



# Netriviali dinamika rinkėjo modelyje su periodine sąveika

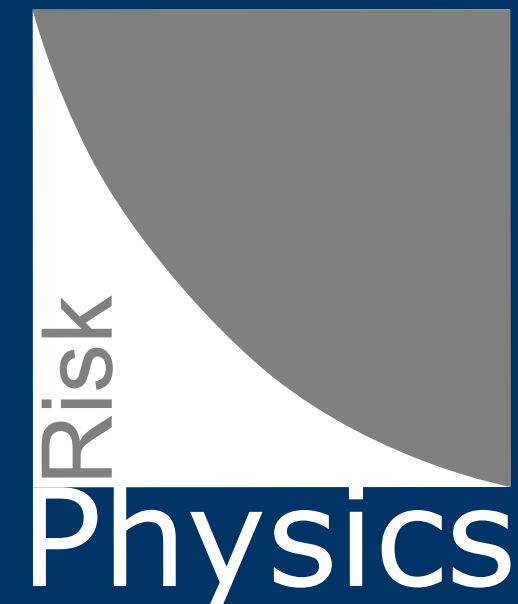
Aleksejus Kononovicius<sup>1</sup>, Rokas Astrauskas<sup>2</sup>, Marijus Radavičius<sup>3</sup>, Feliksas Ivanauskas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas

<sup>2</sup>Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Informatikos institutas

<sup>3</sup>Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Taikomosios matematikos institutas

✉ aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt 🔗 https://kononovicius.lt, https://rf.mokslasplius.lt



## Įvadas

Visuomenės nuomonės evoliucija yra sudėtingas procesas, kurį lemia gausybė tiesioginių ir netiesioginių faktorių. Fizikiniai nuomonių dinamikos modeliai dažniausiai remiasi tiesioginio aplinkos spaudimo (angl. *peer pressure*) mechanizmu. Nagrinėjama kaip informacija ar nuomonės plinta fiksuotuose ar kintančiuose socialiniuose tinkluose (dažniau žmoniškųjų tarpusavio ryšių prasme, nei Facebook ar kitų socialinių programėlių prasme). Vienas populiariausių sociofizikos modelių yra rinkėjo modelis.

Mes išnagrinėjome modifikuotą rinkėjo modelį, kuriame tiesiogines individų tarpusavio sąveikas pakeitėme netiesiogine sąveika per periodiškai atliekamas apklausas, kurių rezultatai yra skelbiami su delsa lygia apklausų periodui. Delsos įtaka rinkėjo modelio fenomenologijai jau buvo tirta [1], bet šiame darbe (ir kituose juo besiremiančiuose darbuose) delsa buvo įvesta kokybiškai kitu būdu. [1] darbe delsa atsiranda dėl paties rinkėjo nuomonės fiksavimo (pačios dalelės būsenos užšalimo), kai mūsų modifikacijoje užšąla stebima visos sistemos būseną. Taigi mes siūlome naują būdą įterpti delsą į fizikinius nuomonių dinamikos modelius, kuris gali turėti įdomių pasekmių modelio statistinėms savybėms.

Ši modifikacija yra įdomi ne tik tuo požiūriu, kad delsos įvedimas gali sukelti įdomių pasekmių. Ši modifikacija turi pagrindą kasdieniame gyvenime - nuomonių apklausoje. Jos atliekamos ne taip dažnai, ir jų rezultatai dažnai negali būti paskelbti iš karto. Jie turi būti surinkti, susisteminti ir apdoroti. Tad dažnai jie yra paskelbiami tik po kurio laiko.

Šis pranešimas yra paremtas [2] darbu.

## Rinkėjo modelis

Rinkėjo modelis (angl. *voter model*) [3] yra vienas plačiausiai nuomonių dinamikos srityje nagrinėjamų modelių. Tokį populiarumą lemia tiek modelio paprastumas, tiek atitikimas empiriniams duomenims [4], tiek tai, kad jis yra itin panašus į Izingo modelį.

Iš esmės rinkėjo modelį galima būtų apibrėžti analogiškai Izingo modeliui. Tarkime agentai (dalelės) yra patalpintos dvimatės kvadratinės gardelės mazguose. Tegu leistinos yra dvi būsenos pažymėtos kaip “0” ir “1” (pvz., atitiktų “ne” ir “taip” nuomonės). Kiekviename modeliavimo žingsnyje atsitiktinai pasirenkama agentas ir jo kaimynas. Tada agentas nukopijuoja kaimyno nuomonę. Modelį nesunku papildyti ir triukšmu – tiesiog su tam tikra tikimybe agentas savarankiškai pakeičia nuomonę.

