

1. Vyksmai plazmoje

Plazma – labiausiai paplitusi medžiagos būseną visatoje. Plazma – tai kvazineutralus darinys, sudarytas iš jonizuotų atomų ir elektronų. Plazmą reikia skirti nuo jonizuotų dujų, kur teigiamų ir neigiamų krūvių suma nėra lygi nuliui.

Spinduliuotė – pačios gamtos duotas informacijos šaltinis apie plazmos makroskopines ir mikroskopines charakteristikas. Kadangi spinduliuojančio objekto tūrio ir spinduliuavimo trukmės dažniausiai nežinome, patogu nagrinėti spinduliuotės srautą. Tai energijos kiekis, išspinduliuotas iš tūrio vieneto per laiko vieneta

$$I_{ij} = N_i^{(Z)} h\nu_{ij} A_{ij}^r \quad [erg\ cm^{-3}s^{-1}]. \quad (1)$$

Čia $h\nu_{ij}$ ir A_{ij}^r – grynai atominiai parametrai, $N_i^{(Z)}$ – viršutinio lygmens užpilda, t.y. jonų, kurių krūvis Z , skaičius būsenoje i tūrio elemente. Tokiu būdu, plazmos spinduliuojamų linijų intensyvumo suradimo uždavinys susiveda į lygmenų užpildymo skaičių $N_i^{(Z)}$ suradimą. Juos lemia elementarių procesų plazmoje visuma.

Dydį $N_i^{(Z)}$ galima užrašyti ir šitaip:

$$N_i^{(Z)} = \alpha(X) \left(\frac{N^{(Z)}}{N_X} \right) \left(\frac{N_i^{(Z)}}{N^{(Z)}} \right) N, \quad (2)$$

kur

- N – visų dalelių tankis plazmoje,
- N_X – X rūšies atomų ir jonų plazmoje pilnutinis tankis,
- $N^{(Z)}$ – jono X_Z užpilda, susumuota pagal visus lygmenis,
- $\alpha(X) = N_X/N$ – X elemento gausumas.

Lygmens užpildai plazmoje surasti sudaromos ir sprendžiamos balanso lygtys. Mes nagrinėsime paprasčiausius atvejus. Daromos šitokios prielaidos:

1. Nagrinėjama stacionari plazma, kad balanso lygtys būtų paprasčiausios algebrinės lygtys;
2. Elektronų tankis laikomas is anksto žinomu ir užduodamu;
3. Plazma pakankamai stipriai jonizuota, todėl galima atsižvelgti tikrai į procesus su elektronais, atmetant procesus su atomais ir jonais;

4. Laikoma, kad elektronų pasiskirstymui pagal greičius galioja Maksvelo pasiskirstymas.

Procesai, kurie vyksta atomams, jonams ar kitoms dalelės susiduriant su elektronais ar kitokiais krūvininkais, aprašomi skerspjūviais, kurie matuojami ploto vienetais.

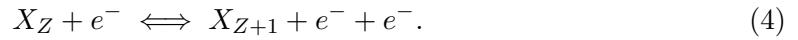
Elementarūs vyksmai plazmoje

Panagrinėsime svarbiausius atomų susidūrimo su elektronais ir fotonais procesus, kad būtų aiškiau, kam reikalingi tie skerspjūviai, kurių suradimui ir skirta kvantinė sklaidos teorija. Svarbiausi yra šie elektronų sąveikos su atomais ir jonais procesai:

1. Sužadinimas ir sužadinimo gesinimas (skerspjūvius žymėsime σ^{suz} ir σ^{ges})



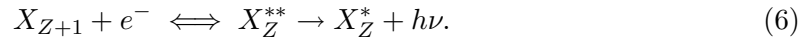
2. Jonizacija ir tridalelinė rekombinacija (skerspjūvius žymėsime σ^{jon} ir σ^{trirek})



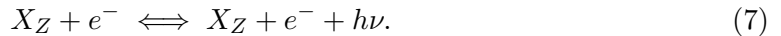
3. Fotojonizacija ir fotorekombinacija (skerspjūvius žymėsime σ^{fotjon} ir σ^{fotrek})



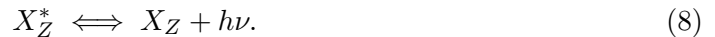
4. Dvielektronė rekombinacija ir autojonizacija (skerspjūvius žymėsime σ^{pagav} , σ^{DR} ir autojonizacijos tikimybę W^A)



