2. Stacionarioji sklaidos teorija

Sklaidos uždavinio bendroji formuluotė

Šiuolaikinės sklaidos teorijos metodai skirstomi į dvi rūšis: stacionarioji ir nestacionarioji sklaidos teorija. Skirtumai tarp šių dviejų teorijų dideli. Jie susiję su pačio uždavinio formulavimu, naudojamais matematiniais metodais ir praktinio pritaikymo sritimis.

Stacionariosios sklaidos teorijos taikymo sritis labai plati. Ji naudojama elektronų, atomų, branduolių ir elementariųjų dalelių susidūrimams aprašyti. Tuo tarpu nestacionarioji teorija taikoma retai ir dažniausiai ypatingiems uždaviniams, kai reikia paaiškinti specialių eksperimentų rezultatus. Dar daugiau, nestacionariojoje teorijoje nėra sukurta standartinių teorinių metodų, kuriais galėtų pasinaudoti ir eksperimentikai.

Iš teorijos pusės tarp stacionariosios ir nestacionariosios teorijų nėra principinių skirtumų jų taikymo prasme, nors stacionarioji teorija yra paprastesnė ir geriau išplėtota. Stacionarioji sklaidos teorija – tai ypatingas matematinis metodas, sklaidos uždavinių sprendimo receptas, kuris techniškai patogus ir vaizdus. Todėl pradžioje išmoksime naudotis stacionariąja sklaidos teorija, pirma skaidos potencialu, po to turinčiomis vidinę sandarą dalelėmis uždaviniams spręsti. Vėliau susipažinsime su nestacionariąja sklaidos teorija.

Pradėsime nuo paprasčiausio uždavinio, kai dalelę sklaido jėgos centras. Tegul $V(\mathbf{r})$ bus dalelės sąveikos su jėgos centru potencinė energija, μ – dalelės masė. Mūsų tikslas – surasti diferencialinį sklaidos skerspjūvį $d\sigma/d\Omega$ su sąlyga, kad iš begalybės į centrą, kuris dar vadinamas taikiniu, skrieja lygiagretus dalelių, kurių pradinis greitis $\mathbf{v}_0$=$\mathbf{n}_0 v_0$, pluoštelis. Čia $\mathbf{n}$=$\mathbf{v}_0/v_0$ – vienetinis vektorius, rodantis dalelės judėjimo kryptį.

Dalelės sklaidos jėgos centru uždavinio klasikinis sprendimas. Rezerfordo formulė.

Klasikinėje mechanikoje gali būti žinomos abiejų dalelių trajektorijos. Nesant sąveikos dalelės juda tiesiai. Sąveika jų trajektorijas iškreipia, ir po išsklaidymo dalelės juda kitomis kryptimis. Teoriškai nagrinėjant išsklaidymą, dviejų dalelių judėjimas gali būti pakeistas vienos fiktyvios dalelės judėjimu masių centro atžvilgiu. Tos fiktyvios dalelės masė $M = m_1 m_2/(m_1+m_2)$, o dalelių sąveika apibūdinama potencialu $V(\mathbf{r})$, kur $\mathbf{r}$ – atstumas tarp dalelių.

Panagrinėsime Rezerfordo išspręstą alfa dalelių sklaidos branduoliais uždavinį. Laiko momentu $t = -\infty$ kiekvienai į taikinį krentančio pluoštelio dalelei parenkamas prisitaikymo parametras b. Judėjimo lygtys leidžia kiekvienam b surasti dalelės judėjimo lygtį $\mathbf{r}$=$\mathbf{r}(t)$, kurios asimptotika $t \to +\infty$ momentu parodo dalelės nuokrypio kryptį $\mathbf{n}$, t.y. skaidos polinį θ ir azimutinį ϕ kampus. Nustačius $\mathbf{n}$=$\mathbf{n}(b)$, surandamas sklaidos diferencialinis skerspjūvis $d\sigma/d\omega$.

