Tabelle 3.1: $T(i,j) = 1$ genau dann, wenn j durch i teilbar ist

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1		1		1		1		1		1
3			1			1			1			1
4				1				1				1
5					1					1		
6						1						1
7							1					
8								1				

Beweis:

Wir wenden das Prinzip des doppelten Abzählens an. Dazu betrachten wir eine Tabelle T mit n Zeilen und n Spalten und mit Einträgen $T(i,j) = 1$, falls j durch i ohne Rest teilbar ist, und $T(i,j) = 0$ sonst (siehe Tabelle 3.1). Die Spalte zu j hat also genau $\tau(j)$ Einsen. Aufsummiert über alle n Spalten ergibt sich daher ingesamt $S_n = \tau(1) + \cdots + \tau(n)$ Einsen.

Wieviele Einsen enthält nun die Zeile zu i? Diese Zahl ist gleich der Anzahl der durch i teilbaren Zahlen in $\{1,2,\ldots,n\}$, d. h. ist gleich der Anzahl r der Vielfachen $i, 2i, \ldots, ri$ von i mit $ri \leq n$. Somit ist die Anzahl der Einsen in der i-ten Zeile gleich der größten *ganzen* Zahl r mit $r \leq n/i$; diese Zahl ist durch $\lfloor n/i \rfloor$ bestimmt (Gauß-Klammern). Nach dem Prinzip des doppelten Abzählens gilt also

$$\widetilde{\tau}(n) = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,.$$

Die Summe $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ auf der rechten Seite ist als »harmonische Reihe« bekannt. Die Abschätzungen $1 + \frac{1}{2}\log_2 n \leq H_n \leq 1 + \log_2 n$ haben wir bereits in Satz 2.13 mittels Induktion bewiesen. Es gelten aber auch die etwas schärferen Abschätzungen $\ln n < H_n \leq \ln n + 1$, die wir erst viel später beweisen werden (siehe Satz 10.37). Da $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ für jede reelle Zahl x gilt, können wir $\widetilde{\tau}(n)$ mittels H_n nach oben wie auch nach unten abschätzen:

$$\ln n - 1 < H_n - 1 < \widetilde{\tau}(n) \leq H_n \leq \ln n + 1\,. \qquad \square$$

Beispiel 3.7: Graphen mit verbotenen Teilgraphen

Eine typische Fragestellung in der Graphentheorie ist die folgende: Für einen festen Graphen H, wieviele Kanten kann ein H-freier Graph mit n Knoten maximal enthalten? Ein Graph G ist *H-frei*, falls H kein Teilgraph von G ist.

Man kann diese Frage auch für einen »Freundschaftsgraphen« $G = (V,E)$ stellen. Die Knoten $u \in V$ sind Personen, und eine Kante $\{u,v\} \in E$ bedeutet, dass u

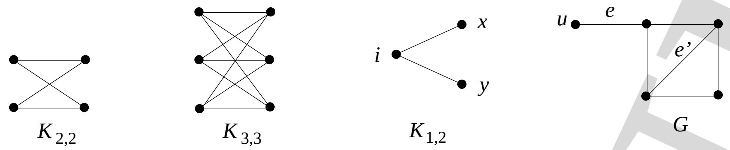

Bild 3.3: Vollständige bipartite Graphen $K_{2,2}$, $K_{3,3}$ und $K_{1,2}$. Der Graph G ist nicht $K_{2,2}$-frei: Es reicht den Knoten u und die Kanten e, e' zu entfernen, um $K_{2,2}$ zu erhalten.

mit v befreundet sind. Hat dieser Graph $n = |V|$ Knoten, so kann es maximal[1] $\binom{n}{2} = n^2/2 - n/2$ Freundschaften (Kanten) geben: Jeder ist mit jedem befreundet.

Frage 1: Wieviele Freundschaften kann es geben, wenn keine zwei befreundeten Personen *einen* gemeinsamen Freund haben? Ist K_3 ein *Dreieck*, also ein aus drei benachbarten Knoten bestehender Graph, so fragen wir, wieviel Kanten ein K_3-freier Graph enthalten kann? Die Antwort ist hier: Bis zu $n^2/4$ Kanten! Dazu reicht es einen vollständigen bipartiten Graphen $K_{r,r}$ mit $r = n/2$ zu nehmen (Bild 3.3); wir werden in Abschnitt 3.4 (Beispiel 3.23) zeigen, dass dies auch optimal ist: Kein dreiecksfreier Graph kann mehr als $n^2/4$ Kanten enthalten.