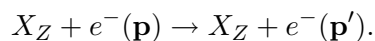
5. Stabdomasis spinduliavimas ir sugertis (skerspjūvius žymėsime σ^{stabd} ir σ^{suger})



6. Spontaninis spinduliavimas ir sugertis (tikimybė W^r)



7. Elastinė elektronų sklaida



Maksvelo ir kitokie pasiskirstymai

Maksvelo ir Bolcmano pasiskirstymai išvedami termodinamikoje ir tinka tuomet, kai plazmoje nusistovi termodinaminė pusiausvyra. Laikoma, kad termodinaminė pusiausvyra elektronams nusistovi po vieno susidūrimo. Tuomet elektronų greičiams ima galioti Maksvelo pasiskirstymas

$$F(\varepsilon) = 2\pi^{-1/2}T^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp(-\varepsilon/T), \quad (9)$$

kur temperatūra T toliau bus matuojama energijos vienetais (kT), todėl Bolcmano konstantos k nerašysime, ε – elektrono energija ir ε/T yra bedimensinis dydis.

Bolcmano pasiskirstymas tinka atomų ir jonų pasiskirstymui pagal būsenas, t.y. būsenų užpildai,

$$\frac{N_f}{N_0} = \frac{g_f}{g_0} \exp(-\beta f_0), \quad \beta f_0 = \frac{E_f - E_0}{T}. \quad (10)$$

Čia N_0 ir N_f – jonų tankis pagrindinėje 0 ir sužadintoje f būsenose, g_f ir g_0 , E_f ir E_0 yra atitinkamai sužadintos ir pagrindinės būsenų statistiniai svoriai ir energijos.

Jonų pasiskirstymui pagal jonizacijos laipsnius naudojama Saha formulė

$$\frac{N^{(Z+1)}}{N^{(Z)}} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} S \exp(-\beta Z), \quad \beta Z = \frac{E_Z}{T}, \quad (11)$$

$$S = 2 \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{1}{N_e} = \frac{Z^3 \Theta^{3/2}}{4\pi^{3/2} a_0^3 N_e}, \quad (12)$$

$$g_Z = \sum_i g_i(Z) \exp(-\beta_{i0}). \quad (13)$$

Šiose formulėse $N^{(Z)}$ ir $N^{(Z+1)}$ – jonų X_Z ir X_{Z+1} tankiai, g_Z ir g_{Z+1} – jonų X_Z ir X_{Z+1} statistinės sumos, E_Z – jono X_Z jonizacijos energija, $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ cm – vandenilio atomo pirmosios Boro orbitos spindulys, $\Theta = T/Z^2 Ry$, kur Ry Rydbergo vienetas ($1 Ry = me^4/2\hbar^2 = 13,606$ eV=157894 K).

Iš (9)–(13) formulių matyti, kad šiuos pasiskirstymus lemia elektronų temperatūra T ir elektronų tankis N_e .

Spartos koeficientai ir procesų tikimybės

Vieno atomo spontaninės spinduliuotės šuolių per laiko vienetą skaičių nusako tikimybė W [s^{-1}], kuri nepriklauso nuo plazmos parametrų. Sklaidos procesuose sužadavimo aktų per laiko

vienetą tenkantis vienam atomui X_Z skaičius proporcingas elektronų tankiui N_e ir elektronų greičiui v . Taigi tikimybė priklauso nuo plazmos parametrų ir yra:

$$W = N_e v \sigma, \quad [s^{-1}],$$

kur σ – efektinis sužadavimo, jonizacijos, sklaidos ar fotorekombinacijos skerspjūvis.

Sakysime, kad $F(\varepsilon)$ yra elektronų pasiskirstymo pagal energijas (greičius) funkcija. Tuomet elektronų skaičius energijų intervale $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ bus

$$dN_e = N_e F(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (14)$$

Proceso tikimybė, suvidurkinta pagal elektronų pasiskirstymą pagal greičius, yra:

$$W = N_e \langle v \sigma \rangle \quad [s^{-1}], \quad (15)$$

kur $\langle v \sigma \rangle$ vadinamas atitinkamo proceso spartos koeficientu, kuris priklauso nuo konkretaus proceso. Jam surasti reikalingi to proceso skerspjūviai.

Jono sužadavimo elektronais spartos koeficientas yra šitoks:

$$\langle v \sigma^{suz} \rangle = \int_{\Delta E}^{\infty} v \sigma^{suz}(\varepsilon) F(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\Delta E}^{\infty} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \sigma^{suz}(\varepsilon) F(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (16)$$

kur ΔE – sužadavimo energija, σ^{suz} - sužadavimo skerspjūvis, matuojamas cm^2 , $\varepsilon = mv^2/2$.