Rezerfordui (1913 m.) buvo svarbiausia surasti sąryšį tarp sklaidos kampo ir prisitaikymo parametro b. Tam tikslui užrašomos dvi lygtys, kuriose sulyginami alfa dalelės energija ir judėjimo kiekio momentas begaliniame ir minimalaus suartėjimo taškuose:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{zZe^2}{r} + \frac{mv_{min}^2}{2}, \tag{1}$$

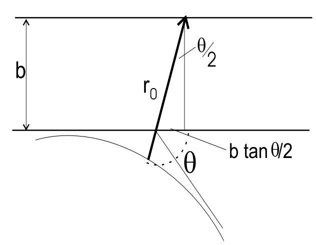
$$J = mvb = mv_{min}r_0. \tag{2}$$

Išreiškiame v_{min} iš (2), įrašome į (1) ir gauname sąryšį tarp r_0 ir b:

$$r_0^2 - 2\frac{zZe^2}{mv^2}r_0 - b^2 = 0. \tag{3}$$

Išsprendę šią kvadratinę lygtį, surandame, kad

$$r_0 = \frac{zZe^2}{mv^2} + \left[\left(\frac{zZe^2}{mv^2}\right)^2 + b^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$



2 pav. Sklaidos uždavinio schema.

Alfa dalelė kuloniniame lauke juda hiperboline trajektorija (žr. 2 pav.), todėl tarp minimalaus suartėjimo atstumo r_0 ir prisitaikymo parametro b galioja sąryšis:

$$r_0 = b\tan\frac{\theta}{2} + b\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Sulyginę (4) su (5), gauname sąryšį tarp sklaidos kampo ir prisitaikymo parametro:

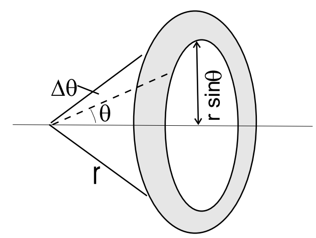
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{mv^2b}. \tag{6}$$

Iš čia

$$b = \frac{zZe^2}{mv^2}\,\frac{1}{\tan(\theta/2)}. \tag{7}$$

Mums reikia surasti diferencialinį skerspjūvį $d\sigma/d\omega$, kuris klasikinėje fizikoje yra $\Delta\sigma/\Delta\Omega$ ($\Delta\Omega = 2\pi \sin\theta \Delta\theta$). Pagal 3 pav. į kampų intervalą nuo θ iki $\theta + \Delta\theta$ paklius visos dalelės, kurios skries į taikinį su prisitaikymo parametrais intervale nuo b iki $b + \Delta b$. Δb surasime diferencijuodami b (7):

$$\Delta b = \frac{zZe^2}{mv^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \frac{\Delta\theta}{2}. \tag{8}$$



3 pav. Plotas, į kurį pakliūva išsklaidytos dalelės.

Dalelės iš Δb prisitaikymo parametro intervalo paklius į žiedą, kurio plotas $\Delta\sigma = 2\pi b \Delta b$. Tuomet matuojamas diferencialinis skerspjūvis bus:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{2\pi b \Delta b}{2\pi \sin\theta \Delta\theta}. \tag{9}$$

Rezerfordo formulę gauname įrašę b (7) ir Δb (8) į (9) ir pakeitę $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{10}$$

Yra ir kita šio skerspjūvio užrašymo forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2mzZe^2)^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4}, \tag{11}$$

kurioje pabrėžiama diferencialinio skerspjūvio priklausomybė nuo dalelės judėjimo kiekio pradinėje ir galinėje būsenose skirtumo. $|\mathbf{p} - \mathbf{p}'| = 2mv \sin(\theta/2)$ yra perduotasis alfa dalelės judėjimo kiekis, kurį priima branduolys.

