**Beweis:**

Sei $|M| = n$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach $n$. Ist $n = 0$, so ist nichts zu beweisen. Sei nun $n > 0$ und $M = M' \cup \{\boldsymbol{w}\}$ mit $|M'| = n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $C' \subseteq B$ mit $|C'| = |M'| = n - 1$, so dass $B' = (B \setminus C') \cup M'$ eine Basis von $V$ ist. Dann lässt sich $\boldsymbol{w}$ als Linearkombination

$$\boldsymbol{w} = \sum_{\boldsymbol{u} \in B \setminus C'} \lambda_u \boldsymbol{u} + \sum_{\boldsymbol{v} \in M'} \lambda_v \boldsymbol{v}$$

schreiben. Wären alle $\lambda_u$ mit $u \in B \setminus C'$ gleich 0, so folgte $1 \cdot \boldsymbol{w} + \sum_{\boldsymbol{v} \in M'} (-\lambda_v)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $M$. Also existiert ein $\boldsymbol{u} \in B \setminus C'$ mit $\lambda_u \neq 0$. Nach Lemma 5.42 ist dann $(B' \setminus \{\boldsymbol{u}\}) \cup \{\boldsymbol{w}\} = (B \setminus C) \cup M$ mit $C = C' \cup \{\boldsymbol{u}\}$ eine Basis von $V$. □

**Satz 5.44: Dimension**

Ist $V$ ein endlich erzeugter linearer Raum, so besteht jede Basis von $V$ aus der gleichen Anzahl von Vektoren. Diese Zahl heißt *Dimension* von $V$ und wird mit $\dim V$ bezeichnet.

Man vereinbart auch $\dim \{\boldsymbol{0}\} = 0$.

**Beweis:**

Sind $B$ und $B'$ Basen von $V$, so folgt aus Satz 5.43, dass $|B'| \leq |B|$ und, indem man die Rollen von $B$ und $B'$ umkehrt, $|B| \leq |B'|$. □

**Korollar 5.45:**

In jedem endlich-dimensionalen Vektorraum $V$ kann man jede linear unabhängige Menge $M \subseteq V$ bis zu einer Basis von $V$ erweitern.

**Beweis:**

Ist $M$ noch keine Basis von $V$, dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{x} \in V \setminus \operatorname{span}(M)$. Die erweiterte Menge $M' = M \cup \{\boldsymbol{x}\}$ ist daher auch linear unabhängig. Ist $M'$ immer noch keine Basis von $V$, dann wiederhole das Argument mit $M'$ anstatt $M$, usw. Da nach Satz 5.43 keine Menge linear unabhängiger Vektoren in $V$ mehr als $\dim V$ Vektoren enthalten kann, sind wir in $\dim V - |M|$ Schritten fertig. □

### 5.6.2 Lineare Abbildungen

Seien $V$ und $W$ zwei lineare Räume über einem Körper $\mathbb{F}$. D. h. $V$ und $W$ sind abelsche Gruppen mit einer zusätzlichen Operation – der Multiplikation mit Skalaren.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, falls für alle $\lambda \in \mathbb{F}$ und $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ gilt:

1. $f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$;
2. $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$; die erste Summe in $V$, die zweite in $W$.

Insbesondere muss wegen (1) auch $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ gelten.

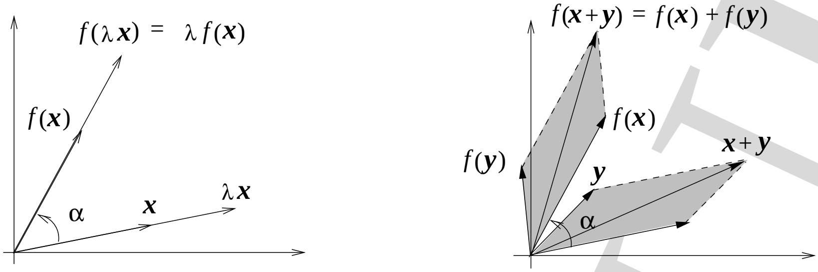


Bild 5.7: Drehung um einen festen Winkel $\alpha$. Im rechten Bild ergibt sich der oberste Punkt des Parallelogramms sowohl durch Addition der Punkte $f(\boldsymbol{x})$ und $f(\boldsymbol{y})$ wie auch durch Drehung des Punktes $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$.