Analogiškai apibrėžiama ir fotojonizacijos tikimybė, kurios išraiška yra šitokia:

$$W_{iv} = \int_{E_z/\hbar}^{\infty} N_w C \sigma_{iv}^{fotojon} dw, \quad (17)$$

kur N_w – spinduliuotės kvantų, kurių dažnis w , tankis,

$$N_w = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2\hbar w^3}{c^3 \pi^2} \frac{1}{e^{\hbar w/kT} - 1}. \quad (18)$$

Šviesos greitis yra pastovus dydid, todėl (17) formulėje nėra pasiskirstymo pagal greičius funkcijos, bet yra pasiskirstymas pagal spinduliuotės dažnius.

Kai kuriuose procesuose, pvz. jonizacijoje elektronais, galinėje būsenoje yra trys dalelės (jonas, išsklaidytas ir atplėstas elektronai). Taikymams naudojamas ne diferencialinis jonizacijos skerspjūvis $\sigma^{jon}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'')$, bet pilnasis skerspjūvis, kuris surandamas diferencialinį skerspjūvį suintegruojant visų atplėštojo elektrono energijų ε'' atžvilgiu:

$$\sigma_i^{jon}(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon - E_Z} \sigma^{jon}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') d\varepsilon'', \quad \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon - E_Z. \quad (19)$$

Čia E_Z – atomo elektrono pradinėje būsenoje ryšio energija, t.y. jonizacijos energija. Diferencialinis skerspjūvis $\sigma^{jon}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'')$ matuojamas cm^2/erg , o pilnasis σ_i^{jon} – cm^2 .

Kartais trys dalelės būna pradinėje būsenoje, pvz. tridalelinė rekombinacija arba stabdomoji absorbcija, kai elektronas sugeria kvantą būdamas jono lauke. Šiuo atveju proceso tikimybė proporcinga dviejų dalelių srautų sandaugai. Tridalelinės rekombinacijos atveju tikimybė užrašoma šitaip:

$$W_r = N_e^2 \chi_r,$$

$$\chi_r = \int \int v_1 v_2 \sigma^{trirek} F(\varepsilon_1) F(\varepsilon_2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2. \quad (20)$$

Nors σ^{trirek} dimensija cm^4s , o ne cm^2 , jis vis tiek vadinamas skerspjuviu.

Sąryšiai tarp tiesioginių ir atvirkštinių procesų

Termodinaminės pusiausvyros sąlygomis galioja detalaus balanso principas. Tai reiškia, kad tiesioginis ir atvirkštinis procesai tiksliai kompensuoja vienas kitą.

Sakysime yra du atomo lygmenys k ir i . Dėl atomo susidūrimo su elektronu įvyksta šuolis $k \rightarrow i$ (sužadlinimas) ir atvirkščias procesas $i \rightarrow k$ (gesinimas). Pagal detalaus balanso principą

$$N_k N_e \langle v \sigma_{ki}^{suz} \rangle = N_i N_e \langle v \sigma_{ik}^{ges} \rangle. \quad (21)$$

Panaudodami Bolcmano pasiskirtymą

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{-\beta_{ik}}, \quad \beta_{ik} = \frac{\Delta E}{kT} \quad (22)$$

gauname

$$g_k \langle v \sigma_{ki}^{suz} \rangle = g_i \langle v \sigma_{ik}^{ges} \rangle e^{-\beta_{ik}}. \quad (23)$$

Jonizacijos atveju būtų šitoks sąryšis:

$$g_Z \langle v \sigma_i^{jon} \rangle = 2 \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_{Z+1} \langle v \chi_r \rangle e^{-\beta_Z}. \quad (24)$$

(23) ir (24) sąryšiuose nėra būsenų užpildos tankių, todėl jie galioja ir nesant termodinaminės pusiausvyros, bet Maksvelo pasiskirstymas turi būti.

