

## 6. Nestacionarioji sklaidos teorija.

### Vienmatis uždavinys

Ankstesnėse paskaitose nagrinėta stacionarioji sklaidos teorija pagrįsta intuityviom priešlaidom ir nėra laisva nuo vidinių prieštaravimų. Stacionarioje sklaidos teorijoje į sklaidos centrą skriejančių dalelių aprašymas plokščia banga prieštarauja kvantinei mechanikai, nes joje tiktais kvadratiškai integruojamos (banginės funkcijos kvadrato integralas turi būti baigtinis) funkcijos aprašo realią fizikinę būseną. Plokščios bangos tokios nėra. Iškraipytos bangos  $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$  taip pat nėra kvadratiškai integruojamos.

Pasirodo, kad sklaidos uždavinį suformulavus kaip nestacionarų, skaičiavimo metodus, surutus stacionarioje sklaidos teorijoje, galima griežtai pagrįsti, t.y. parodyti, kad jie teisingi.

Nestacionarioje sklaidos teorijoje dalelių sklaida nagrinėjama kaip bangų paketų sklidimas. Pradėsime nuo paprastesnio uždavinio nei buvo nagrinėta antroje paskaitoje. Panagrinėsime vienmačio judėjimo uždavinį. Tegul dalelių, kurių masė  $\mu$  ir judėjimo kiekis  $k$ , srautas juda išilgai  $x$  ašies ir savo kelyje sutinka stačiakampį barjerą. Surasime dalelių praėjimo ir atspindžio koeficientus  $T(k)$  ir  $R(k) = 1 - T(k)$ . Dažnai šis uždavinys laikomas vienu paprasčiausiu kvantinėje mechanikoje dėl matematinio paprastumo, kai naudojama stacionari teorija (Bandzaitis ir Grabauskas, p. 95). Ištikrujų taip ir yra, jeigu dalelės, skriejančios į barjerą aprašomos plokščia banga

$$\phi_0(x) = e^{ikx}. \quad (1)$$

Tuomet stacionariosios Šredingerio lygties sprendinys yra šitoks:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} e^{ikx} + C_1 e^{-ikx}, & x < 0, \\ C_2 e^{\kappa x} + C_3 e^{-\kappa x}, & 0 \leq x \leq a, \\ C_4 e^{ikx}, & x > a. \end{cases} \quad (2)$$

Čia  $k$  ir  $\kappa$  susiję su dalelių kinetine energija dydžiai:

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}; \quad \kappa = \frac{\sqrt{2\mu(E - V_0)}}{\hbar}. \quad (3)$$

(2) lygtis užrašyta  $E < V_0$  atvejui, todėl  $\kappa$  yra menamas dydis. Koeficientas  $C_1$  aprašo atspindėtos, o  $C_4$  – praėjusios bangos intensyvumus:

$$R = |C_1|^2; \quad T = |C_4|^2. \quad (4)$$

Koeficientų  $C_1, C_2, C_3$  ir  $C_4$  reikšmės surandamos iš banginės funkcijos ir jos išvestinės reikšmių lygybės ant barjero ribų (vadinama funkcijų susiuvimu, nes visoje srityje  $-\infty < x < +\infty$

funkcija negali turėti trūkių). Praleidžiame visus išvedimus ir užrašome praėjimo tikimybę (žr. A.Bandzaičio ir D.Grabausko "Kvantinės mechanikos" vadovėlio 107-108 puslapius ir (5.59) formulę):

$$T = 1 - R = \frac{4k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2 \operatorname{sh}^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}. \quad (5)$$

Šis nagrinėjimas labai panašus į antroje paskaitoje nagrinėtą stacionarų sklaidos uždavinį. Dabar eisime kitu keliu ir surasime tas pačias formules (4) ir (5). Pradiniu laiko momentu  $t = 0$  dalelės būseną aprašysime bangų paketu:

$$\psi(x, t = 0) = \Phi(x) = e^{ikx} \chi(x - x_0), \quad (6)$$

kur  $\chi(x)$  – kažkokia varpo formos funkcija su maksimumu apie tašką  $x = x_0$ . Bangų paketas aprašo dalelę, lokalizuotą apie tašką  $x = x_0$  ir judančią vidutiniu greičiu  $v_0 = \hbar k / \mu$ . Tegul  $x_0 < 0$ , o  $k > 0$ . Šiuo atveju bangų paketas juda iš kairės į dešinę, kaip parodyta 1 pav. Barjero plotis yra  $a$ . Srityje iki barjero bangų paketas juda laisvai. Toks judėjimas trunka  $t_0 = |x_0| / v_0$  laiko. Žinoma, kad laisvai judantis bangų paketas per laiką  $t_0$  išplinta, ir tuo labiau, kuo didesnis jo judėjimo kiekio  $p$  neapibrėžtumas  $\Delta p$  ( $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$ ) arba kuo mažesnis jo koordinatės  $x_0$  neapibrėžtumas. Išplitimo didumas aprašomas dispersija, kuri parodo nuokrypi nuo vidutinės vertės. Taigi Gauso formos

