

Schulstoff

In diesem Abschnitt erinnern wir uns kurz einiger Begriffe, Notationen und Fakten, von denen die meisten bereits aus der Schule bekannt sind.

Zahlenmengen

In der Mathematik arbeitet man hauptsächlich mit den folgenden Zahlenmengen.

1. Die ersten n natürlichen Zahlen $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ohne Null.
2. Alle natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Man kann jede natürliche Zahl dadurch erhalten, dass man, beginnend mit der 0, wiederholt 1 addiert. Die wichtigste Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist, dass es in *jeder* Teilmenge von \mathbb{N} eine einzige kleinste Zahl gibt.
3. Natürliche Zahlen ohne Null $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$.
4. Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
5. Rationale Zahlen (Brüche) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$. Das sind die Zahlen, die sich als *endliche* oder unendliche aber *periodische* Dezimalzahlen mit der Periodenlänge $< b$ darstellen lassen, zum Beispiel

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{7} = 0, \overbrace{142857}^{\text{Periode}} 142857142857 \dots$$

6. Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{a, b_1 b_2, \dots : a \in \mathbb{Z}, 0 \leq b_i \leq 9\}$. Das sind die Zahlen, die sich als unendliche, nicht unbedingt periodische Dezimalzahlen darstellen lassen.
7. Komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Solche Zahlen schreibt man normalerweise als Summen $a + ib$, wobei i eine imaginäre »Zahl« mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ ist. Komplexe Zahlen werden wir in Abschnitt 5.5 genauer betrachten.

Diese (so verschiedenen) Zahlenmengen sind aus dem Wunsch entstanden, immer kompliziertere Gleichungen zu lösen (siehe Tabelle 0.1). Die ersten drei Mengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sind im Wesentlichen »gleichmächtig«: Man kann jeder Zahl aus \mathbb{Q} eine eindeutige natürliche Zahl zuordnen. Die Mengen \mathbb{R} und \mathbb{C} sind aber bereits »echt größer«; das werden wir in Abschnitt 1.4 besprechen.

Rechnen mit reellen Zahlen

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von zwei reellen Zahlen ist wieder eine reelle Zahl. Ausnahme: Division durch 0 ist nicht erlaubt! Zwei beliebige reelle Zahlen x und y lassen sich vergleichen, d. h. es gilt entweder $x < y$ oder $x = y$ (dies bezeichnet man als $x \leq y$) oder $x > y$. Vorsicht: Aus $x \cdot y < z$ folgt $x < z/y$ im Allgemeinen nicht! Dies gilt nur wenn y positiv ist.

Tabelle 0.1: Vergleich der Zahlenmengen

| Gleichung | Nicht lösbar in | Lösbar in | Lösung |
|---------------|-----------------|--------------|---------------------|
| $x + 1 = 0$ | \mathbb{N} | \mathbb{Z} | $x = -1$ |
| $2x - 1 = 0$ | \mathbb{Z} | \mathbb{Q} | $x = \frac{1}{2}$ |
| $x^2 - 2 = 0$ | \mathbb{Q} | \mathbb{R} | $x = \sqrt{2}$ |
| $x^2 + 1 = 0$ | \mathbb{R} | \mathbb{C} | $x = \sqrt{-1} = i$ |

Archimedisches Prinzip

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Intervalle

Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ bezeichnet man die zwischen a und b liegende Zahlen mit $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$, $(a, b) = \{x: a < x < b\}$, usw.

Betrag

Es gilt $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$. Anschauliche Bedeutung: Abstand zwischen 0 und x auf der Zahlengeraden. Es gilt: $|x| \geq 0$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $|x/y| = |x|/|y|$ für $y \neq 0$ und $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung). Häufige Form: $|y - x| =$ Abstand zwischen x und y auf der Zahlengeraden.

Gauß-Klammern $\lfloor x \rfloor$ und $\lceil x \rceil$

Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lfloor x \rfloor := \max\{b \in \mathbb{Z}: b \leq x\}$$

Abrunden

$$\lceil x \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z}: x \leq a\}$$

Aufrunden.

Eigenschaften:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1, \quad \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil \quad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $2^{m-1} \leq n < 2^m$. Dann besteht die binäre Darstellung von n aus genau $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ Bits.