Užrašysime (23) formulę išreikštoje formoje (įrašome (9) išraišką bei suprastiname abejose pusėse esančius vienodus daugiklius)

$$g_k \int_{\Delta E}^{\infty} \left(\frac{2\varepsilon}{m} \right)^{1/2} \sigma_{ki}^{suz}(\varepsilon) \varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right) d\varepsilon$$

$$= g_i \int_0^{\infty} \left(\frac{2\varepsilon'}{m} \right)^{1/2} \sigma_{ik}^{ges}(\varepsilon') \varepsilon'^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon' + \Delta E}{T}\right) d\varepsilon' \quad (25)$$

arba

$$\begin{aligned} g_k \int_0^\infty (\varepsilon' + \Delta E) \sigma_{ki}^{suz}(\varepsilon' + \Delta E) \varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon'}{T}\right) d\varepsilon' \\ = g_i \int_0^\infty \varepsilon' \sigma_{ik}^{ges}(\varepsilon') \exp\left(-\frac{\varepsilon'}{T}\right) d\varepsilon'. \end{aligned} \quad (26)$$

Šis sąryšis galioja bet kokiai temperatūrai, todėl tarp σ_{ki}^{suz} ir σ_{ik}^{ges} turi galioti šis sąryšis:

$$g_k(\varepsilon' + \Delta E) \sigma_{ki}^{suz}(\varepsilon' + \Delta E) = g_i \varepsilon' \sigma_{ik}^{ges}(\varepsilon'). \quad (27)$$

Ši formulė vadinama Kleino ir Roselando sąryšiu. Kai $\varepsilon \gg \Delta E$, iš jos seka, kad

$$g_k \sigma_{ki}^{suz}(\varepsilon) = g_i \sigma_{ik}^{ges}(\varepsilon). \quad (28)$$

(27) formulėje nėra jokių plazmos dydžių, todėl ji yra bendras sąryšis tarp tiesioginio proceso (sužadavimo) ir atvirkštinio (sužadavimo gesinimo). Analogiškai galima surasti ir sąryšį tarp jonizacijos ir rekombinacijos skerspjūvių.

Norint surasti sąryšį tarp fotojonizacijos ir fotorekombinacijos skerspjūvių ir spartos koeficientų, reikia padaryti prielaidą, kad atomas yra termodinaminėje pusiausvyroje su elektronų ir spinduliuotės lauku. Tuomet

$$g_Z \langle c \sigma_{i\nu}^{fotojon} \rangle = 2 \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_{Z+1} \chi_{r\nu}. \quad (29)$$

Čia kairėje pusėje vidurkinama pagal spinduliuotės dažnius w , o $\chi_{r\nu} = \langle v \sigma_{\nu}^{fotorek} \rangle$. Toliau analogiškai formulei (27) surandame sąryšį tarp fotojonizacijos ir fotorekombinacijos skerspjūvių:

$$g_Z q^2 \sigma_{\nu}^{fotojon}(w) = g_{Z+1} k^2 \sigma_{\nu}^{fotorek}(\varepsilon), \quad \hbar w = E_Z + \varepsilon. \quad (30)$$

arba

$$g_Z \sigma_{\nu}^{fotojon}(w) = \frac{2mc^2 \varepsilon}{\hbar^2 w^2} g_{Z+1} \sigma_{\nu}^{fotorek}(\varepsilon), \quad (31)$$

kur q ir k – fotono ir elektrono banginiai skaičiai, $w = 2\pi\nu$ – fotono ciklinis dažnis, ε – atplėštojo elektrono energija. (30) ir (31) formulės vadinamos Milno sąryšiu.

Plazmos modeliai

Lokalinė termodinaminė pusiausvyra

Esant dideliame plazmos tankiui ir nesant išorinio poveikio (išorinių laukų, sąveikos su indo sienelėmis), galioja termodinaminės pusiausvyros sąlygos. Šiuo atveju sužadintų lygmenų

užpildą ir jonų tankio pasiskirstymą pagal jonizacijos laipsnius aprašo Bolcmano ir Saha formulės:

$$\begin{aligned}\frac{N_k}{N_m} &= \frac{g_k}{g_m} e^{-\beta_{km}}, \\ \beta_{km} &= \frac{E_k - E_m}{kT}, \\ \frac{N^{(Z+1)}}{N^{(Z)}} &= \frac{g_{Z+1}}{g_z} \frac{S}{N_e} e^{-\beta_z}, \\ \beta_z &= \frac{E_z}{kT}, \\ g_z &= \sum_k g_k e^{-\beta_{k0}}.\end{aligned}$$

Saha sąryšis galioja ir atskiriems lygmenims k ir m

$$\begin{aligned}\frac{N_k^{(Z+1)}}{N_m^{(Z)}} &= \frac{g_k^{Z+1}}{g_m^Z} \frac{S}{N_e} e^{-\beta_{km}}, \\ \beta_{km} &= T^{-1}(E_k^{(Z+1)} - E_0^{(Z+1)} + |E_Z|) = \beta_{k0}^{(Z+1)} + \beta_m^{(Z)}.\end{aligned}$$