$$\chi(x - x_0) = \frac{1}{b^{1/2}\pi^{1/4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2b^2}} \quad (7)$$

paketo, kurio plotis pusėje aukščio yra  $b$ , koordinatės pradinė dispersija  $D_x(t = 0) = b^2/2$  padvigubėja per laiką

$$\tau = \mu b^2 / \hbar. \quad (8)$$

Toliau paprastumo dėlei naudosimės prielaida, kad dalelės erdvino pasiskirstymo (6) dispersija yra tiek didelė, jog į paketo išplitimą per laiką  $t_0$  galima nekreipti dėmesio ( $b \ll k$ ). Gauso formos bangų paketui tai reiškia, kad

$$b^2 \gg x_0/k. \quad (9)$$

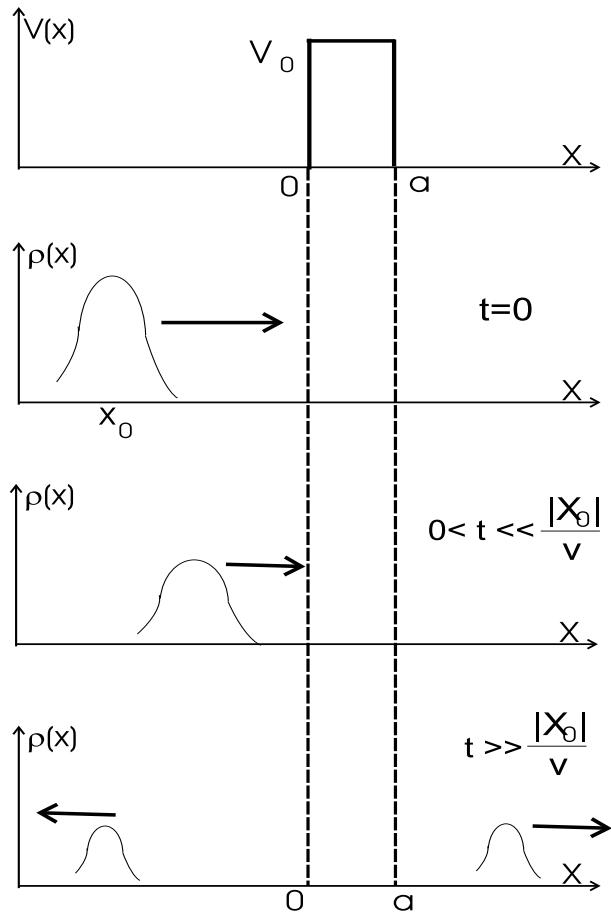
Tą pačią nelygybę naudinga parašyti ir dalelės judėjimo kiekio dispersijai:

$$D_p = 1/2b^2 \ll k/2x_0. \quad (10)$$

Skirtingai nuo koordinatės dispersijos judėjimo kiekio dispersija nesikeičia, kai dalelė juda laisvai.

Patogiau naudoti dalelės banginės funkcijos (6) Furje atvaizdą:

$$\chi(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa A(\kappa) e^{i\kappa(x - x_0)}. \quad (11)$$



1 pav. Bangų paketo sklaida potencijalo barjero. Vienmatis uždavinys.

Palyginus (6) ir (11) formules, galima suprasti, kad varpo formos funkcija  $\chi(x - x_0)$  iš (6) formulės atitinka varpo formos funkciją  $A(\kappa)$  iš (11) formulės. Laikysime, kad laiko momentu  $t = 0$  pradiniai paketo matmenys daug mažesni už atstumą tarp paketo svorio centro  $x_0$  ir barjero  $x = a$ . Kartu su (9) salyga tai reiškia, kad  $A(\kappa)$  iš (11) pasiskirstymo plotis daug mažesnis už dalelės vidutinį judėjimo kieki  $k$ .