**Beispiel 5.46:**

Die durch $f(x,y) = (x+y, y)$ gegebene Abbildung[3] $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist linear. Um das zu zeigen, seien $\boldsymbol{u} = (x,y)$ und $\boldsymbol{v} = (x',y')$ zwei beliebige Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\boldsymbol{u}) &= f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, \lambda y) = \lambda(x+y,y) = \lambda f(x,y) = \lambda f(\boldsymbol{u})\,; \\ f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f(x+x', y+y') = (x+x'+y+y', y+y') \\ &= (x+y,y) + (x'+y',y') = f(x,y) + f(x',y') = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})\,. \end{aligned}$$

Genauso ist die Abbildung $f(x,y) = (2x{,}2y)$ linear. Die Abbildung $f(x,y) = (x+2, y+2)$ ist aber nicht linear, da $f(\boldsymbol{0}) = f(0{,}0) = (2{,}2) \neq \boldsymbol{0}$ gilt. Die Abbildung $f(x,y) = (xy, y)$ ist auch nicht linear, da $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \neq f(\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{v})$ für $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^2$ gilt: Die zur ersten Komponente gehörige Ungleichung ist $(x+x')(y+y') \neq xy+x'y'$.

**Beispiel 5.47:**

Wir betrachten die reelle Ebene $V = \mathbb{R}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dann ist die Drehung $f$ um einen festen Winkel $\alpha$ um den Nullpunkt eine lineare Abbildung, wie man aus Bild 5.7 ablesen kann. Wir wollen die Abbildung $f$ nun *explizit* beschreiben. Dazu nehmen wir die Standardbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{e}_1 = (1{,}0)$ und $\boldsymbol{e}_2 = (0{,}1)$. Jeder Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist dann eine Linearkombination $(x,y) = x_1\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ der Basisvektoren. Wegen der Linearität der Abbildung $f$ muss daher

$$f(x,y) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) = xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2)$$

gelten. Die Vektoren $f(\boldsymbol{e}_1)$ und $f(\boldsymbol{e}_2)$ lassen sich leicht aus Bild 5.8 ablesen. Also gilt

$$f(x,y) = x(\cos\alpha, \sin\alpha) + y(-\sin\alpha, \cos\alpha) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)\,.$$

Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ definiert zwei lineare Räume (siehe Bild 5.9):

1. *Nullraum* $\operatorname{Null} f = \{\boldsymbol{x} \in V : f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \subseteq V$;

3 Zur Vereinfachung schreiben wir $f(x,y)$ statt $f((x,y))$.

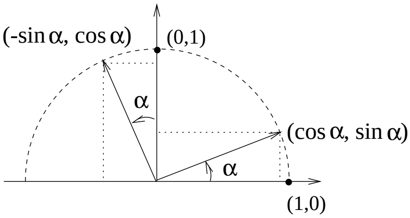


Bild 5.8: Drehung der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1 = (1{,}0)$ und $\boldsymbol{e}_2 = (0{,}1)$ von $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\alpha$.

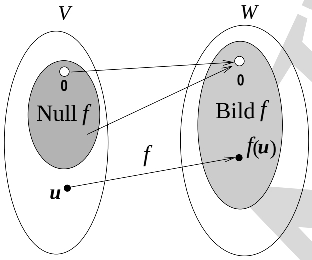


Bild 5.9: Der Nullraum $\operatorname{Null} f$ und der Bildraum $\operatorname{Bild} f$.

2. *Bildraum* $\operatorname{Bild} f = \{f(\boldsymbol{x})\colon \boldsymbol{x} \in V\} \subseteq W$.