Dalelės sklaidos jėgos centru uždavinio kvantmechaninis sprendimas

Kvantinėje mechanikoje nėra dalelių judėjimo trajektorijos. Sklaidos procesą aprašo banginė funkcija, kuri stacionariojoje teorijoje yra stacionariosios Šredingerio lygties sprendinys:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \tag{12}$$

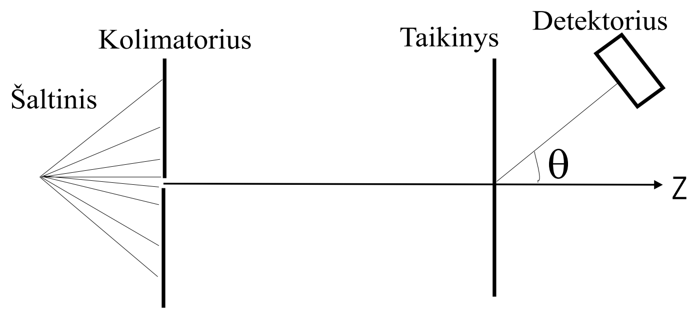
Nagrinėjamame uždavinyje $\mathbf{r}$ yra dalelės koordinatė, $\hat{H}$ – operatorius:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{13}$$

kur

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 \tag{14}$$

yra dalelės kinetinės energijos operatorius, $\hat{V} = V(\mathbf{r})$ – dalelės sąveikos su jėgos centru potencinės energijos operatorius.



4 pav. Sklaidos eksperimento schema.

4 pav. pavaizduota sklaidos eksperimento schema. Iš jo matome, kad dalelių šaltinis ir detektorius yra labai toli nuo jėgos centro. Pavyzdžiui, atomo matmenys 10^{-8} cm, o matuojama daugiau nei 1 cm atstumu, todėl visos sąveikos, su kuriomis susiduriama sklaidos uždaviniuose, dideliuose atstumuose nuo jėgos centro išnyksta. Prileisime, kad potencinė energija matuojama nuo jos reikšmės begalybėje, t.y.

$$V(r \to \infty) = 0. \tag{15}$$

Tuomet $V(\mathbf{r}) > 0$ reikš, kad jėgos centras dalelę stums, o $V(\mathbf{r}) < 0$ – trauks.

Kai dalelės energijs $E > 0$, Šredingerio lygtis neturi kvadratiškai integruojamų sprendinių, t.y.

$$\int |\psi)\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \infty. \tag{16}$$

Kaip žinome iš kvantinės mechanikos, tiktai kvadratiškai integruojamos funkcijos aprašo fizikinės sistemos realią būseną. Kadangi (12) lygties spendinys nėra kvadratiškai integruojamas, sklaidos teorijoje jis vaidina tiktai pagalbinį vaidmenį. Jo ryšį su sklaidos procese dalyvaujančių dalelių realiomis būsenomis dar reikia išsiaiškinti, kas ir bus padaryta tolimesnėse paskaitose.

Įrašome (13) į (12) ir perrašome Šredingerio lygtį šitaip:

$$(\hat{H}_0 - E)\psi(\mathbf{r}) = -\hat{V}\psi(\mathbf{r}). \tag{17}$$

Gauname nehomogeninę antros eilės diferencialinę lygtį. Homogeninės lygties

$$(\hat{H}_0 - E)\psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{18}$$

atskiras sprendinys $\phi(\mathbf{r})$ yra plokščia banga:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}}. \tag{19}$$

Kadangi (19) sprendinys $\phi(\mathbf{r})$ nėra kvadratiškai integruojama funkcija, ji neaprašo sklaidomos dalelės jokios realios būsenos. Stacionariojoje sklaidos teorijoje ją naudosime plokščiam lygiagrečių dalelių, kurių judėjimo kiekis p=$\hbar$k, srautui aprašyti. Ateityje dažnai vietoje dalelės judėjimo kiekio p naudosime k, kurį ir vadinsime judėjimo kiekiu, nors iš tikrųjų jis yra dalelės banginis vektorius arba banginis skaičius, rodantis kiek Planko konstantų $\hbar$ telpa judėjmo kiekyje $\mathbf{p}$. Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad (19) funkcijos normavimo konstanta yra parinkta lygi vienetui. Tuomet (19) funkcijų pilnumo sąlyga yra šitokia:

$$\int \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\phi^+_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{20}$$