Sklaidos uždavinio sprendimo tikslas – surasti sklaidos banginę funkciją, kuri yra nuo laiko prikausančios Šredingerio lygties

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t) \quad (12)$$

sprendinys, patenkinantis (6) pradine sąlygą. Iš kvantinės mechanikos žinome, kad (12) lygties bendraji sprendinj galime užrašyti stacionariosios Šredingerio lygties

$$\hat{H}\psi_k(x) = E_k\psi_k(x) \quad (13)$$

sprendinių superpozicija. Parodysime, kad mums reikalingas (12) lygties sprendinys, tenkinantis

(6) pradinę sąlygą, gali būti parinktas šitoks:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' A(k' - k) e^{-i(k'-k)x_0} \psi_{k'}(x) e^{-iE_{k'}t/\hbar}. \quad (14)$$

Čia  $\psi_{k'}(x)$  yra ne kas kitas, o gerai žinomas stacionariosios Šredingerio lygties (13) sprendinys (2).

Kadangi padarėme prielaidą, kad  $A(k' - k) \ll k$ , išraiškoje (14) po integralo ženklu  $E_{k'}$  galima pakeisti apytikre išraiška:

$$E_{k'} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2}{\mu} k(k' - k) = E_k + \hbar v_0(k' - k), \quad (15)$$

Čia  $v_0 = \hbar k/p$ , ir sjkleidžiame eilute apie vidutinę judėjimo kiekio verę  $k$ . Antros eilės nariai atmetami. Todėl (14) išraiška supaprastėja:

$$\psi(x, t) = e^{-iE_k t/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dk' A(k' - k) e^{-i(k'-k)(x_0 + v_0 t)} \psi_{k'}(x). \quad (16)$$

Irašysime (2) į (16) išraišką su koeficientais  $C_1, C_2, C_3$  ir  $C_4$ , surastais iš funkcijų susiuvimo ant potencialo barjero ribų. Tuomet srityse iš kairės ir dešinės nuo barjero banginė funkcija turi šitokias išraiškas:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) \Big|_{x < 0} &= e^{ikx} e^{-iE_k t/\hbar} \chi(x - (x_0 + v_0 t)) + C_1 e^{-ikx} e^{-iE_k t/\hbar} \chi(-x - (x_0 + v_0 t)), \\ \psi(x, t) \Big|_{x > a} &= C_4 e^{ikx} e^{-iE_k t/\hbar} \chi(x - (x_0 + v_0 t)). \end{aligned} \quad (17)$$

Kai  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x, t = 0) \Big|_{x < 0} &= e^{ikx} \chi(x - x_0) + C_1 e^{-ikx} \chi(-x - x_0), \\ \psi(x, t = 0) \Big|_{x > a} &= C_4 e^{ikx} \chi(x - x_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Dabar reikia prisiminti, kad  $\chi(x)$  pasiskirstymo plotis daug mažesnis už  $x_0$ . Tai reiškia, kad laiko momentu  $t = 0$  į sritį  $x < 0$  patenka funkcijos  $\chi(-x - x_0)$  tiktais uodega. Lygiai taip pat į sritį  $x > 0$  patenka funkcijos  $\chi(x - x_0)$  uodega. Jeigu į šias uodegas nekreipsime dėmesio ir atsižvelgsime į  $\chi(x)$  specifines savybes, pamatysime, kad (18) išraiška ekvivalentiška (6) sąlygai visoje  $-\infty < x < +\infty$  srityje.

Taigi parodėme, kad (14) pavidalo banginė funkcija  $\psi(x, t)$  tenkina ir nestacionariają Šredingerio lygtį (12) ir pradinę sąlygą (6), kas reiškia, kad ji yra mūsų nagrinėjamo uždavinio sprendinys.

Panagrinėkime šio sprendinio fizikinę prasmę. Tam tikslui patogu pasinaudoti (17) išraiška. Srityje  $x < 0$ , kai  $t < |x_0|/v_0$ , svarbus tiktais pirmasis sumos narys, aprašantis dalelės judėjimą iš

kairės į dešinę, o  $t > |x_0|/v_0$  atveju – tiktais antrasis narys, aprašantis dalelės judėjimą priešinga kryptimi, t.y. iš dešinės į kairę. Iš sritij  $x > 0$  dalelė su pastebima tikimybe prasiskverbia tiktais tuo atveju, kai  $t > |x_0|/v_0$  ir toliau visą laiką juda į dešinę, toldama nuo barjero. Visi šie rezultatai pavaizduoti 1 pav., kuriami pavaizduotas dalelės koordinatės tankio pasiskirstymas  $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  į vairiaus laiko momentais. Rodyklės rodo dalelės judėjimo kryptį.