**Satz 5.48: Dimensionsformel für lineare Abbildungen**

Seien $V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale lineare Räume über einem Körper $\mathbb{F}$ und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist $\dim V = n$, so gilt

$$\dim \operatorname{Bild} f = n - \dim \operatorname{Null} f\,.$$

**Beweis:**

Sei $k = \dim \operatorname{Null} f$ und sei $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ eine Basis von $\operatorname{Null} f$. Nach Korollar 5.45 können wir diese Basis bis zu einer Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ des gesamten Raumes $V$ erweitern. Sei $B = \{f(\boldsymbol{v}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$. Wir behaupten, dass $B$ eine Basis von $\operatorname{Bild} f$ ist, woraus $|B| = \dim \operatorname{Bild} f$ und somit auch $n = k + |B| = \dim \operatorname{Null} f + \dim \operatorname{Bild} f$ folgt.

Zu zeigen: $B$ ist linear unabhängig. Angenommen, es gibt eine Linearkombination

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}$$

mit mindestens einem $\lambda_i \neq 0$. Wegen der Linearität von $f$ liegt der Vektor $\boldsymbol{x} = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ in $\operatorname{Null} f$, denn es gilt

$$f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i\Big) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}.$$

Da die ersten $k$ Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ eine Basis von $\operatorname{Null} f$ bildet, kann man den Vektor $\boldsymbol{x}$ auch als eine Linearkombination $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ der ersten $k$ Vektoren darstellen. Somit erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{x} = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

oder äquivalent $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k - \lambda_{k+1} \boldsymbol{v}_{k+1} - \cdots - \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$. Da aber die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ eine Basis von $V$ bilden, müssen alle Koeffizienten und damit auch $\lambda_i$ gleich Null sein. Ein Widerspruch.

Zu zeigen: $\operatorname{Bild} f \subseteq \operatorname{span}(B)$. Sei $f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Bild} f$ für ein $\boldsymbol{x} \in V$. Wir stellen $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ durch die Basisvektoren dar und erhalten

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= f(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k + \lambda_{k+1} \boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n) \\
&= \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \lambda_k f(\boldsymbol{v}_k) + \lambda_{k+1} f(\boldsymbol{v}_{k+1}) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{v}_n) \\
&= 0 + \cdots + 0 + \lambda_{k+1} f(\boldsymbol{v}_{k+1}) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{v}_n).
\end{aligned}$$

Somit ist $f(\boldsymbol{x})$ als eine Linearkombination der Vektoren in $B$ dargestellt. □

### 5.6.3 Koordinaten

Der nächste Satz erklärt warum eigentlich eine Basis auch »Basis« genannt wird: Jeder Vektor ist *eindeutig* als eine Linearkombination der Basisvektoren darstellbar.

Zwei lineare Räume $V$ und $W$ sind *isomorph*, falls es eine *bijektive* lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt.

**Satz 5.49:**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler linearer Raum über einem Körper $\mathbb{F}$.

1. Ist $B \subseteq V$ eine Basis von $V$, so lässt sich jeder Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ auf *genau eine* Weise als eine Linearkombination der Vektoren aus $B$ darstellen.
2. Ist $\dim V = n$, so ist $V$ zu dem Vektorraum $\mathbb{F}^n$ isomorph.

Insbesondere gilt: Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit $q$ Elementen, so besteht jeder Vektorraum $V \subseteq \mathbb{F}^m$ der Dimension $n$ $(n \leq m)$ aus genau $|V| = q^n$ Vektoren.

**Beweis:**

Zu (1): Sei $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ mit $n = \dim V$ eine Basis von $V$ und sei $\boldsymbol{x} \in V$. Den Vektor $\boldsymbol{x}$ kann man wegen $V = \operatorname{span}(B)$ als eine Linearkombination $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ der Basisvektoren darstellen. Um zu zeigen, dass diese Darstellung auch eindeutig ist, sei $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v}_i$ eine beliebige Darstellung von $\boldsymbol{x}$. Dann gilt

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \boldsymbol{v}_i \,.$$

Nun ist $B$ als Basis linear unabhängig, also muss $a_i = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gelten.