Modelį galima apibrėžti ir tolydžiam laikui naudojant generacijos ir rekombinacijos (gimimo ir mirties) spartas. Tegu bendras agentų skaičius yra  $N$ , o būsenoje “1” yra  $X$  iš jų. Tegu savaiminių virsmų sparta yra  $\varepsilon$ , o sąveikos dažnis yra vienetinis. Tokiu atveju spartos:

$$\lambda(X \rightarrow X + 1) = \lambda^+ = (N - X) \cdot [\varepsilon + X], \quad \lambda(X \rightarrow X - 1) = \lambda^- = X \cdot [\varepsilon + (N - X)]. \quad (1)$$

Šios spartos yra apibrėžtos suderintiniame lauke. Mūsų atveju jau pats apklausų mechanizmas padarys, kad agentai sąveikautų vienas su kitu tik per bendrą informacinį lauką, kurį jie patys ir sukuria.

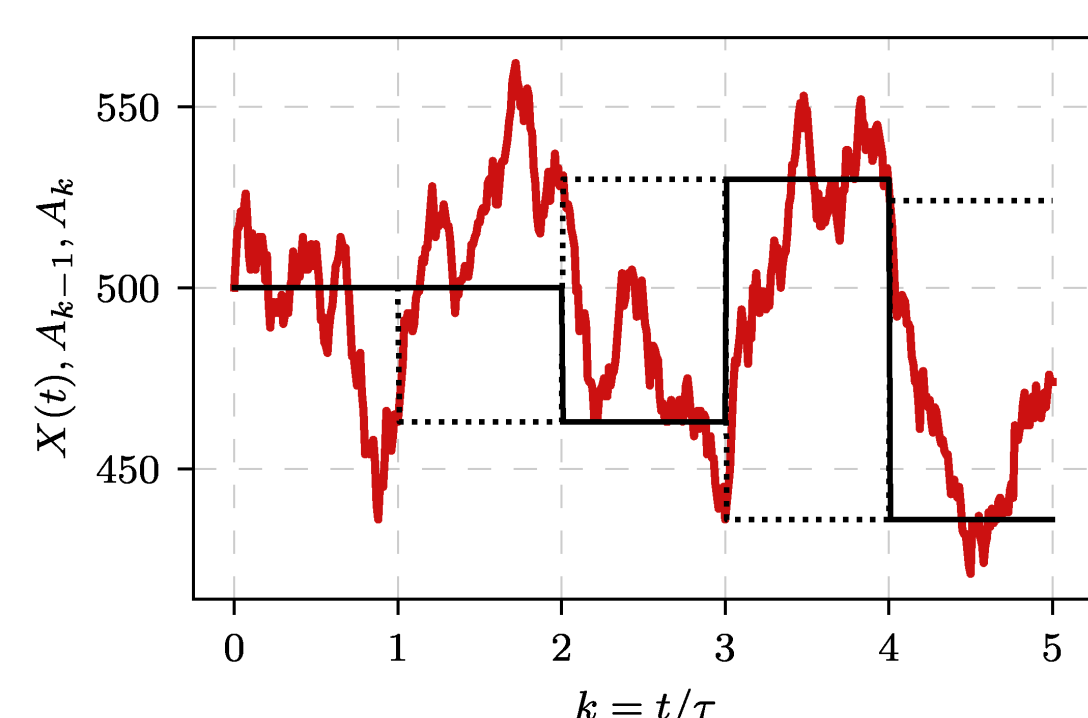
## Apklausų mechanizmas

Pažymėkime apklausų atlikimo periodą  $\tau$ . Tegu apklausoje yra atliekamos laiko momentais  $k\tau$  (kur  $k$  yra apklausoje numeris). Prieš atliekant  $k$ -tąją apklausą yra paskelbiamas anksčiau atliktos,  $(k - 1)$ -osios, apklausoje rezultatas. Taigi laiko momentu  $t$  agentai žino  $\lfloor \frac{t}{\tau} - 1 \rfloor$ -osios apklausoje rezultata. Modifikuotam modeliui spartas perrašome:

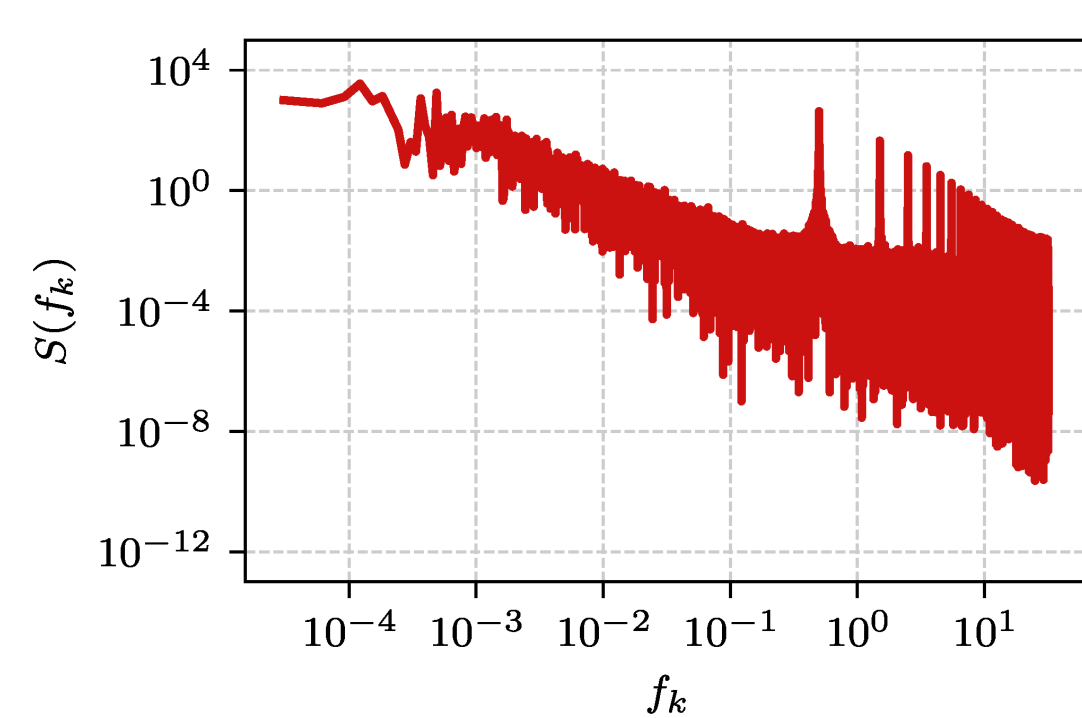
$$\lambda^+(t) = (N - X(t)) \cdot [\varepsilon + A_{\lfloor \frac{t}{\tau} - 1 \rfloor}], \quad \lambda^-(t) = X(t) \cdot [\varepsilon + (N - A_{\lfloor \frac{t}{\tau} - 1 \rfloor})]. \quad (2)$$

Čia  $A_k$  pažymėjome  $k$ -tosios apklausoje rezultata.

Žemiau, 1 pav., matome kaip atliekamų (juoda ištisinė kreivė) ir paskelbiamų (juoda taškuota kreivė) apklausų rezultatai veja realiai vykstančią modelio dinamiką (raudona kreivė). Stebime ir savaime atsirandančius periodinius svyravimus.



1 pav. (raudona) Modelio laiko eilutė, (taškai) paskutinės atliktos apklausoje rezultatas, (juoda) paskutinis žinomas apklausoje rezultatas.



2 pav. Pavyzdinės laiko eilutės galios spektrinis tankis apklausų indekso erdveje.