Skaidos procesą aprašančios (17) lygties ieškosime tokių sprendinių, kurie tenkintų šitokią fizikiną sąlygą: tegul labai toli nuo jėgos centro, kur į sąveiką tarp dalelės ir jėgos centro jau galima nekreipti dėmesio, ieškoma banginė funkcija yra plokščios (19) ir išsiskleidžiančios sferinės bangos funkcijų suma, kas kvantinėje mechanikoje vadinama superpozicija:

$$\psi(\mathbf{r})|_{r\to\infty} = e^{i\mathbf{kr}} + \text{sfer.funkcija}. \tag{21}$$

Tam, kad parodytume, jog (17) lygties (21) sprendinys egzistuoja, pasinaudosime laisvos dalelės judėjimo Gryno funkcija, kuri tenkina homogeninę Šredingerio (18) lygtį. Gryno funkcija yra (18) lygties sprendinys:

$$(E - \hat{H}_0)\; G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{22}$$

Tuomet ieškomąjį (21) sprendinį galima užrašyti štokiu pavidalu:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \int G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\; V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3r'. \tag{23}$$

Šis sprendinys ištikrųjų yra integralinė lygtis funkcijai $\psi(\mathbf{r}')$ surasti, bet ekvivalentiška (17), tačiau ji yra patogesnė, nes joje atsižvelgta į kraštines sąlygas (21).

Lengva įsitikinti, kad (23) tenkina (17) lygtį. Tam reikia į (17) lygties kairę pusę įrašyti (23) išraišką ir pasinaudoti sąryšiu tarp laisvosios dalelės energijos ir judėjimo kiekio

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}. \tag{24}$$

Ateityje mums bus reikalingas ir sutrumpintas (23) užrašymas:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \frac{1}{E - \hat{H}_0}\,\hat{V}\psi(\mathbf{r}), \tag{25}$$

arba

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \hat{G}_0(E)\,\hat{V}\psi(\mathbf{r}), \tag{26}$$

kur

$$\hat{G}_0(E) \equiv \frac{1}{E - \hat{H}_0} \tag{27}$$

yra dalelės laivo judėjimo Gryno **operatorius**.

Integralinės lygtys (23) ir (26) vadinamos **Lipmano ir Švingerio lygtimis**.

Iš visų galimų Lipmano ir Švingerio lygčių sprendinių reikia parinkti tokius, kurie tenkintų asimptotikos sąlygą (21). Kaip šitai padaryti? Tam, kad atsakytume į šį klausimą, apskaičiuosim Gryno funkciją $G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ir pasižiūrėsime, kaip ji atrodo, kai $r \to \infty$.

Dalelės laisvojo judėjimo Gryno funkcija. Sklaidos amplitudė.

Lengva įsitikinta, kad, jeigu Gryno funkcija $G(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ atitinka operatoriui $\hat{H}$, o $\{\phi_n(\mathbf{r})\}$, kur $n = 1, 2, ..., \infty$, yra operatoriaus $\hat{H}$ pilnas ortonormuotų funkcijų rinkinys

$$\hat{H}\phi_n(\mathbf{r}) = E\phi_n(\mathbf{r}), \quad n = 1, 2, ..., \infty, \tag{28}$$

tai galioja taip vadinamas spektrinis skleidinys, arba Gryno funkcijos spektrinis atvaizdavimas:

$$G(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{r})\phi_n^*(\mathbf{r}')}{E - E_n}. \tag{29}$$

Įrodymui, kad Gryno funkcija tenkina Šredingerio lygtį, paveikime Gryno funkcijos spektrinį skleidinį $G(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (29) operatorium $(E - \hat{H})$. Atsižvelgę į $\phi_n(\mathbf{r})$ funkcijų pilnumo sąlygą, gauname (22) pavidalo lygtį:

$$(E - \hat{H})G(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = (E - \hat{H})\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{r})\phi_n^*(\mathbf{r}')}{E - E_n} = \sum_n \phi_n(\mathbf{r})\phi_n^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{30}$$

Čia operatorius $\hat{H}$ veikia $\mathbf{r}$ koordinatę. (30) lygtis yra Gryno funkcijos, atitinkančios $\hat{H}$ operatoriui, apibrėžimas.