Dalelės perėjimo per barjerą koeficientas yra lygus tikimybei rasti dalelę srityje  $x > a$  laiko momentu  $t \gg t_0$ :

$$T = W(x > a) = \int_a^\infty |\psi(x, t)|^2 dx = C_4 \int_a^\infty |\chi(x - (x_0 + v_0 t))|^2 dx = |C_4|^2. \quad (19)$$

Analogiškai apskaičiuojamas ir atspindžio koeficientas:

$$R = W(x < a) = \int_{-\infty}^0 |\psi(x, t)|^2 dx = C_1 \int_{-\infty}^a |\chi(-x - (x_0 + v_0 t))|^2 dx = |C_1|^2. \quad (20)$$

Gavome, kad (19) ir (20) formulės yra tokios pat, kaip ir stacionariosios teorijos atveju (4) išraiškos. Reikia pastebėti, kad funkcijai  $\psi_k(x)$ , kuri nestacionarioje teorijoje surandama tam, kad būtų galima apskaičiuoti dalelės praėjimo ir atspindžio koeficientus, galima nesuteikti jokios fizikinės prasmės. Ji taip pat nėra kvadratiškai integruojama ir neaprašo jokių realių būsenų.

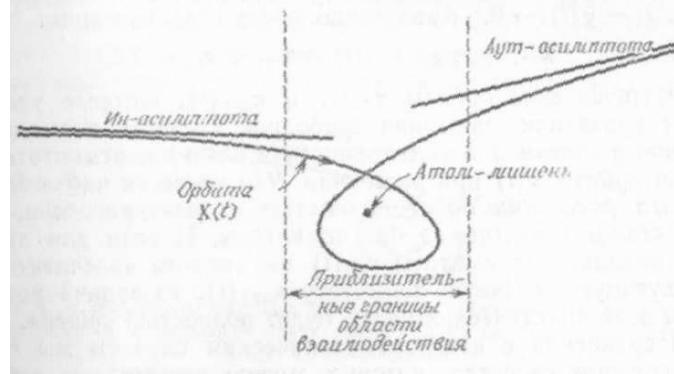
### **Trimatis uždavinys. Asimptotinės būsenos. Sklaidos operatorius.**

Stacionarioje teorijoje buvo nagrinėjamas pastovus vienalytis dalelių, kurių greitis gerai žinomas, srautas išsklaidymas nejudančiu jėgos centru. Tikslas – žinant dalelės sąveikos su centru dėsnį, surasti diferencialinį skerspjūvį. Prisiminkime, kaip sklaidos uždavinys sprendžiamas klasikinėje mechanikoje. Ten pasinaudojant judėjimo lygtimis, nustatoma dalelės judėjimo trajektorija ir pagal jos asimptotiką surandamas sąryšis tarp prisitaikymo parametru  $b$  ir sklaidos kampo  $\rho = \rho(\theta)$ . Paskui pagal šį santykį apskaičiuojamas diferencialinis sklaidos skerspjūvis:

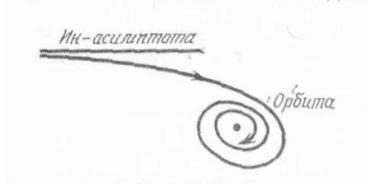
$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\Omega} \right| d\Omega. \quad (21)$$

Kvantinėje mechanikoje nėra dalelės trajektorijos sąvokos. Dalelė niekada nebūna tiksliai lokalizuota erdvėje ir neturi apibrėžto judėjimo kiekio. Ankstesniame skyriuje matėme, kad dalelės judėjimas erdvėje tėra bangų paketo evoliucija. Išivaizduokime bangų paketą, kuris pradiniu laiko momentu yra pakankamai toli nuo jėgos centro ir juda su vidutiniu judėjimo kiekiu  $\mathbf{p}_0$  link jėgos centro. Laikui bėgant bangų paketas plėsdamasis pasiekia jėgos centrą ir visu savo tūriu įeina į sąveikos sritį, kurioje daugiau ar mažiau deformuojaasi, po to palieka sąveikos sritį plačiu nesimetrišku debeseliu. Išsklaidytos dalelės patekimo į detektorių, esantį kažkur toli

nuo jégos centro, tikimybé proporcinga tikimybés tankiui rasti dalelę atitinkamame detektoriaus taške. Bendrais bruožais šis vaizdas nesiskiria nuo vienmačio bangų paketo judėjimo. Tačiau trimačiu atveju pasekti paketo evoliuciją laike, naudojant panašias į vienmačio uždavinio formule, techniškai labai sunku. Todél teks naudotis ypatingą matematinį aparata ir daug naujų savyokų.



2 pav. Tipiška sklaidos orbita.



3 pav. Pakankamai stipriems traukos potencialams iš begalybés atlekianti dalelė gali būti pagauta į spiralinę orbitą ir niekada neišsilaisvinti.