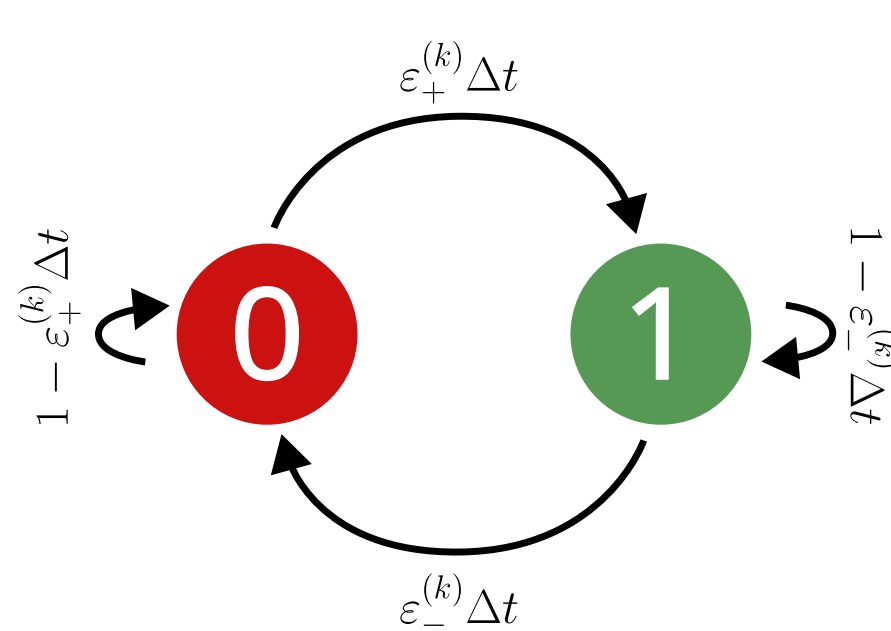
## Ekvivalentus AR(2) procesas

Svarbu pastebėti, kol  $k\tau \leq t < (k + 1)\tau$ , turime:

$$\begin{aligned} \varepsilon + A_{k-1} &= \text{const} = \varepsilon_+^{(k)}, \\ \varepsilon + (N - A_{k-1}) &= \text{const} = \varepsilon_-^{(k)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Taigi galime nagrinėti vieno agento šokinėjimą tarp būsenų “0” ir “1”. Tolydaus laiko riboje nesunku rasti tikimybę po laiko  $\theta$  stebėti agentą būsenoje “1”:

$$P_1(\theta = t - k\tau | s) = \frac{\varepsilon + A_{k-1}}{2\varepsilon + N} + \left[ s - \frac{\varepsilon + A_{k-1}}{2\varepsilon + N} \right] \exp[-(2\varepsilon + N)\theta]. \quad (4)$$



3 pav. Vieno agento Markovo grandinė.

Iš čia nesunku parodyti, kad modifikuotą rinkėjo modelio rezultatus galime gauti ir tiesiog generuodami du atsitiktinius binominius dydžius,  $B[N, p]$ ,

$$X(t + \theta) = B[X(t), P_1(\theta|1)] + B[N - X(t), P_1(\theta|0)]. \quad (5)$$

Bent jau kol  $k\tau \leq t \leq t + \theta \leq (k + 1)\tau$ .

Iš (5) lygties, galima išvesti AR(2) proceso lygtį apklausų rezultatams:

$$A_{k+1} = \varphi_1 A_k + (1 - \varphi_1) \varphi_2 (\varepsilon_1 + A_{k-1}) + \xi_{k+1}, \quad (6)$$

kur

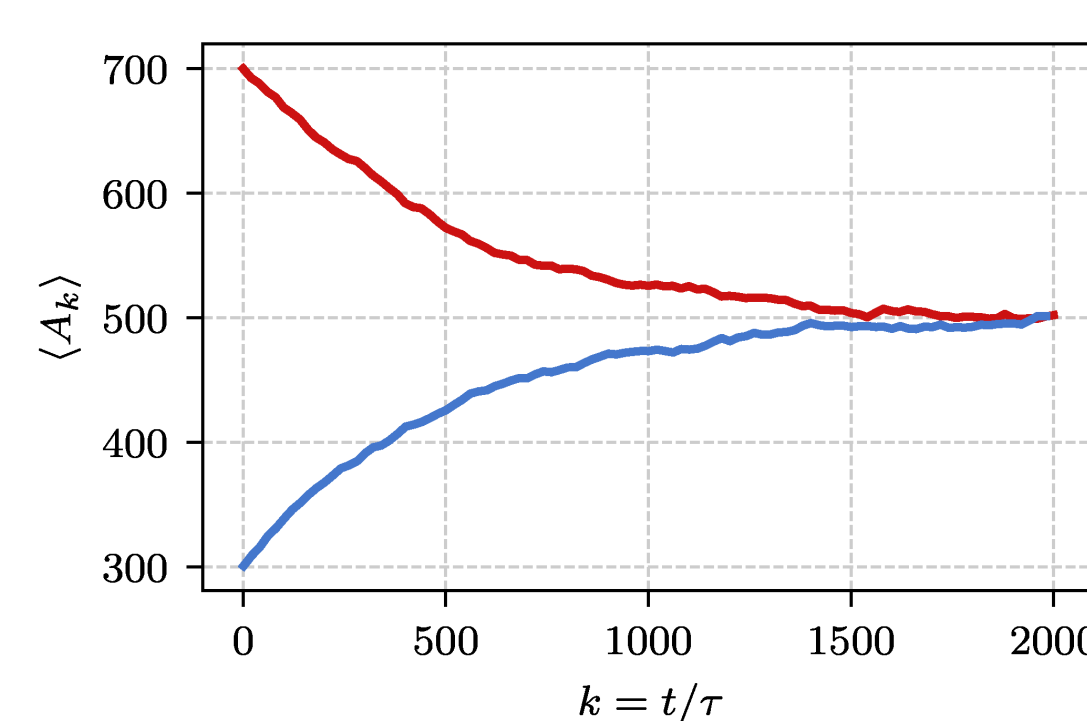
$$\varphi_1 = \exp[-(2\varepsilon + N)\tau], \quad \varphi_2 = \frac{N}{2\varepsilon + N}, \quad \langle \xi_k \xi_{k+\delta} \rangle = \begin{cases} \sigma^2, & \text{kai } \delta = 0 \\ 0, & \text{kai } \delta > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Čia  $\sigma^2$  gali būti įvertintas lyginant stacionarias AR(2) proceso ir (5) dispersijas.