Zahl π

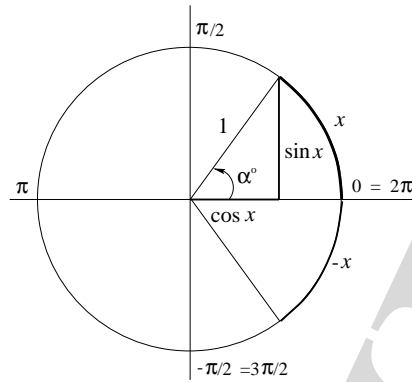
Eine besondere Rolle spielt die sogenannte »Zahl π «, die den Umfang (die Länge) eines Kreises mit Durchmesser 1 angibt. Allgemein gilt

$$\pi = \frac{\text{Umfang des Kreises}}{\text{Durchmesser des Kreises}} = 3,141592653589\dots$$

Betrachtet man den Einheitskreis, d. h. den Kreis vom Radius 1, so ist 2π genau der ganze Umfang dieses Kreises (siehe Bild 0.1) und $\pi/2$ ist genau ein Viertel dieses Umfangs.

Sinus und Kosinus

Das Bogenmaß eines Winkels α° ist die Länge x des Bogens, den der Winkel aus dem Einheitskreis (d. h. Kreis mit Radius 1) ausschneidet. Dem Vollwinkel 360° entspricht der

Bild 0.1: Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$.

Umfang 2π des Einheitskreises; dies liefert die Umrechnungsformel

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}.$$

Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind im Bild 0.1 veranschaulicht. Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen zusammen (dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl):

$$\begin{aligned} \sin 0 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0; & \sin \frac{\pi}{2} &= \cos 0 = 1; \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x; & \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x; \\ \cos(-x) &= \cos x; & & \\ \sin(-x) &= -\sin x; & & \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x; & & \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y; & & \\ \sin(x \pm y) &= \cos x \cdot \sin y \pm \sin x \cdot \cos y; & & \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x; & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x; \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{aligned}$$

Symmetrie

Antisymmetrie

Satz von Pythagoras

Additionstheoreme

Euler'sche Formeln

Einige Werte von $\sin x$ und $\cos x$ sind in Tabelle 0.2 aufgelistet.

Potenzen und Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ wird definiert: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n mal) mit $a^0 = 1$. Negative Potenzen von $a \neq 0$ sind durch $a^{-n} = 1/a^n$ definiert.

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es genau eine *nicht-negative* reelle Zahl, die hoch n

Tabelle 0.2: Zum Beispiel für $x = \frac{\pi}{4}$ ist $\sin x = \sin(-x + \frac{\pi}{2}) = \cos(-x) = \cos x$ und der Satz von Pythagoras liefert uns $\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

genommen a ergibt. Diese Zahl wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet, d. h.

$$\sqrt[n]{a} = x \text{ gilt genau dann, wenn } x \geq 0 \text{ und } x^n = a \text{ gilt.}$$

Für ungerades n und $a < 0$ ist auch $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ definiert. Für alle $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ausdrücke definiert sind, gilt

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \quad a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p; \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p; \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}.$$

Die Rechenregeln für Wurzeln ergeben sich aus diesen Regeln durch den Übergang von $\sqrt[n]{a}$ zu $a^{1/n}$. Exponent und entsprechende Wurzel heben sich auf; d. h. es gilt $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$ für alle $x \geq 0$.

⚠ Vorsicht bei negativem x : Es gilt z. B. $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2} = x$ gilt nur, wenn $x \geq 0$.

Lineare und quadratische Gleichungen

Die Lösung für $ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist $x = -\frac{b}{a}$. Um die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ zu lösen, schreibt man sie zuerst um in $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ und stellt die linke Seite als Quadrat dar

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logarithmen

In der Gleichung $a^x = r$ sind a (Basis, $a > 0$, $a \neq 1$) und r (Numerus, $r > 0$) gegeben. Gesucht ist die Zahl x . Diese Zahl heißt *Logarithmus* von r zur Basis a . Schreibweise: $x = \log_a r$. Den Logarithmus $\log_e r$ zur Basis $e = 2,7182818\dots$ (Euler'sche Zahl) bezeichnet man als $\ln r$. In der Informatik wird am meisten der Logarithmus $\log_2 r$ zur Basis 2 benutzt.

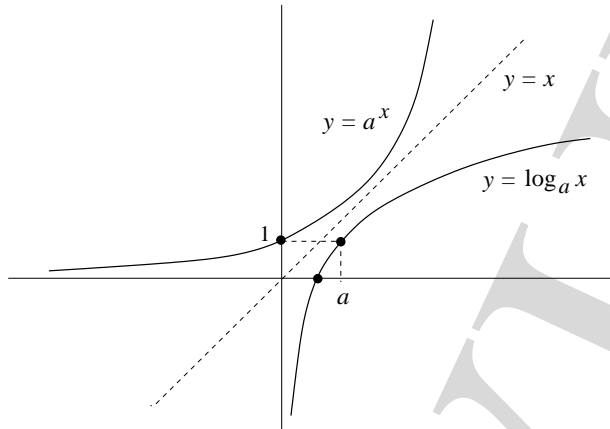


Bild 0.2: Exponent und Logarithmus.