Tegul laiko momentu  $t = 0$  dalelės būsena aprašoma kvadratiškai integruojama funkcija  $\psi_0(\mathbf{r})$ . Ji kartu su hamiltonianu  $\hat{H}$  pilnai aprašo visą nenutrūkstamą seką būsenų  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , per kurias praeina bangų paketas laike prieš momentą  $t = 0$  ir po jo, kai  $t > 0$ . Kartais sakoma, kad funkcija  $\psi_0(\mathbf{r})$  nusako visą kvantinę "trajektoriją" arba kvantinę "orbitą", kuria juda dalelė (paketas).

Pasekti dalelės "trajektoriją" galima evoliucijos operatoriaus

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (22)$$

pagalba, kur  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$  – pilnas sistemos hamiltonianas, o funkcija randama šitaip:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{U}(t)\psi_0(\mathbf{r}). \quad (23)$$

Evoliucijos operatorius tenkina unitariškumo sąlygą:

$$\hat{U}^+ \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^+ = 1, \quad (24)$$

todėl (23) funkcijos normavimas paketo evoliucijos metu nesikeičia.

Kai  $t \rightarrow -\infty$ , taip pat  $t \rightarrow +\infty$ , bangų paketo pagrindinė dalis yra toli už jėgos veikiamos sritys, t.y. jis yra laisvas. Šioje srityje jo evoliuciją valdo ne hamiltonianas  $\hat{H}$ , bet laisvos dalelės hamiltonianas  $\hat{H}_0$ . Šiai sričiai įvesime atitinkamą evoliucijos operatorių:

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (25)$$

Kai  $t \rightarrow +\infty$ , nagrinėjama "trajektorija" artėja prie laisvos dalelės judėjimo, kurį galima aprašyti šia funkcija:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \Big|_{t \rightarrow +\infty} = \hat{U}_0(t) \psi_{out}(\mathbf{r}). \quad (26)$$

Analogiškai laikui  $t \rightarrow -\infty$ ,

$$\psi(\mathbf{r}, t) \Big|_{t \rightarrow -\infty} = \hat{U}_0(t) \psi_{in}(\mathbf{r}). \quad (27)$$

Būsenos  $\psi_{in}(\mathbf{r})$  ir  $\psi_{out}(\mathbf{r})$ , aprašančios dalelės "trajektorijos" (23) asimptotines (26) ir (27) savybes laiko momentu  $t \rightarrow \pm\infty$ , vadinamos **asimptotinėmis būsenomis** arba nagrinėjamos "trajektorijos" **ieinačia (in)** ir **išeinančia (out) asimptotėmis**.

Kaip ir visą "trajektoriją", dalelės asimptotes galima surasti iš bangų paketo  $\psi_0(\mathbf{r})$ . (26) ir (27) dauginame iš kairės iš  $\hat{U}_0^+$  ir ieškome atitinkamos ribos. Po to įrašome  $\psi(\mathbf{r}, t)$  išraišką vs (23) ir gauname šitokias išraiškas:

$$\psi(\mathbf{r})_{in} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{U}_0^+(t) \hat{U}(t) \psi_0(\mathbf{r}) = \hat{\Omega}_+^+ \psi_0(\mathbf{r}), \quad (28)$$

$$\psi(\mathbf{r})_{out} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{U}_0^+(t) \hat{U}(t) \psi_0(\mathbf{r}) = \hat{\Omega}_-^+ \psi_0(\mathbf{r}). \quad (29)$$

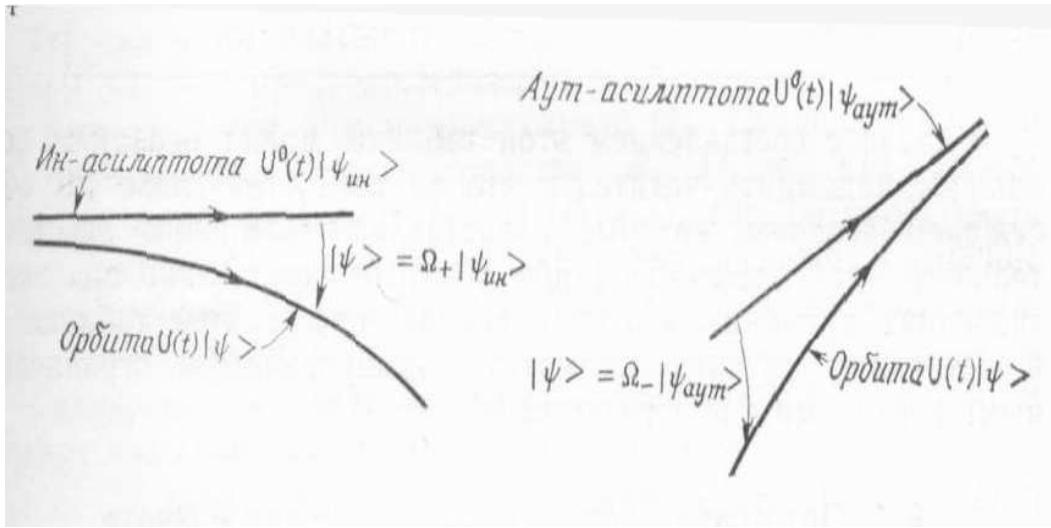
Čia įvesti du nauji operatoriai, kurie vadinami **Miolerio operatoriais**:

$$\hat{\Omega}_{\mp} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{U}^+(t) \hat{U}_0(t). \quad (30)$$

Miolerio operatorių ženklai parinkti taip, kad būtų patogiau pereiti prie stacionariosios sklaidos teorijos. Jie taip pat unitariniai. Uninariškumas sekā iš (24) išraiškos.

Naudojant Miolerio operatorius galima susieti išeinančią ir ieinančią asimptotes. Tam tikslui įrašome (30) į (28) ir (29):

$$\psi_{out}(\mathbf{r}) = \hat{\Omega}_-^+ \hat{\Omega}_+ \psi_{in}(\mathbf{r}). \quad (31)$$



4 pav. Klasikinis Miolerio operatorių įsivaizdavimas.

(31) formulę galima užrašyti kompaktiškiau, įvedant **sklaidos operatorių** arba **S operatorių**,

$$\hat{S} = \hat{\Omega}_+^\dagger \hat{\Omega}_+, \quad (32)$$

$$\psi_{out}(\mathbf{r}) = \hat{S}\psi_{in}(\mathbf{r}). \quad (33)$$

Iš Miolerio operatorių seka ir S operatoriaus unitariškumas:

$$\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{S}\hat{S}^\dagger = 1. \quad (34)$$

S operatorius ir jam atitinkanti S matrica yra vieni iš pagrindinių sklaidos teorijos sąvokų. Sklaidos eksperimente detektorius yra labai toli nuo vienos, kurioje vyksta sklaida, todėl atstumus ir laikus galima laikyti asymptotiškai dideliais. Kvintinės ir klasikinės sklaidos teorijų uždavinys – pagal įeinančios dalelės būsenos parametrus nustatyti išeinančios dalelės būsenos parametrus. Tai, kas vyksta sklaidos centre, kur asymptotė *in* pereina į asymptotę *out*, neturi praktinės reikšmės. Būtent sklaidos S operatorius ir perveda dalelę iš  $\psi_{in}(\mathbf{r})$  į  $\psi_{out}(\mathbf{r})$  būseną.

### Diferencialinis sklaidos skerspjūvis nestacionariojoje teorijoje.

Suformuluosime kvintinės mechanikos sklaidos diferencialinį skerspjūvį kiek galima panašiau į klasikinę mechanikos. Laikysime, kad žinomi dalelės kvintinės "trajektorijos" pradiniai parametrai, t.y. vidutinis prisitaikymo atstumas  $\rho_0$  ir vidutinis judėjimo kiekis  $\mathbf{p}_0$ . Tegul  $\mathbf{p}_0$  nukreiptas  $z$  ašies kryptimi. Konkretumo dėlei panagrinėsime keletą  $\psi_{in}$  paketo pavyzdžių.

Tegul turime paketą ties tašku  $\mathbf{r}=0$  koordinatiname vaizdavime:

$$\psi_{in}^{(A)}(\mathbf{r}) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{b}\right)^2} e^{ip_0 z} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{b}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b}\right)^2} e^{ip_0 z}. \quad (35)$$

Jis simetriškai pasklidęs apie tašką  $\mathbf{r}=0$  visomis kryptimis. Judėjimo kiekio vaizdavime (Bandzaitis ir Grabauskas, 63 psl.) paketas aprašomas šitokia funkcija (de Broilio banga yra tikrinė judėjimo kiekio funkcija):

$$\psi_{in}^{(A)}(\mathbf{p}) \equiv \langle \mathbf{p} | \psi_{in}^{(A)} \rangle \sim e^{-\frac{1}{2}(b\mathbf{p}_\perp)^2} e^{-\frac{1}{2}b^2(p_z - p_0)^2}. \quad (36)$$

Čia  $p_z$  ir  $\mathbf{p}_\perp$  – judėjimo kiekio išilginė ir skersinė dedamosios.

