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}; \\
\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} &= a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0 .
\end{aligned}
$$

Aus der Eigenschaften (a) und (b) kann man weitere Eigenschaften der Determinantenfunktion ableiten. Um die Schreibweise zu vereinfachen, betrachten wir nur die ersten zwei Vektoren $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$; dies gilt aber für beliebige zwei Vektoren $\boldsymbol{x}_i$ und $\boldsymbol{x}_j$ mit $i \neq j$.

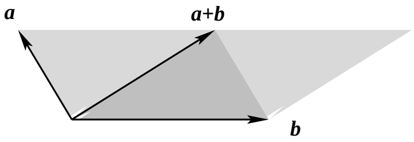

Bild 7.6: Die von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannte Fläche ist gleich der von $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Fläche.

Lemma 7.15: Determinante und Elementartransformationen

1. Addiert man einen mit einem Skalar multiplizierten Vektor zu einem anderen, so bleibt der Wert unverändert:

$$\det(\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\dots,\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\dots,\boldsymbol{x}_n)\,.$$

2. Die Vertauschung von Vektoren ändert das Vorzeichen:

$$\det(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,\dots,\boldsymbol{x}_n)=-\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\dots,\boldsymbol{x}_n)\,.$$

Aussage (1) bedeutet, dass die Determinante invariant gegenüber »Scherung« ist. In dem Fall einer 2×2 Matrix $A=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ bedeutet dies $\det[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]=\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ (Bild 7.6).

Beweis:

Um (1) zu beweisen, wenden wir (a) und (b) an:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)&=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)+\lambda\cdot\det(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n) && \text{(a)}\\&=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)\,. && \text{(b)}\end{aligned}$$

Um (2) zu beweisen, wenden wir dreimal (1) und anschließend einmal (a) an:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\dots)&=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,\dots) && (1)\\&=\det(\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1),\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,\dots) && (1)\\&=\det(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3\dots)\\&=\det(\boldsymbol{x}_2,(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\dots) && (1)\\&=\det(\boldsymbol{x}_2,-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,\dots)\\&=-\det(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3\dots) && \text{(a)}\,.\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun die Vektoren $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\in\mathbb{R}^n$ als Zeilen einer $n\times n$ Matrix A. Wann ist $\det(A)=0$?

Lemma 7.16: Wann ist die Determinante gleich Null?

Sei A eine quadratische Matrix. Dann gilt $\det(A)=0$, falls mindestens einer der folgenden Fälle zutrifft.

1. A enthält zwei gleiche Zeilen.
2. A enthält eine Nullzeile.

3. Eine Zeile ist ein Vielfaches einer anderen Zeile.
4. Die Zeilen von A sind linear abhängig.

Beweis:

(1) ist die Nulleigenschaft der Determinantenfunktion.
(2) folgt aus der Linearität: Wenn wir eine Nullzeile mit 0 multiplizieren, dann verändert sich weder die Matrix noch ihre Determinante; das Resultat ist aber nach der Linearität (Eigenschaft (a)) gleich 0.
(3) folgt direkt aus (1) und der Linearität.
(4) Wir nehmen zunächst an, dass die erste Zeile $\boldsymbol{x}_1$ eine Linearkombination der anderen Zeilen ist:

$$\boldsymbol{x}_1 = a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n \,.$$

Die Linearitäts- und Nulleigenschaften der Determinantenfuntion ergeben dann

$$\det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \det\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\right) = \sum_{i=2}^{n} a_i \det(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0 \,.$$

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Sind die Zeilen von A linear abhängig, so kann man eine der Zeilen als eine Linearkombination der anderen darstellen. Durch Vertauschen dieser Zeile mit der 1. Zeile sind wir in der vorigen Situation. Da die Vertauschung der Zeilen nur das Vorzeichen der Determinante ändert und $-0 = 0$ gilt, folgt $\det(A) = 0$. □

7.4.1 Determinante und Elementartransformationen

Aus der Linearität der Determinantenfunktion (Eigenschaft (a)) folgt

$$\det(\lambda_1\boldsymbol{e}_1, \lambda_2\boldsymbol{e}_2, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{e}_n) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \cdot \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \,.$$

In der Matrixform bedeutet dies, das die Determinante einer Diagonalmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge ist. Interessanterweise gilt dies auch für beliebige *Dreiecksmatrizen*, d. h. für beliebige (quadratische) Matrizen $A = (a_{ij})$, so dass $a_{ij} = 0$ entweder für alle $i > j$ oder für alle $i < j$ gilt.

Satz 7.17: Hauptbeobachtung

Für jede $n \times n$ Dreiecksmatrix Δ mit Diagonaleinträgen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ gilt

$$\det(\Delta) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \,.$$

Beweis:

Ist mindestens ein Diagonaleintrag gleich Null, so gilt $\mathrm{rk}(A) < n$; nach Lemma 7.16(4) ist dann auch $\det(A) = 0$. Sind alle Diagonaleinträge von Null verschieden, so kann man A mittels der in Lemma 7.15(1) beschriebenen Transformationen in eine Diagonalmatrix überführen, ohne die Diagonaleinträge zu verändern. Da die Determinante nach Lemma 7.15(1) dabei unverändert bleibt, folgt die Behauptung. □

Um die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix A zu berechnen, lohnt es daher, die Matrix A mittels Elementartransformationen in eine Dreiecksmatrix Δ zu überführen. Die beiden Elementartransformationen sind:

1. Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

2. Permutation der Zeilen.

Nach Lemma 7.15 ändert die 1. Transformation die Determinante nicht und die 2. Transformation ändert nur das Vorzeichen. Somit kann man die Determinante einer Matrix mit dem Gauß-Algorithmus berechnen.