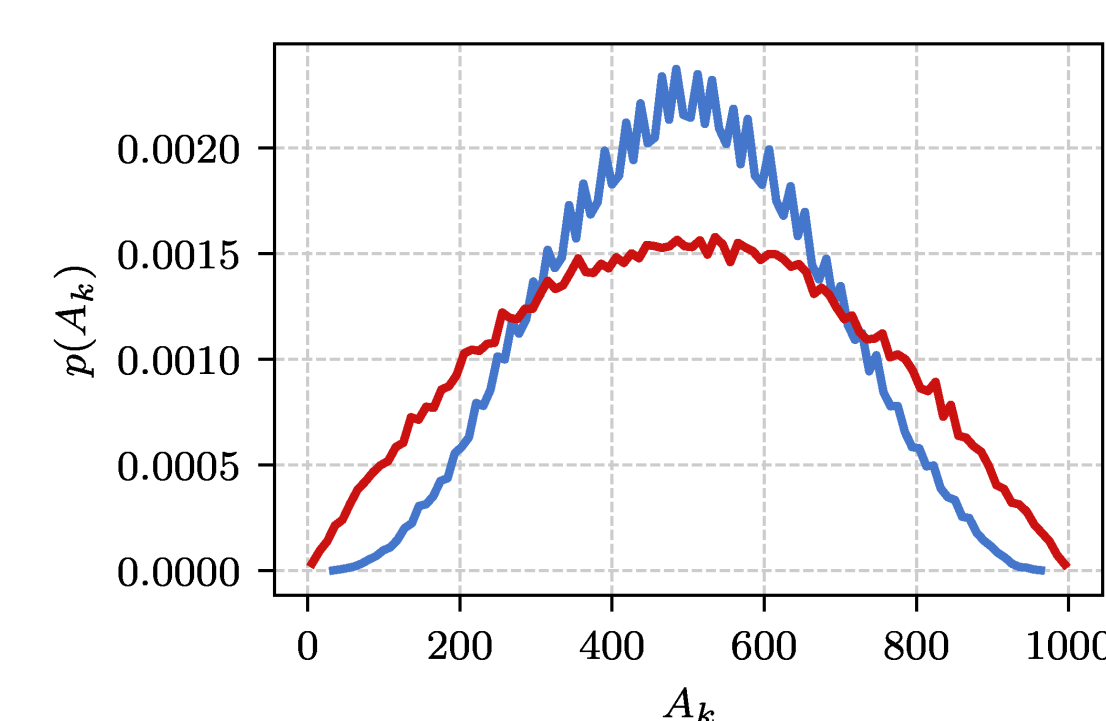
## Rezultatai

Žiūrint į AR(2) proceso lygtį galima padaryti du svarbius pastebėjimus:

- $\tau \rightarrow 0$  riboje ( $\varphi_1 \rightarrow 1$ ) galioja aproksimacija vienu AR(1) procesu.
- $\tau \rightarrow \infty$  riboje ( $\varphi_1 \rightarrow 0$ ) galioja aproksimacija dviem nepriklausomais AR(1) procesais.