Dabar, pasinaudodami spektriniu skleidiniu (29), surasime laisvosios dalelės Gryno funkciją $G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Mūsų atveju operatoriaus $\hat{H}_0$ (14) spektras yra tolydinis, todėl (29) lygtyje sumą reikia pakeisti integralu:

$$G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{\phi_\xi(\mathbf{r})\phi_\xi^*(\mathbf{r}')}{E - \frac{\hbar^2\xi^2}{2\mu}} \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3}. \tag{31}$$

Čia $\phi_\xi(\mathbf{r})$ pažymėta plokščia banga (19), ξ – judėjimo kiekis. Įrašome plokščios bangos išraišką, integruojame (31) pagal ξ ($d^3\xi = \xi^2 sin\theta d\theta d\phi$) ir gauname išraišką:

$$G_0(E,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\mu}{2\pi^2\hbar^2}\,\frac{1}{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\frac{2\mu E}{\hbar^2}-\xi^2}\xi d\xi. \tag{32}$$

Dabar galima suintegruoti (32) pagal ξ. Kai $\xi = (2\mu E)/\hbar^2$, integralas diverguoja, nes turi polių. Tokiems integralams apskaičiuoti naudojami rezidiumų teorijos metodai. Gryno funkcijos $G_0(E,\mathbf{r},\mathbf{r}')$ (31) formule nėra apibrėžta vienareikšmiškai, nes (32) integruojant kontūrą apie polius galima apeiti dviem skirtingais keliais. Panagrinėkime du būdus poliams apeiti. Pridėkime prie teigiamos energijos E mažą dydį $\pm i\varepsilon$, kurį po integralo suradimo sumažinsime iki nulio. Priklausomai nuo ε ženklo Gryno funkcijai prirašome indeksus (+) arba (−):

$$G_0^{(\pm)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} G_0^{(\pm)}(E\pm i\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}'). \tag{33}$$

Taip pat apibrėšime ir du Gryno operatorius:

$$\hat{G}_0^{(\pm)}(E) = \frac{1}{E\pm i\varepsilon - \hat{H}_0}\bigg|_{\varepsilon\to+0}. \tag{34}$$

Panaudodami rezidiumų techniką, gauname

$$G_0^{(+)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{35}$$

$$G_0^{(-)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{36}$$

Dabar parodysime, kad surastosios Gryno funkcijos patenkina asimptotikos (21) reikalavimą. Tam reikia $G_0^{(+)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}')$ įrašyti į (23). Bus reikalinga ir $G_0^{(+)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}')$ išraiška, kai $r \gg r'$:

$$G_0^{(+)}(E,\mathbf{r},\mathbf{r}')|_{r\gg r'} \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}. \tag{37}$$

Čia skaitikliui panaudotas skleidimas

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{rr}'}{\mathbf{r}} + \ldots \tag{38}$$

ir įvestas pažymėjimas

$$\mathbf{k}' = k\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{39}$$

Vektoriaus $\mathbf{k}'$ modulis lygus sklaidomos dalelės judėjimo kiekiui k. Jis nukreiptas stebėjimo kryptimi, todėl jis yra dalelės, išsklaidytos vienetinio vektoriaus $\mathbf{r}/r$ kryptimi, judėjimo kiekis.

Dar reikia aptarti sąveikos potencialus $V(r)$. Paprastumo dėlei apsiribosime potencialais, kurių veikimo atstumas yra baigtinis, t.y. esant atstumui, didesniam už d, sąveikos potencialas pasidaro labai mažas. Atstumas d tarsi padalina jėgos centro veikimą į vidinę ir išorinę sritis. Tokių potencialų pavyzdžiai yra:

stačiakampio formos potencialas

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq d; \\ 0 & r > d; \end{cases} \tag{40}$$

Jukavos potencialas

$$V(\mathbf{r}) = A\frac{e^{-r/a}}{\mathbf{r}}; \tag{41}$$

Gauso potencialas

$$V(r) = V_0 e^{-(r/b)^2}; \tag{42}$$

Vudso ir Saksono potencialas

$$V(r) = V_0 \frac{1}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})}. \tag{43}$$