Kitas bangų paketas koordinatiname vaizdavime

$$\psi_{in}^{(B)}(\mathbf{r}) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho - \rho_0}{b}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b}\right)^2} e^{ip_0 z} \quad (37)$$

toks pat kaip ir A atvejo, tiktai jo centras paslinktas per  $\rho_0$  statmena  $z$  ašiai kryptimi. Judėjimo kiekio vaizdavime jis aprašomas šitokia funkcija:

$$\psi_{in}^{(B)}(\mathbf{p}) \equiv \langle \mathbf{p} | \psi_{in}^{(B)} \rangle \sim e^{-\frac{1}{2}(b\mathbf{p}_\perp)^2} e^{-\frac{1}{2}b^2(p_z - p_0)^2} e^{-i\mathbf{p}_\perp \rho_0}. \quad (38)$$

Jeigu  $\Phi_0(\mathbf{p})$  yra bet koks paketas, kurio svorio centras yra ant  $z$  ašies, tai

$$\langle \mathbf{p} | \psi_{in} \rangle = e^{-i\mathbf{p}_\perp \rho_0} \Phi_0(\mathbf{p}) \quad (39)$$

yra paketas, kurio svorio centras paslinktas per  $\rho_0$ , statmenai  $z$  ašiai.

Dabar galime pereiti prie bendro atvejo. Tegul žinoma dalelės pradinė būseną  $\psi_{in}$ . Tikimybė, kad idealus detektorius užregistruos dalelės galinės būsenos judėjimo kiekį intervale  $d^3 p$ , yra:

$$dw(\mathbf{p}) = |\langle \mathbf{p} | \psi(t \rightarrow +\infty) \rangle|^2 d^3 p, \quad (40)$$

kur sutinkamai su (23) formule banginė funkcija  $\psi(t)$  aprašo paketo evoliuciją. Atsižvelgiant į tai, kad  $|\mathbf{p}\rangle$  yra tikrinės  $\hat{U}_0(t)$  evoliucijos operatoriaus funkcijos, ir panaudojant (26) sąryšį, (40) formulę galima perrašyti šitaip:

$$dw(\mathbf{p}) = |\langle \mathbf{p} | \psi_{out} \rangle|^2 d^3 p. \quad (41)$$

Panaudojant S matricos apibrėžimą (33) ir jos sąryšį su sklaidos amplitude

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{S} | \mathbf{k} \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{i\hbar^2}{2\pi\mu} \delta(E_k - E_{k'}) f(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$$

susiesime judėjimo kiekio pasiskirstymo amplitudę pradinėje būsenoje su judėjimo kiekio pasiskirstymo amplitudę galinėje būsenoje:

$$\langle \mathbf{p} | \psi_{out} \rangle = \langle \mathbf{p} | \hat{S} | \psi_{in} \rangle = \langle \mathbf{p} | \psi_{in} \rangle$$

$$+ \frac{i\hbar^2}{2\pi\mu} \int d^3 p' \delta(E_p - E_{p'}) f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) \langle p' | \psi_{in} \rangle. \quad (42)$$

Kadangi realiuose eksperimentuose detektorius visuomet stovi į šoną nuo krentančių dalelių srauto krypties, galima laikyti, kad jis neregistruoja (42) būsenos pirmojo nario. Tuomet

$$\langle \mathbf{p} | \psi_{out} \rangle \rightarrow \frac{i\hbar^2}{2\pi\mu} \int d^3 p' \delta(E_p - E_{p'}) f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) \langle p' | \psi_{in} \rangle. \quad (43)$$

Dalelių su fiksotu prisitaikymo parametru sklaidos tikimybė yra:

$$\begin{aligned} dw(\mathbf{p}) \Big|_{\rho_0} &= \frac{d^3 p}{4\pi^2 \mu^2} \int \int d^3 p' d^3 p'' \delta(E_p - E_{p'}) \delta(E_p - E_{p''}) \\ &\times f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}'' \rightarrow \mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp)\rho_0} \Phi_0(\mathbf{p}') \Phi_0^*(\mathbf{p}''). \end{aligned} \quad (44)$$

Patekusiu į detektorių dalelių, kurių judėjimo kiekis yra intervale  $d^3 p$ , skaičius yra lygus integralui pagal prisitaikymo parametrą  $\rho_0$  plokštumoje, statmenoje  $z$  ašiai, padaugintas iš krentančių dalelių srauto tankio  $j_0$ . Prileidę, kad  $j_0 = 1$  (vienetinis srauto tankis), surandame diferencialinį skerspjūvį ( $d\sigma = dw/j_0$ ):

$$\begin{aligned} d\sigma = dw(\mathbf{p}) \Big|_{\rho_0} d^2 \rho_0 &= \frac{d^3 p}{4\pi^2 \mu^2} \int d^2 \rho_0 \int \int d^3 p' d^3 p'' \delta(E_p - E_{p'}) \delta(E_p - E_{p''}) \\ &\times f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}'' \rightarrow \mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp)\rho_0} \Phi_0(\mathbf{p}') \Phi_0^*(\mathbf{p}''). \end{aligned} \quad (45)$$