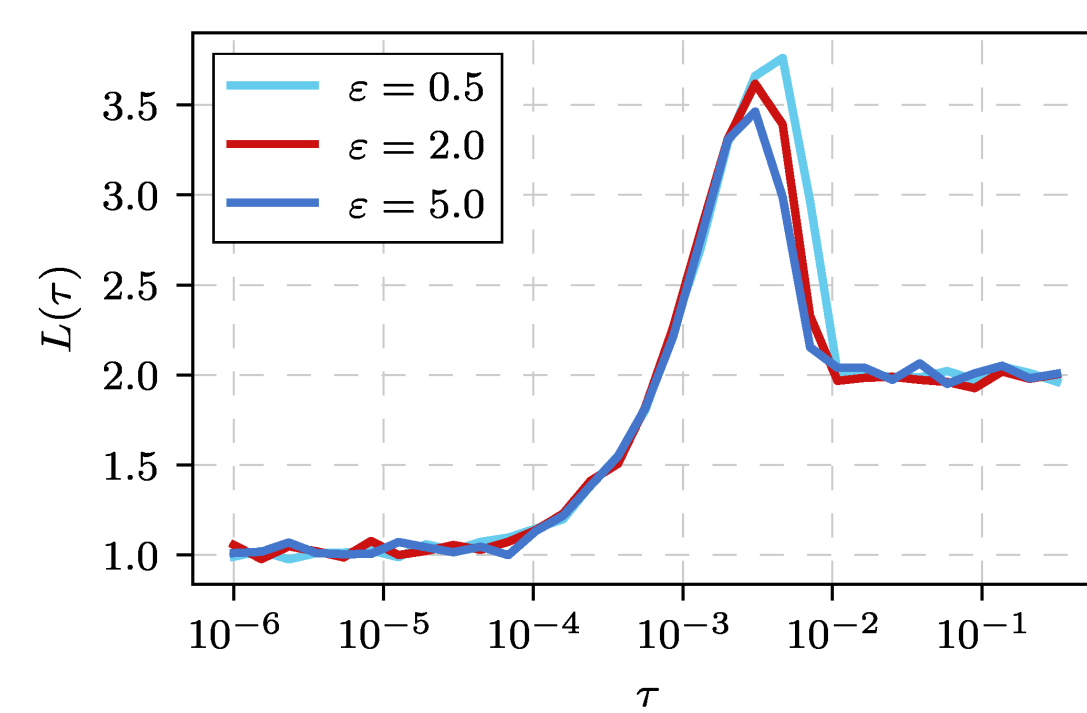


4 pav. Ansamblio vidurkis didelių  $\tau$  riboje: (raudona) lyginės ir (mėlyna) nelyginės apklausoje.