Satz 7.18: Hauptsatz der Determinantenberechnung

Wird eine $n \times n$ Matrix A durch Elementartransformationen mit insgesamt m Zeilenvertauschungen zu einer Dreiecksmatrix Δ mit Diagonaleinträgen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ gebracht, so gilt

$$\det(A) = (-1)^m \det(\Delta) = (-1)^m a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}\,.$$

Im Falle einer singulären Matrix A ($\mathrm{rk}(A) < n$) enthält die resultierende Dreiecksmatrix $\Delta = (a_{ij})$ wenigstens eine Null auf der Diagonalen ($a_{ii} = 0$ für mindestens ein i). Damit erhalten wir den folgenden Singularitätskriterium:

Korollar 7.19: Singularitätskriterium

Für eine $n \times n$ Matrix A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\det(A) = 0$;
2. $\mathrm{rk}(A) < n$;
3. es gibt ein $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ mit $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

7.4.2 Das Matrizenprodukt und die Determinante

In diesem Abschnitt beweisen wir eine der wichtigsten Eigenschaften der Determinante:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)\,.$$

Wir haben bereits in Abschnitt 7.3.3 gesehen, dass die Anwendung der Elementartransformationen auf eine Matrix A einer Multiplikation dieser Matrix (von links) mit sogenannten Elementarmatrizen von Typ 1 und Typ 2 entspricht; diese Elementarmatrizen sind in Bild 7.4 skizziert. Wir beachten nochmals, dass die Elementarmatrizen durch die Anwendung der Elementartransformationen auf die Einheitsmatrix E entstehen.

Behauptung 7.20:

Sei M eine Elementarmatrix. Dann gilt:

1. $\det(M) = -1$, falls M vom Typ 1 ist;
2. $\det(M) = 1$, falls M vom Typ 2 ist;
3. $\det(M^\top) = \det(M)$.

Beweis:

(1) Ist die Matrix M vom Typ 1, so ist sie aus der Einheitsmatrix E durch die Vertauschung zweier Zeilen entstanden, woraus nach Lemma 7.15(2) $\det(M) = -\det(E) = -1$ folgt.
(2) Ist die Matrix M vom Typ 2, so ist sie eine Dreiecksmatrix mit nur Einsen auf der Diagonalen, woraus nach Satz 7.17 $\det(M) = 1$ folgt.
(3) Ist die Matrix M vom Typ 1, so gilt sogar $M^\top = M$. Ist sie vom Typ 2, so sind beide Matrizen $M^\top$ und M Dreiecksmatrizen mit nur Einsen auf der Diagonalen.□

Lemma 7.21:

Sei A eine $n \times n$ Matrix und sei M eine $n \times n$ Elementarmatrix. Dann gilt

$$\det(MA) = \det(M) \cdot \det(A).$$

Beweis:

Die Matrix M entspricht einer der beiden Elementartransformationen, angewandt auf die Einheitsmatrix E. Somit ist $\det(M) = \pm\det(E) = \pm 1$, wobei $\det(M) = -1$ genau dann der Fall ist, wenn M von Typ 1 ist. Andererseits gilt nach Lemma 7.15 auch $\det(MA) = \pm\det(A)$ mit $\det(MA) = -\det(A)$ genau dann, wenn M einer Vertauschung der Zeilen entspricht, also eine Elementarmatrix von Typ 1 ist. □

Satz 7.22:

Seien A und B beliebige $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$;
2. $\det(A^\top) = \det(A)$;
3. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls $\det(A) \neq 0$.

Vorsicht: Die »Regel« $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ist für $n \geq 2$ falsch (siehe Aufgabe 7.16).

Beweis:

(1) Nehmen wir zunächst an, dass die Matrix B invertierbar ist. Nach Satz 7.9(3) ist dann B ein Produkt von Elementarmatrizen, also $B = M_1 M_2 \cdots M_k$. Nach Lemma 7.21 gilt somit

$$\det(AB) = \det(A)[\det(M_1)\det(M_2)\cdots\det(M_k)] = \det(A)\det(B)\,.$$

Sei nun B nicht invertierbar. In diesem Fall reicht es zu zeigen, dass dann auch das Produkt $C = AB$ nicht invertierbar ist, denn dann sind $\det(AB)$ und $\det(A)\cdot\det(B)$ beide gleich Null. Angenommen, C ist invertierbar. Dann können wir beide Seiten von $C = AB$ mit C^{-1} multiplizieren und erhalten $E = C^{-1}AB$. Dies bedeutet aber, dass $C^{-1}A$ ein Inverses von B ist, ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass B nicht invertierbar ist.

(2) Ist A nicht invertierbar, so ist nach Lemma 7.6(4) auch $A^\top$ nicht invertierbar und $\det(A^\top)$ und $\det(A)$ sind dann beide gleich Null. Ist aber A invertierbar, dann ist A nach Satz 7.9(3) ein Produkt der Elementarmatrizen. Nach Behauptung 7.20(3)