Kuloninis potencialas yra potencialo, kuris nėra baigtinio veikimo spindulio potencialas, pavyzdys:

$$V_c(\mathbf{r}) = \frac{z_1 z_2 e^2}{\mathbf{r}}. \tag{44}$$

Laikydami, kad potencialas yra baigtinio veikimo spindulio potencialas, (23) integruojama iki $r = d$. Todėl, kai $r > d$, į (23) galima įstatyti apytikrią Gryno funkciją (37). Gauname, kad

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|_{r>d} = e^{i\mathbf{kr}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'d^3r')\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{\mathbf{r}}. \tag{45}$$

Įsitikome, kad Lipmano ir Švingerio lygtyje Gryno funkcijos panaudojimas užtikrina reikalingą banginės funkcijos $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ asimptotiką, t.y. plokščia banga plius sferinė banga. (23) sprendinį pažymime ženklu (+), kad parodytume, kad į ją įeina Gryno funkcija (35), ir perrašome šitokiu pavidalu:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \int G_0^{(+)}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\ V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r'. \tag{46}$$

Sutinkamai su (45) šios funkcijos asimptotika yra:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r})|_{r\to\infty} = e^{i\mathbf{kr}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k})\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{\mathbf{r}}, \tag{47}$$

kur

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{48}$$

vadinama **sklaidos amplitude**. Dideliuose atstumuose nuo jėgos centro jos kvadratas nusako sferinės bangos intensyvumą atžvilgiu krentančios į jėgos centrą plokščios bangos, t.y. ji parodo, kiek susilpnėja sklaidomoji plokščia banga.

Diferencialinio skerspjūvio sąryšis su sklaidos amplitude.

Pagal apibrėžimą diferencialinis skerspjūvis $d\sigma$, atitikantis erdviniam kampui $d\Omega$, yra lygus išsklaidytų dalelių, kurios patenka į šį erdvinį kampą, skaičiui, padalintam iš krentančių dalelių srauto tankio:

$$d\sigma = \frac{dn}{j_0}. \tag{49}$$

Iš kvantinės mechanikos žinome, kad srovės tankio tikimybė apibrėžiama šitaip:

$$j(\mathbf{r}) = -\frac{i\hbar}{2\mu}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \tag{50}$$

Tuomet dalelių skaičius dn yra išsklaidytų dalelių srauto tankio j_1 radialioji dedamoji, padauginta iš atitinkamo paviršiaus ploto:

$$dn = j_1 \, r^2 \, d\Omega. \tag{51}$$

Laikydami, kad (47) formulėje $\exp(i\mathbf{kr})$ aprašo į taikinį krentančių dalelių srauto tankį j_0, o antrasis sumos narys aprašo išsklaidytų dalelių srauto tankį j_1, atitinkamai įrašome (50) išraiškos pirmąjį ir antrąjį narius į (50) ir gauname:

$$j_0 = \frac{\hbar k}{\mu}. \tag{52}$$

$$dn = \frac{\hbar k}{\mu} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 d\Omega, \tag{53}$$

Diferencialinio sklaidos skerspjūvio išraiškai surasti belieka (52) ir (54) įrašyti į (49):

$$d\sigma = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 d\Omega. \tag{54}$$

Dažniausiai diferencialinis skerspjūvis užrašomas šitaip:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2. \tag{55}$$

Dabar akivaizdžiai matyti, kad sklaidos amplitudės kvadratas yra lygus diferencialiniam sklaidos skerspjūviui.

Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad čia diferencialinio skerspjūvio (55) išvedimas buvo formalus, nes (47) asimptotinės išraiškos dešinės pusės pirmąjį narį priskyrėme krentančių, o antrąjį – išsklaidytų dalelių srautams. Faktiškai reikėtų į (50) įrašyti visą funkciją (47). Tuomet gautoje išraiškoje $j(\mathbf{r})$ būtų nariai j_0, j_1 ir interferenciniai nariai. Būtent interferencinius narius ir atmetėme. Kodėl? Kokia jų fizikinė prasmė? Į šiuos klausimus atsakysime tolimesnėse paskaitose.