Die Rechenregeln mit Logarithmen sind im folgenden Satz zusammengefasst; hier sind $a, b, r, s > 1$ beliebige reelle Zahlen.

Satz 0.1: Eigenschaften der Logarithmusfunktion

- (a) $a^{\log_a r} = r$ und $\log_a a^r = r$;
- (b) $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$ und $\log_a(r/s) = \log_a r - \log_a s$;
- (c) $\log_a r = (\log_b r)/(\log_b a)$ (Basisvertauschregel);
- (d) $\log_a(r^s) = s \cdot \log_a r$, also $r^s = a^{s \log_a r}$;
- (e) $(\log_a r) \cdot (\log_r a) = 1$;
- (f) $s^{\log_a r} = r^{\log_a s}$.

Beweis:

- (a) folgt aus der Definition.
- (b) $a^{\log_a r + \log_a s} = a^{\log_a r} \cdot a^{\log_a s} \stackrel{(a)}{=} r \cdot s$.
- (c) Aus $r \stackrel{(a)}{=} a^{\log_a r} \stackrel{(a)}{=} (b^{\log_b a})^{\log_a r} = b^{(\log_b a) \cdot (\log_a r)}$ folgt $\log_b r = (\log_b a) \cdot (\log_a r)$ durch Logarithmieren zur Basis b .
- (d) $a^{s \cdot \log_a r} = (a^{\log_a r})^s \stackrel{(a)}{=} r^s \stackrel{(a)}{=} a^{\log_a r^s}$.
- (e) $(\log_a r) \cdot (\log_r a) \stackrel{(c)}{=} \frac{\log_r r}{\log_r a} \cdot \log_r a = \log_r r = 1$.
- (f) $s^{\log_a r} \stackrel{(c)}{=} s^{(\log_b r)/(\log_b a)} = (s^{\log_b r})^{1/\log_b a} \stackrel{(a)}{=} r^{1/\log_b a} \stackrel{(e)}{=} r^{\log_a s}$. □

Einige Bezeichnungen

Zur Abkürzung längerer Summen vereinbart man

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Zum Beispiel kürzt man $1 + 2 + 3 + \dots + n$ als $\sum_{i=1}^n i$ ab. Dazu müssen die Summanden mit einer Nummer (*Index*) versehen sein. Der Name des Indizes spielt keine Rolle:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j.$$

Ist a_0, a_1, \dots eine Folge von Zahlen und $I \subseteq \{0, 1, \dots\}$ eine endliche Teilmenge der Indizes, so ist

$$\sum_{i \in I} a_i$$

die Summe aller Zahlen a_i mit $i \in I$. Analog vereinbart man

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n.$$

als Abkürzung für das Produkt. So ist zum Beispiel

$$\prod_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Ist A eine endliche Menge, so kann man die Anzahl $|A|$ der Elemente in A auch so ausdrücken:

$$|A| = \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{|A| \text{ mal}} = \sum_{a \in A} 1.$$

Man betrachtet auch Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} := \left(\sum_{j=1}^m a_{1j} \right) + \left(\sum_{j=1}^m a_{2j} \right) + \dots + \left(\sum_{j=1}^m a_{nj} \right).$$

Mit den durch ein Summenzeichen ausgedrückten (endlichen!) Summen wird genauso gerechnet wie mit "normalen" Summen auch. So kann man zum Beispiel die Reihenfolge der Summen vertauschen (eine solche Umformung nennt man auch das *Prinzip des doppelten Abzählens*):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Die Schreibweise $\gg X := Y \ll$ bedeutet » X ist als Y definiert«, d. h. die linke Seite (X) ist eine Bezeichnung für die rechte Seite (Y). Im Unterschied dazu bedeutet $\gg X = Y \ll$ die Aussage » X ist gleich Y «.

Sind A und B zwei Aussagen, so schreibt man oft $A \iff B$, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Die Worte »genau dann, wenn«

kürzt man oft durch »g. d. w.«. Die Abkürzung »o. B. d. A.« bedeutet »ohne Beschränkung der Allgemeinheit«; diese Abkürzung sollte man mit großer Vorsicht benutzen: Es muss klar sein, dass ein Spezialfall auch wirklich den allgemeinen Fall widerspiegelt. Die Abkürzung »i. A.« steht für »im Allgemeinen«.