Vainikinis artinys

Mažo tankio plazma yra kitas ribinis plazmos atvejis. Šiuo atveju sužadintų lygmenų užpilda yra daug mažesnė už surandamą iš Bolcmano pasiskirstymo. Beveik visi jonai yra pagrindinėje būsenoje, todėl jonų sužadinimas ir jonizacija vyksta tiksliai iš pagrindinio lygmens. Nusistovi balansas tarp pagrindinio ir sužadinto lygmens:

$$W_{k0}^r N_k = N_0 \langle v \sigma_{0k}^{suz} \rangle N_e.$$

Kai elektronas iš sužadinto lygmens gali nušokti ne tik į pagrindinį lygmenį, bet ir į žemesnius, tuomet

$$W_k^r = \sum_j W_{kj}^r.$$

Spektro linijos, išspinduliuotos elektronui peršokant iš k į i lygmenį, intensyvumas bus

$$I_{ki} = N_k h\nu_{ki} W_{ki}^r = N_0 h\nu_{ki} \langle v \sigma_{0k}^{suz} \rangle N_e \frac{W_{ki}^r}{\sum_j W_{kj}^r} = N_0 h\nu_{ki} \langle v \sigma_{0k}^{suz} \rangle N_e w_{ki}$$

kur

$$w_{ki} = \frac{W_{ki}^r}{\sum_j W_{kj}^r}$$

vadinamas išsišakojimo arba fluorescencijos našumo koeficientu. Kai $W^r = 1$, t.y. tėra vienintelė spinduliavimo galimybė, išspinduliuotos linijos intensyvumas nepriklauso nuo spontaninio šuolio tikimybės.

Tais atvejais, kai keletos linijų fluorescencijos našumo koeficientai artimi vienetui, vainikiniame artinyje tų linijų intensyvumai beveik vienodi, nepriklausomai nuo to, ar jos leistinos, ar uždraustos. Viskas priklauso nuo $\langle v\sigma_{0k}^{suz} \rangle$. Tai – svarbi vainikinio artinio ypatybė.

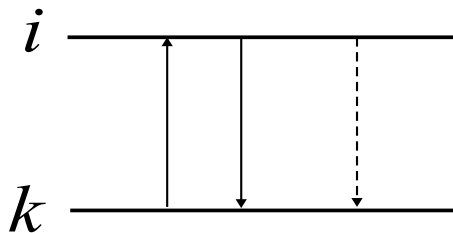
Jonų tankių pasiskirstymas pagal jonizacijos laipsnius vainikiniame artinyje yra šitoks:

$$\frac{N^{(Z+1)}}{N^{(Z)}} = \frac{\langle v\sigma^{jon} \rangle}{\chi_\nu + \chi_d},$$

kur $\langle v\sigma^{jon} \rangle$ – jonizacijos, χ_ν – fotorekombinacijos ir χ_d – dvielektronės rekombinacijos spartos koeficientai.

Dviejų lygmenų sistema

Tarpinio plazmos tankio atveju jonų pasiskirstymas pagal jonizacijos laipsnius ir sužadintų būsenų užpilda surandami sprendžiant balanso lygtis, nes termodinaminės pusiausvyros sąlygos netinka. Taip pat negalioja sąryšis tarp tiesioginio ir atvirkštinio procesų. Bendras uždavinio sprendimas gana sudėtingas, nes reikia spręsti begalinę lygčių sistemą visiems jonams ir visiems jų lygmenims, atsižvelgiant į daug procesų. Lygmenų užpilda gali stipriai skirtis nuo gaunamos termodinaminės pusiausvyros sąlygomis. Reikia turėti omenyje, kad ir šiuo atveju elektronų pasiskirstymas pagal greičius gana artimas maksveliškamajam, bet jonų pasiskirstymas pagal lygmenis stipriai nukrypsta Bolcmano ir Saha pasiskirstymų. Tolimesniame nagrinėjime laikysime, kad elektronų pasiskirstymui pagal greičius galioja Maksvelo pasiskirstymas, todėl galioja ir (27) ir (28) sąryšiai.



1 pav. Dviejų lygmenų sistema. Rodyklė aukštyn rodo jono elektrono sužadinimą, rodyklė žemyn - jono elektrono šuolį žemyn dėl sąveikos su laisvuju elektronu, brūkšninė linija su rodykle žemyn – spontaninis elektrono šuolis žemyn, išspinduliuojant fotoną.

