Für die Fakultäten reichen oft die folgenden Abschätzungen völlig aus:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! \leq n^n$$

In Abschnitt 8.1 werden wir die etwas besseren Abschätzungen

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

beweisen. Die beste bekannte Abschätzung ist durch die berühmte *Stirling-Formel*[4] gegeben:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{1/12n}\,. \tag{3.3}$$

Beispiel 3.15: Ist Kombinatorik nur etwas für Kinder?

Die bisher betrachteten Aussagen könnten den Eindruck erwecken, dass die Kombinatorik eine »Freizeitmathematik« ist: Gehe einfach alle Möglichkeiten durch und zähle dabei. Wie das folgende Beispiel zeigt, trügt der Schein: In einigen, einfach aussehenden kombinatorischen Problemen können auch sehr schwierige mathematische Fragen versteckt sein!

Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ unendlich viele Lösungen hat: Jedes rechteckige Dreieck mit Seitenlängen $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ und $z = a^2 + b^2$ für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ gibt uns eine Lösung.

Der berühmte Fermat'sche Satz wurde im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat formuliert, aber erst 1994 von Wiles und Taylor bewiesen. Er besagt, dass die n-te Potenz einer Zahl, wenn $n > 2$ ist, nicht als Summe zweier Potenzen des gleichen Grades dargestellt werden kann; gemeint sind ganze Zahlen in $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ und natürliche Potenzen. Formaler gesagt bedeutet dies: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ besitzt für ganzzahlige $x, y, z \neq 0$ und natürliche Zahlen $n > 2$ keine Lösungen. Erstaunlich ist dieser Satz, weil es für $n = 2$ unendlich viele Lösungen der Gleichung gibt, und weil Fermat sogleich behauptet hatte, er wisse einen Beweis, den er allerdings nicht mitteilte und den Mathematiker bisher nicht wiederfinden konnten. Der mehr als 350 Jahre später gefundene Beweis verwendet Mittel, die Fermat keinesfalls zur Verfügung gestanden haben.

Andererseits, ist der Fermat'sche Satz zu der folgenden »unschuldig aussehenden«, rein kombinatorischen Aussage *äquivalent*.

Wir werfen n Bälle in Urnen. Einige Urnen sind rot, einige blau und der Rest trägt keine Farbe. Wir markieren jede Verteilung der Bälle mit $(r, b) \in \{0,1\}^2$, wobei $r = 1$ genau dann, wenn mindestens eine rote Urne getroffen wird, und $b = 1$ genau dann, wenn mindestens eine blaue Urne getroffen wird. Sei x die Anzahl der Urnen, die *nicht* rot sind (also blau oder keine Farbe), und y die Anzahl der Urnen, die *nicht* blau sind (also rot oder keine Farbe, siehe Bild 3.4). Schließlich sei z die Gesamtanzahl der Urnen.

Nach der Produktregel (Satz 3.1(4)) können wir die n Bälle in z^n verschiedenen Weisen verteilen; x^n von diesen Verteilungen treffen keine rote Urne und y^n treffen

4 James Stirling *Methodus Differentialis*, 1730.

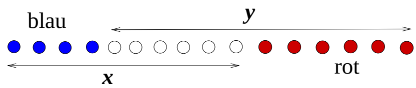

Bild 3.4: x ist die Anzahl der nicht roten und y der nicht blauen Urnen.

keine blaue. Sei A_{rb} die Anzahl der mit (r, b) markierten Verteilungen. Dann gilt: $x^n = A_{00} + A_{01}$, $y^n = A_{00} + A_{10}$ und $z^n = A_{00} + A_{01} + A_{10} + A_{11}$. Somit gilt $x^n + y^n = z^n$ genau dann, wenn $A_{00} = A_{11}$ gilt. D. h. der letzte Satz von Fermat ist genau dann falsch, wenn die folgende (kombinatorische!) Aussage richtig ist: *Man kann die Anzahl und die Färbung der Urnen so auswählen, dass es bei $n > 2$ Bällen genau so viele mit* (1,1) *markierte wie mit* (0,0) *markierte Verteilungen gibt.*

3.4 Das Taubenschlagprinzip: Beweis von $\exists x \; P(x)$

Das sogenannte *Taubenschlagprinzip* oder *Schubfachprinzip*, in der englischsprachigen Literatur auch als *Pigeonhole Principle* bezeichnet, geht auf den deutschen Mathematiker G. L. Dirichlet zurück (Peter Gustav Dirichlet Lejeune, 1805-1859). Dieses Prinzip erlaubt, Existenzaussagen $\exists x \, P(x)$ für eine endliche Menge M zu beweisen, ohne ein konkretes Element $a \in M$, für das $P(a)$ gilt, anzugeben! Das Prinzip selbst ist sehr einfach: Halten sich $r+1$ Tauben auf r Nistplätzen auf, so gibt es mindestens einen Nistplatz, in dem sich wenigstens zwei Tauben befinden.

Ist das Verhältnis von Nistplätzen zu Tauben nicht nur $k+1$ zu k sondern zum Beispiel $2k+1$ zu k, so kann man sogar schließen, dass auf einem der Nistplätze mindestens 3 Tauben sitzen müssen.

Satz 3.16: Taubenschlagprinzip
Halten sich $sr + 1$ Tauben auf r Nistplätzen auf, so gibt es mindestens einen Nistplatz, auf dem sich wenigstens $s+1$ Tauben befinden.

Wäre das nämlich nicht der Fall, so hätten wir höchstens sr Tauben insgesamt. Das Taubenschlagprinzip kann man auch anders formulieren. Seien A und B zwei nicht-leere endliche Mengen und sei $f : A \to B$ eine Abbildung. (Elemente von A sind die Tauben und Elemente von B sind die Nistplätze.) Dann muss es ein Element $b \in B$ geben mit

$$|f^{-1}(b)| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil .$$

Beispiel 3.17:
In einer Gruppe von 8 Leuten haben (mindestens) zwei am gleichen Wochentag Geburtstag. Warum? Seien die Leute »Tauben« und die Wochentage »Nistplätze«. Wir haben also $r = 7$ Nistplätze und $r+1$ Tauben. Das Taubenschlagprinzip (mit $s = 1$) garantiert in dieser Situation die Existenz eines Wochentages, an dem also mindestens $s + 1 = 2$ Leute der Gruppe Geburtstag haben.