Sei A eine $m \times n$ Matrix und B eine $n \times r$ Matrix über einem Körper $\mathbb{F}$. Seien auch $f_B : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^n$ und $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ die durch diese Matrizen definierten linearen Abbildungen $f_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ und $f_A(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y}$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$f_A(f_B(\boldsymbol{x})) = f_{AB}(\boldsymbol{x})$$

gilt. Natürlich folgt dies direkt aus dem Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation ($\boldsymbol{x}$ ist ja auch eine $r \times 1$ Matrix):

$$f_A(f_B(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x} = f_{AB}(\boldsymbol{x}) .$$

Trotzdem lohnt es sich, dies einmal explizit auszurechnen.

Der Vektor $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$ ist ein Vektor der Skalarprodukte von $\boldsymbol{x}$ mit den Zeilen von B, d. h. die k-te Koordinate y_k $(k = 1, \ldots, n)$ des Vektors $\boldsymbol{y}$ ist gleich

$$y_k = \sum_{j=1}^{r} B[k,j] \cdot x_j .$$

Der Vektor $\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y}$ ist ebenfalls ein Vektor der Skalarprodukte von $\boldsymbol{y}$ mit den Zeilen von A und die i-te Koordinate z_i $(i = 1, \ldots, m)$ des Vektors $\boldsymbol{z}$ ist gleich

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{k=1}^{n} A[i,k] \cdot y_k = \sum_{k=1}^{n} A[i,k] \Big(\sum_{j=1}^{r} B[k,j] \cdot x_j \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{n} A[i,k] \cdot B[k,j] \Big) \cdot x_j = \sum_{j=1}^{r} AB[i,j] x_j . \end{aligned}$$

Somit sind auch die Koordinaten von $\boldsymbol{z} = A(B\boldsymbol{x}) = f_A(f_B(\boldsymbol{x}))$ Skalarprodukte von $\boldsymbol{x}$ mit den Zeilen der Produktmatrix AB, woraus $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ folgt.

Ist A eine *quadratische* Matrix, so kann man sie mehrmals mit sich selbst multiplizieren: Die n-te Potenz A^n ist dann rekursiv durch $A^1 = A$ und $A^{n+1} = A^n A$ definiert.

Beispiel 7.2: **Matrixpotenzen in der Ökonomie**

Wir betrachten eine Anzahl von Gütern (Waren, Dienstleistungen), durchnummeriert von 1 bis n. Einen Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ deuten wir als Mengenangaben für diese Güter. Durch eine $n \times n$ Matrix[1] $A = (a_{ij})$ beschreiben wir, wieviel von dem Gut mit der Nummer j bei der Produktion einer Einheit von Gut i verbraucht wird.

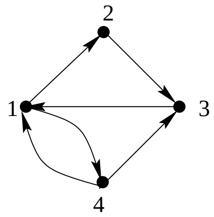
Will man nun $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ verkaufen, muss natürlich $\boldsymbol{b}$ produziert werden, aber zusätzlich wird $A\boldsymbol{b}$ benötigt, zur Produktion von $A\boldsymbol{b}$ wiederum $A^2\boldsymbol{b}$, zur Produktion von $A^2\boldsymbol{b}$ zusätzlich $A^3\boldsymbol{b}$, und so weiter, insgesamt

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{b} + A^2\boldsymbol{b} + A^3\boldsymbol{b} + \cdots .$$

Die Bestimmung von $\boldsymbol{x}$ (ohne den Grenzwert zu berechnen) läuft so:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{b} + A^2\boldsymbol{b} + A^3\boldsymbol{b} + \cdots$$

1 In der Ökonomie sind Modelle mit vielen Gütern gebräuchlich, verwandte Matrizen werden für ganze Volkswirtschaften erstellt (mit einigen hundert Zeilen und Spalten).



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bild 7.2: Ein gerichteter Graph mit 4 Knoten, seine Adjazenzmatrix A und die zweite Potenz von A.

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = & \quad A\boldsymbol{b} + A^2\boldsymbol{b} + A^3\boldsymbol{b} + \cdots \\ \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,. & \end{aligned}$$

Also ergibt sich die gesuchte nötige Gesamtproduktion $\boldsymbol{x}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems $(E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

In vielen Anwendungen tauchen die folgenden Probleme auf. Gegeben seien eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten $V = \{1, \ldots, n\}$. Für zwei Knoten i und j interessiert man sich, ob es einen Weg von i nach j der Länge k gibt. Wenn ja, wieviele solche Wege gibt es insgesamt? Solche Fragen tretten insbesondere in der Theorie der Markov-Ketten häufig auf.

Wenn wir alle mögliche Wege ausprobieren wollen, wird das zu einem sehr großen Zeitaufwand führen: Im schlimmsten Fall muss man alle n^k mögliche Wege ausprobieren. Man kann aber mit viel kleinerem Rechenaufwand auskommen, wenn man die Matrizenalgebra verwendet: Dann reichen höchstens kn^3 Operationen völlig aus. Dazu betrachtet man die sogenannte »Adjazenzmatrix« $A = (a_{ij})$ von G und berechnet ihre k-te Potenz A^k. Die *Adjazenzmatrix* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ ist eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1$, falls $(i, j) \in E$, und $a_{ij} = 0$ sonst (Bild 7.2).