Pats paprasčiausias atvejis yra dviejų lygmenų sistema. Atsižvelgiant tiktai į sužadinimo ir gesinimo elektronais bei spontaninio suirimo procesus, lygmenims i ir k galima užrašyti šitoki sąryšį:

$$N_k N_e \langle v\sigma_{ki}^{suz} \rangle = N_i N_e \langle v\sigma_{ik}^{ges} \rangle + N_i W_i^r,$$

kur $W_i^r = \sum_n W_{in}^r$ – lygmens i pilnoji spinduliavimo tikimybė. Panaudojant (23) gaunama

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{-\beta} \frac{1}{1+R}, \quad R = \frac{W_i^r}{N_e \langle v \sigma_{ik}^{suz} \rangle}.$$

Ši formulė dviejų lygmenų artinyje leidžia surasti lygmenų užpildą bet kokiam elektronų tankiui N_e . Daugiklis R aprašo nuokrypį nuo termodinaminės pusiausvyros. $\langle v \sigma_{ik}^{suz} \rangle$ sąlyginai silpnai priklauso nuo temperatūros. Stipriausiai nuo temperatūros priklauso daugiklis $\exp(-\beta) = \exp(-\Delta E/T)$ lygiai taip pat, kaip ir Bolcmano pasiskirstyme.

Jeigu dviejų lygmenų artinyje lygmenį i laikytume jonizacijos riba, galėtume užrašyti jonizacinės pusiausvyros lygtį. Reikia turėti omenyje, kad galimi trijų tipų rekombinacijos procesai: tridalelė (ji proporcinga N_e^2), fotorekombinacija ir dvielektronė rekombinacija (jos proporcingos N_e). Gauname

$$\frac{N^{(Z+1)}}{N^{(Z)}} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} S e^{-\beta Z} \frac{1}{1+R_Z},$$

$$R_Z = \frac{\chi_\nu + \chi_d}{\chi_r N_e},$$

kur χ_r , χ_ν ir χ_d – tridalelės, fotorekombinacijos ir dvielektronės rekombinacijų spartos koeficientai.

Kai $R \geq 1$, pasiskirstymai N_i/N_k ir $N^{(Z+1)}/N^{(Z)}$ labai stipriai priklauso nuo elementariųjų procesų spartos koeficientų. Čia ir yra didžiausias skirtumas nuo termodinaminės pusiausvyros atvejo.

Bendrasis atvejis

Uždavinio sudėtingumui pailiustruoti užrašysime balanso lygtį atomo jono, kurio krūvis Z , lygmens j užpildai surasti:

$$\begin{aligned} \frac{N_j^{(Z)}}{dt} = & \sum_{k \neq j}^{J_k} N_k^{(Z+1)} \left\{ N_e \left[\langle v \sigma_{kj}^{fotrek} \rangle + \langle v \sigma_{kj}^{trirek} \rangle + \langle v \sigma_{kj}^{pagav} \rangle \right] \right\} \\ & + \sum_{k' > j}^{J_k} N_{k'}^{(Z)} \left[W_{k'j}^r + N_e \langle v \sigma_{k'j}^{ges} \rangle \right] - N_j^{(Z)} \sum_{i' < j}^{J_{i'}} \left[W_{ji'}^r + N_e \langle v \sigma_{ji'}^{suz} \rangle \right] \\ & - N_j^{(Z)} \sum_{i \neq j}^{J_i} \left[N_e \langle v \sigma_{ji}^{jon} \rangle + W_{ji} + \langle v \sigma_{ji}^{fotojon} \rangle \right] \\ & + \sum_{l > j}^{J_l} N_l^{(Z-1)} \left[N_e \langle v \sigma_{lj}^{jon} \rangle + W_{lj}^{a(Z-1)} + \langle v \sigma_{lj}^{fotojon} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Čia J_k , J_i ir $J_l - Z + 1$, Z ir $Z - 1$ jonų lygmenų, į kuriuos atsižvelgiama, ieškant būsenų užpildos, skaičius. Tokių lygčių yra tiek, kiek yra jonų, kurių krūvis Z , padauginus iš kiekvieno

jono Z lygmenų skaičiaus. Stacionarios plazmos atveju $dN_j^{(Z)}/dt = 0$. Cheminio elemento visų jonų suma yra pastovi, todėl prie lygčių sistemos dar reikia pridėti ir lygtį:

$$\sum_j N_j = N.$$

Čia laikoma, kad plazma susideda iš vienos rūšies jonų.