Mathematische Symbole

Zur Bezeichnung verschiedener mathematischer Objekte benutzt man in der Mathematik gerne griechische Symbole:

| Name | Symbol | Name | Symbol | Name | Symbol |
|---------|------------------|---------|--------------------|---------|------------------|
| alpha | A, α | iota | I, ι | rho | P, ρ |
| beta | B, β | kappa | K, κ | sigma | Σ, σ |
| gamma | Γ, γ | lambda | Λ, λ | tau | T, τ |
| delta | Δ, δ | my | M, μ | ypsilon | Y, ν |
| epsilon | E, ϵ | ny | N, ν | phi | Φ, ϕ |
| zeta | Z, ζ | xi | Ξ, ξ | chi | X, χ |
| eta | H, η | omikron | O, o | psi | Ψ, ψ |
| theta | Θ, θ | pi | Π, π | omega | Ω, ω |

Aussagen in der Mathematik haben verschiedene Namen: »Satz« oder »Theorem«, »Lemma«, »Behauptung«, »Korollar« usw. Die Vergabe dieser Namen hängt meistens von dem Geschmack des Autors ab. Eine vage Merkregel ist die folgende:

- *Satz* oder *Theorem* ist eine wichtige autonome Aussage.
- *Lemma* ist eine Aussage »für Unterwegs«: Eine Aussage, die zur Ableitung anderer Aussagen benutzt wird.
- *Behauptung* (engl. »claim«) ist eine Aussage »für Kinder«: Eine relativ leicht beweisbare Aussage.
- *Korollar* ist eine Aussage, die man »fast umsonst« kriegt: Eine unmittelbare Folgerung aus einem Satz.

Satz 0.2: Bedeutung der »grauen Kästen«

Einige Aussagen sind in »grauen Kästen« gesetzt. Das sind die Hauptsätze, die man auf jeden Fall wissen sollte.

⚠ Diese Markierung werden wir für Bemerkungen benutzen. In den meisten Fällen wird so auf mögliche Gefahren im Umgang mit den gerade betrachteten Konzepten oder auf einige nützliche Merkregeln hingewiesen.

Worum geht es in der Mathematik? Es geht um die *Beweise* und um das *Beweisen*. Pythagoras war der erste Mann überhaupt, der darauf bestanden hat, dass alle mathematische Aussagen auch bewiesen sein sollten. Er hat auch erstmals die Worte »Mathematik« und »Theorem« eingeführt. Das Wort »Beweis« mag am Anfang ziemlich abschreckend klingen. Das ist jedoch völlig unbegründet, denn letztendlich bedeutet »einen Beweis zu führen« nichts Anderes, als dass wir darauf achten, klare (und richtige) Aussagen zu machen, die wir logisch aufeinander aufbauen. Ein »Beweis« ist also eine logisch korrekte Argumentation, die sowohl den Autor der Aussage wie auch die Leser überzeugt. Anders als manche Studienanfänger denken, ist die Fähigkeit, einen Beweis zu führen, auch für einen Informatiker unverzichtbar. Auch ein Anbieter muss letztendlich seinen Kunden überzeugen, dass sein Algorithmus das tut, was er tun soll (Beweis der Korrektheit), und

dieses auch schnell genug tut (asymptotische Analyse der Laufzeit). Die Informatik ist nicht das Programmieren und auch gar nicht die Beherrschung der Microsoft-Pakete – sie ist eine Wissenschaft über die Algorithmen und ihre Möglichkeiten. Die Reihenfolge ist also: Mathematische Idee (Beweis, dass das gesuchte Objekt tatsächlich existiert) \mapsto algorithmische Idee (Entwurf des Algorithmus) \mapsto Programmieren. In diesem Buch werden wir die wichtigsten »Tips und Tricks« für die zwei ersten Schritte kennenlernen.

Das Zeichen \square steht für die Beweisende; in manchen Büchern benutzt man dafür die Bezeichnung »Q. E. D.«, was »quod erat demonstrandum« bedeutet.

Schließlich erwähnen wir einige besonders nützliche Gleichungen und Ungleichungen (später werden wir sie auch alle beweisen):

$$1 + x \leq e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$1 + x \geq e^{x/(1+x)} \quad x \in (-1, 1)$$

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \quad x > 0$$

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad \text{Jensen-Ungleichung, } f''(x) \geq 0$$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad x_i \geq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \quad \text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{arithmetische Reihe}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{geometrische Reihe, } x \neq 1$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x} \quad |x| < 1$$

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \quad |x| < 1$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma_n \quad \text{harmonische Reihe, } \frac{1}{2} < \gamma_n < \frac{2}{3}.$$