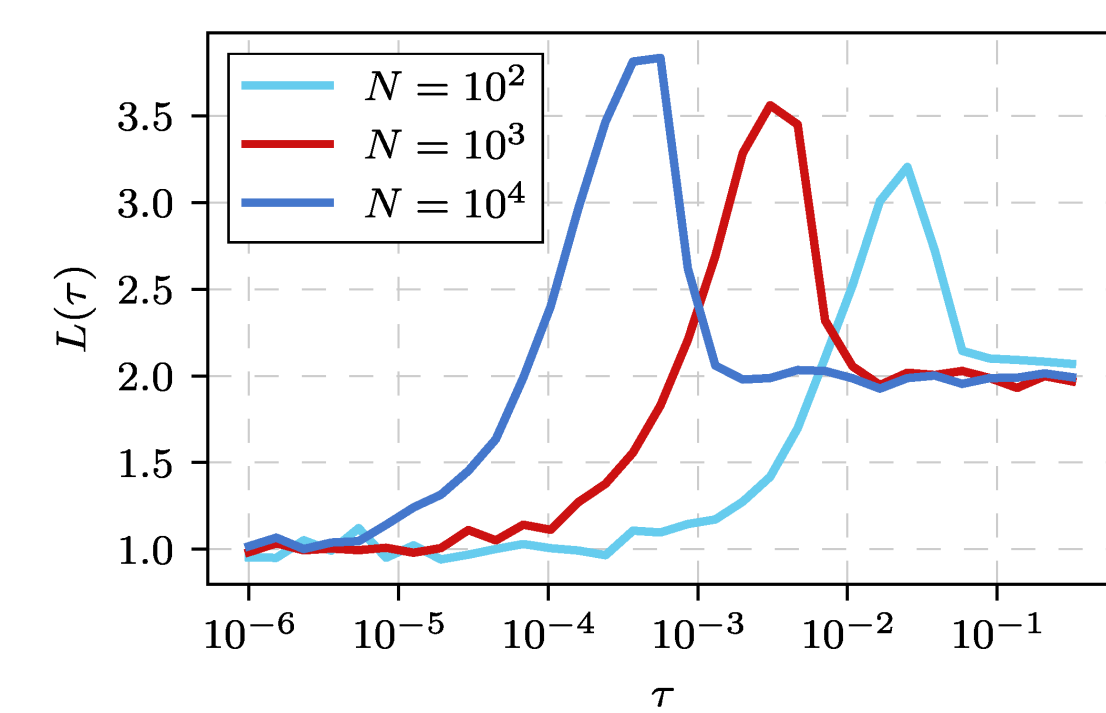


5 pav. Stacionarus skirstiniai (raudona) mažų  $\tau$  ir (mėlyna) didelių  $\tau$  riboje.

5 pav. sufleruoja, kad stacionarus skirstinys įvairiems  $\tau$  gali būti apytiksliai beta-binominis. Tik parametrai vertės gali būti  $\tau$  funkcija. Parametrai vertės kiekvienam  $\tau$  galima nustatyti galima nustačius stacionarų vidurkį (trivialu) ir dispersiją (reikia pasinaudoti Yule-Walker lygtimis [5]). Mes parodėme [2], kad  $\alpha = \varepsilon L(\tau)$  ir  $\beta = \varepsilon L(\tau)$  (kur už  $L(\tau)$  slypi sudėtinga išraiška; kaip jis kinta priklausomai nuo modelių parametrai pademonstravome paveiksluose žemiau).



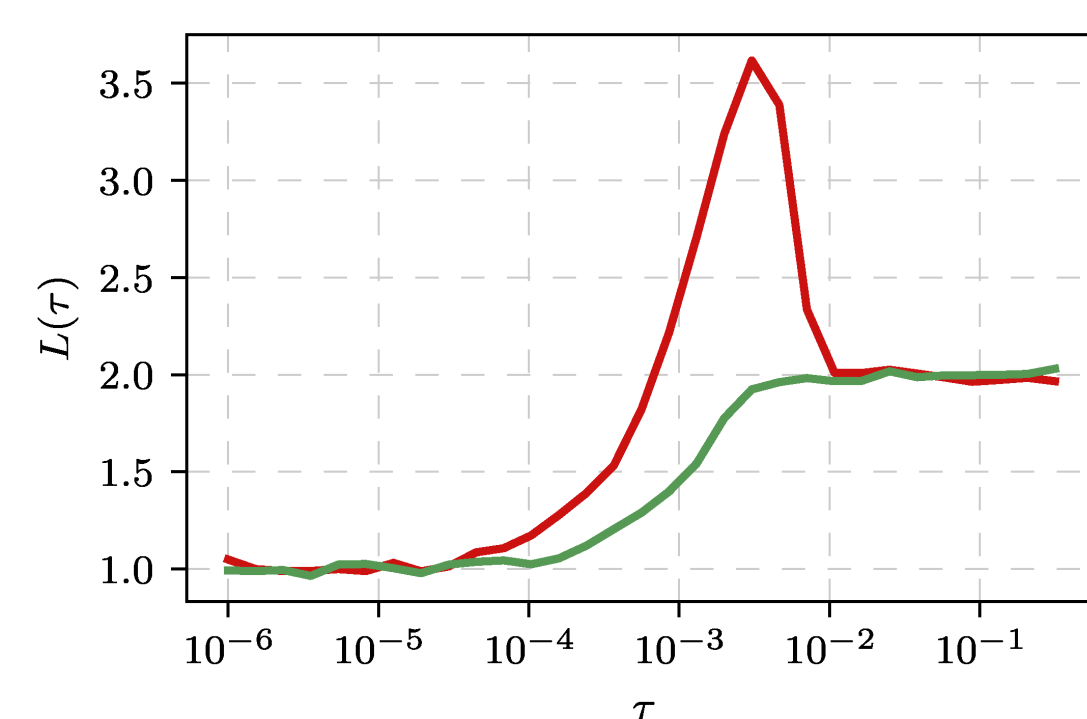
6 pav.  $L(\tau)$  priklausomybė nuo  $\varepsilon$ .