Frage 2: Wieviele Freundschaften kann es geben, wenn keine zwei (diesmal nicht unbedingt befreundeten) Personen *zwei* gemeinsame Freunde haben? Ist $K_{2,2}$ ein vollständiger bipartiter Graph auf 4 Knoten (siehe Bild 3.3 links), so fragen wir nun, wieviel Kanten ein $K_{2,2}$-freier Graph enthalten kann. Interessanterweise wird dann die maximale mögliche Anzahl der Kanten drastisch auf $n^{3/2}$ reduziert!

Satz 3.8:

Jeder $K_{2,2}$-freie ungerichtete Graph mit n Knoten kann höchstens $n^{3/2}$ Kanten enthalten.

Beweis:

Sei $G = (V, E)$ ein $K_{2,2}$-freier Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Seien $d_1, d_2, \ldots, d_n$ die Grade der Knoten in G. Wir wollen zunächst zeigen, dass dann die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2} \tag{3.1}$$

gilt. Dazu wenden wir das Prinzip des doppelten Abzählens an. Wir betrachten nämlich eine aus n Zeilen und $m = \binom{n}{2}$ Spalten bestehende Tabelle T. Wir interpretieren die Zeilen als Knoten $1, 2, \ldots, n$ und die Spalten als Knotenpaare $\{x, y\}$ mit $x \neq y$. Der Eintrag zu $(i, \{x, y\})$ ist gleich 1, falls der Knoten i mit *beiden* Knoten x und y verbunden ist, und ist sonst gleich 0. Die Anzahl $|T|$ der Einsen in der Tabelle T ist also genau die Anzahl der Teilgraphen $K_{1,2}$ in G (siehe Bild 3.3).

Wegen der $K_{2,2}$-Freiheit von G kann jede Spalte $\{x, y\}$ von T höchstens eine Eins enthalten, sonst hätten wir eine Kopie von $K_{2,2}$ in G entdeckt: Einsen in den Einträgen $(i, \{x, y\})$ und $(j, \{x, y\})$ für $i \neq j$ bedeuten ja die Anwesenheit

1 Hier bezeichnet $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$; wir werden diese Zahlen im nächsten Abschnitt genauer betrachten.

eines $K_{2,2}$-Graphen $\{i,j,x,y\}$ in G. Somit gilt $|T| \le m = \binom{n}{2}$. Andererseits, trägt jedes Paar $\{x,y\}$ der Nachbarn des Knotens i genau eine Eins in der i-ten Zeile bei. Somit gilt $|T| = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$ und die Ungleichung (3.1) ist damit bewiesen.

Da nach Beispiel 3.3 $|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$ gilt, genügt es, aus (3.1) eine obere Schranke für die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ abzuleiten. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $d_i \ge 1$ für alle $i = 1,\ldots,n$ gilt. Dann gilt auch $\binom{d_i}{2} = d_i(d_i-1)/2 \ge \frac{1}{2}(d_i-1)^2$, was zusammen mit $\binom{n}{2} \le \frac{1}{2}n^2$ und (3.1) die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)^2 \le n^2$$

liefert. Nun benutzen wir die Cauchy–Schwarz-Ungleichung[2]

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

mit $x_i = d_i - 1$ und $y_i = 1$, und erhalten

$$2|E| - n = \sum_{i=1}^{n}(d_i-1) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} \le \sqrt{n^2}\cdot\sqrt{n} = n^{3/2}$$

und somit auch $|E| \le \frac{1}{2}(n^{3/2}+n) \le n^{3/2}$. □

3.3 Binomialkoeffizienten

Sei X eine endliche Menge mit $n = |X|$ Elementen und $k \le n$. Eine *k-elementige* Teilmenge von X ist eine Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ aus k verschiedenen Elementen von X (die Ordnung hier ist unwichtig!). Die Anzahl solcher Teilmengen bezeichnet man mit $\binom{n}{k}$ und nennt diese Zahl *binomischer Koeffizient* (oder *Binomialkoeffizient*). Also ist

$$\binom{n}{k} := \text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen einer } n\text{-elementigen Menge.}$$

Beachte, dass $\binom{n}{k}$ auch die Anzahl der 0-1 Folgen der Länge n mit k Einsen ist; eine Eins bzw. eine Null an Position i sagt uns, ob das i-te Element von X gewählt bzw. nicht gewählt wird. Eine andere wichtige Beobachtung ist, dass jede k-elementige Teilmenge $A \subseteq X$ eindeutig durch ihr Komplement, also die $(n-k)$-elementige Teilmenge $X \setminus A$, bestimmt ist. Somit ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge gleich der Anzahl der $(n-k)$-elementigen Teilmengen derselben Menge. Daraus

2 Wir werden diese Ungleichung erst später beweisen (siehe Satz 6.16 in Abschnitt 6.5).