Satz 7.3: Anzahl der Wege

Sei G ein gerichteter Graph mit den Knoten $1, \ldots, n$ und A sei seine Adjazenzmatrix. Ist A^k die k-te Potenz von A, so gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$

$$A^k[i, j] = \text{Anzahl der Wege der Länge } k \text{ in } G \text{ von } i \text{ nach } j.$$

Beweis:

Wir beweisen den Satz mittels Induktion über k.

Für $k = 1$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt, denn es gilt $A^1 = A$ und die Adjazenzmatrix zeigt die Zahl aller Kanten, also aller Wege der Länge 1 zwischen zwei Knoten an.

Sei die Behauptung bereits für alle Potenzen A^r, $r = 1, \ldots, k-1$ bewiesen. Nach der Definition der Matrixmultiplikation ist der Eintrag $A^k[i, j]$ in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $A^k = A \cdot A^{k-1}$ genau das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit

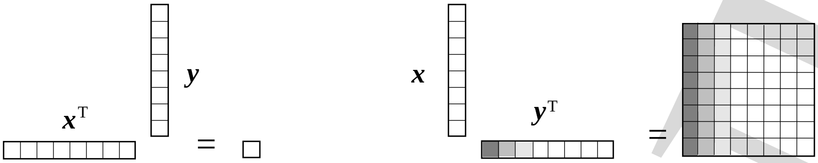


Bild 7.3: Der Unterschied zwischen $\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ und $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top$.

der j-ten Spalte von A^{k-1}, d. h.

$$A^k[i,j] = \sum_{t=1}^{n} A[i,t] \cdot A^{k-1}[t,j]\,.$$

Für jedes $t = 1, \ldots, n$, ist der Summand $A[i,t] \cdot A^{k-1}[t,j]$ genau dann von Null verschieden, wenn $A[i,t] = 1$ gilt und demzufolge $A[i,t] \cdot A^{k-1}[t,j] = A^{k-1}[t,j]$ ist. Da $A^{k-1}[t,j]$ nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl der Wege der Länge $k-1$ angibt, die von t nach j führen, und sich aufgrund der Existenz der Kante (i,t) ($A[i,t] = 1$) jeder dieser Wege zu einem Weg der Länge k von i nach j fortsetzen lässt, trägt der Summand $A[i,t] \cdot A^{k-1}[t,j]$ genau die Anzahl der Wege der Länge $1 + (k-1) = k$ von i (über t) nach j zur Summe $A^k[i,j]$ bei. Da über alle Zwischenknoten t summiert wird, gibt $A^k[i,j]$ wie behauptet die Zahl sämtlicher Wege der Länge k an, die in G von i nach j führen. □

7.2 Matrizenprodukt und Rang

Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^n$ zwei Spaltenvektoren, so kann man sie auch als $n \times 1$ Matrizen betrachten; $\boldsymbol{x}^\top$ und $\boldsymbol{y}^\top$ sind dann $1 \times n$ Matrizen. Das Matrizenprodukt $\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}$ ist dann nichts anderes als das Skalarprodukt $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. Was ist aber $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top$? Da $\boldsymbol{x}$ eine $n \times 1$ und $\boldsymbol{y}^\top$ eine $1 \times n$ Matrix ist, ist das Produkt $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top$ eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = x_i \cdot y_j$ (siehe Bild 7.3). Beachte aber, dass diese Matrix sehr kleinen Rang hat. Es gilt nämlich $\mathrm{rk}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top) \leq 1$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^m$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^n$: Die i-te Spalte der Matrix $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top$ ist einfach das y_i-fache $y_i \boldsymbol{x}$ des Vektors $\boldsymbol{x}$.

Das Matrizenprodukt erlaubt uns, den Rang $\mathrm{rk}(A)$ der Matrizen auch anders zu beschreiben. In vielen Anwendungen ermöglichen diese alternativen Beschreibungen, den Rang nach oben abzuschätzen, ohne ihn dabei explizit zu berechnen. Zunächst haben wir die folgende Ungleichung:

$$\mathrm{rk}(AB) \leq \min\{\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)\}\,. \tag{7.1}$$

Dazu reicht es zu beobachten, dass der Spaltenraum von AB eine Teilmenge des Spaltenraumes von A und der Zeilenraum von AB eine Teilmenge des Zeilenraumes von B ist: Die j-te Spalte von AB ist die durch die j-te Spalte $\boldsymbol{b}_j$ von B gegebene Linearkombination $A\boldsymbol{b}_j$ der Spalten von A.

Satz 7.4: Alternative Definitionen des Rangs

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix über einem Körper $\mathbb{F}$. Dann sind die folgenden drei Aussagen zu der Aussage $\mathrm{rk}(A) \leq r$ äquivalent.