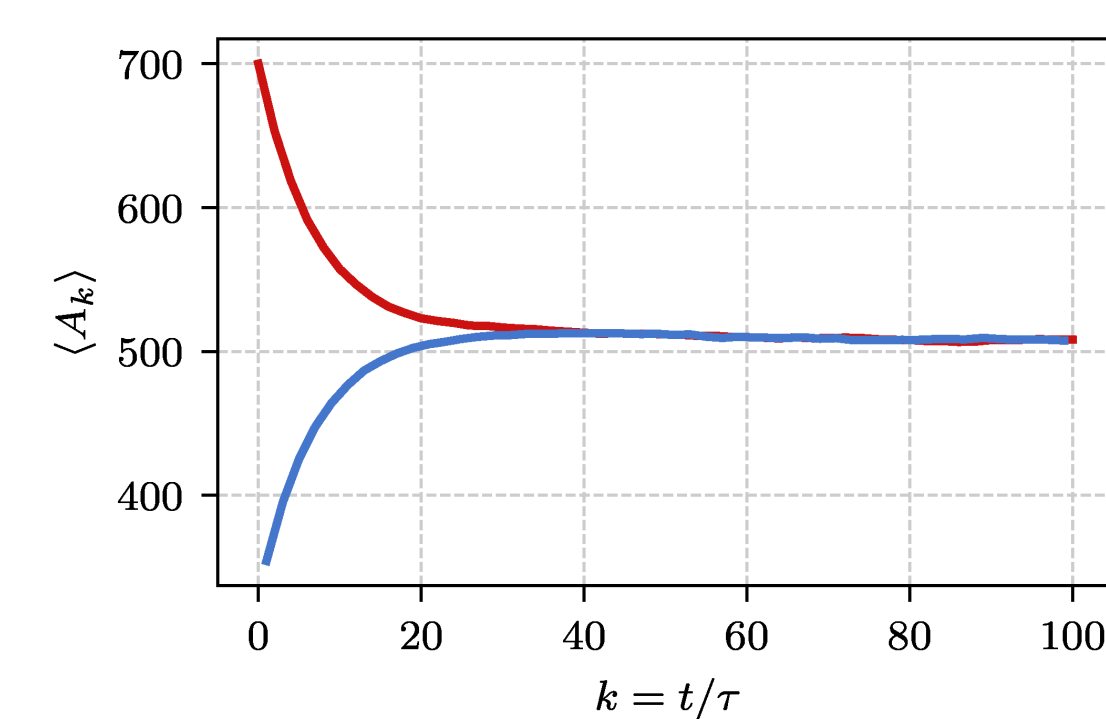
7 pav.  $L(\tau)$  priklausomybė nuo  $N$ .

## Intuicija

Suvesti AR(2) procesą į AR(1) galime ir kitu būdu. Galime tiesiog atsakyti apklausų paskelbimo delsos. T.y., periodinių apklausų mechanizmą palikti, bet naujausios apklausoje informacija taptų prieinama iš karto. Taigi, iš 8 pav. galime daryti išvadą, kad  $L(\tau)$  maksimumas yra nulemtas delsos, bet ir apklausų periodiškumas turi pastebimą efektą, kai  $\tau$  yra didelis.



8 pav.  $L(\tau)$  (raudona) modelyje su delsa ir (žalia) be delsos.



9 pav. Ansamblio vidurkis “tarpiniam”  $\tau$ : (raudona) lyginės ir (mėlyna) nelyginės apklausoje.

9 pav. matome užuominą kuo tarpinės  $\tau$  vertės modelyje su delsa yra ypatingos. Tarpinėms  $\tau$  vertėms,  $X$  spėja pakisti nuo pradinės vertės, bet nespėja per daug toli nuo jos nutolti. Tokiu atveju procesas kurį laiką elgiasi kaip du nepriklausomi AR(1) procesai (greta didelių svyravimų), bet gana greitai pereina į vieno AR(1) proceso “režimą”.

## Literatūra

- [1] R. Lambiotte *et al.*. PRE **79**: 046107 (2009).
- [2] A. Kononovicius *et al.*. Physica A **652**: 130062 (2024).
- [3] P. Clifford, A. Sudbury. Biometrika **60**: 581–588 (1973).
- [4] A. Kononovicius. Complexity **2017**: 7354642.
- [5] P. J. Brockwell, R. A. Davis. *Time Series: Theory and Methods* (Springer, 1991).