Integravimas  $\rho_0$  atžvilgiu atneša  $\delta(p'_\perp - p''_\perp)$ , kuria kartu su  $\delta(E_{p'} - E_{p''})$  galima pertvarkyti šitaip:

$$\delta(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp) \delta(E'_p - E_{p''}) = \frac{\mu}{p'_z} \delta(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp) \delta(p'_z - p''_z) = \frac{\mu}{p'_z} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}''). \quad (46)$$

Integravimas pagal  $d^3 p''$  atneša  $4\pi^2$  bei  $p' = p''$  ir

$$d\sigma = \frac{d^3 p}{\mu^2} \int d^3 p' \frac{\mu}{p'_z} \delta(E_p - E_{p'}) |f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p})|^2 |\Phi_0(p')|^2. \quad (47)$$

Pakeitę tūrio elementą

$$d^3 p = p^2 dp d\Omega = \mu p dE_p d\Omega, \quad (48)$$

ir suintegruę pagal  $dE_p$ , pagaliau gauname galutinę diferencialinio skerspjūvio išraišką:

$$d\sigma = d\Omega \int d^3 p' \frac{\mu}{p'_z} |f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p})|^2 |\Phi_0(p')|^2 \Big|_{E_p=E_{p'}}. \quad (49)$$

Padarius prielaidą, kad pradinio judėjimo kieko  $\mathbf{p}'$  issibarstymas apie vidutinę vertę yra labai mažas, tai  $p'/p'_z$  (49) integrale galima pakeisti vienetu,  $f(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p})$  galima pakeisti  $f(\mathbf{p}_0 \rightarrow$

$\mathbf{p}'$ ), nes, esant mažam  $\mathbf{p}'$  išsibarstymui, ji mažai keičiasi. Kadangi pradinio bangų paketo funkcija  $\Phi_0(p')$  normuota į vienetą

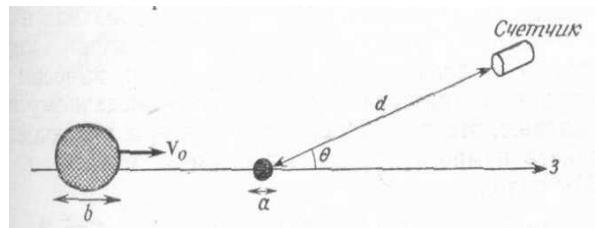
$$\int d^3 p' |\Phi_0(p')|^2 = 1, \quad (50)$$

(49) išraiška pereina į stacionariosios sklaidos teorijos skerspjūvio išraišką:

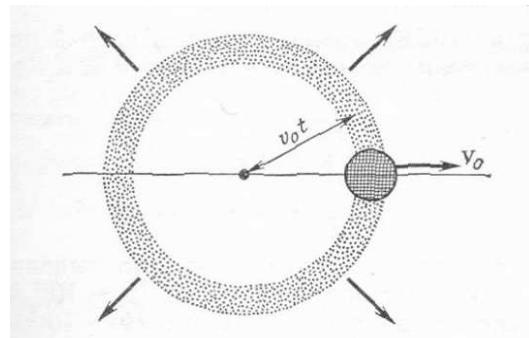
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbf{p})|^2. \quad (51)$$

Tokiui būdu, nuosekliai nagrinėdami, pasiekėme stacionariosios sklaidos teorijos rezultatą. Tačiau (51) formulė galioja tik tuomet, kai

- 1) sklaidomų dalelių pluošteliis judėjimo kiekiei erdvėje aprašomas gerai lokalizuotu bangų paketu;
- 2) detektorius yra uš sklaidomų dalelių konuso, t.y. registruoja tik tai išsklaidytas daleles.



5 pav. Prieš susidūrimą (laiko momentu  $t = 0$ ) bangų paketas greičiu  $v_0$  juda link taikinio.



6 pav. Po susidūrimo (laiko momentu  $t \gg 0$ ) neišsklaidytas paketas tėsia judėjimą greičiu  $v_0$ , o išsklaidyta banga plinta į visas puses. Ji nelygi nuliui viduje sferos, kurios spindulys  $v_0 t$ .