Trupmeninio Gauso triukšmo sąlygoti taškiniai procesai

Aleksejus Kononovicius, Rytis Kazakevičius, Bronislovas Kaulakys
Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 3, 10257 Vilnius
aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt, http://kononovicius.lt, http://rf.mokslasplius.lt

Įvadas

Modeliuojant daugelį sistemų daroma Markovo prielaida. Tariama, kad sistemos ateičiai svarbi tik dabartinė sistemos būsena. Visgi yra sistemų, kurių dinamikai įtaką turi ir sistemos trajektorija (ankstesnės būsenos). Sakoma, kad sistema turi ilgą atmintį, jei jos dinamiką nusakančių laiko eilučių autokoreliacijos funkcijos gęsta laipsniškai lėtai. Tai byloja apie tai, kad sistemos dinamikai įtaką turi labai tolima praeitis. Įdomu tai, kad šia savybe pasižyminčių sistemų sutinkame tiek fizikinėse, tiek kitokiose sistemose.

Egzistuoja modeliai (pvz., ARCH modeliai ar trupmeninis Brauno judėjimas) kurie ilgą atmintį įskaito tiesiogiai. Tuo tarpu mūsų grupės kuriami modeliai ilgą atmintį atkuria nepažeisdami Markovo prielaidos [1]. Pirmieji mūsų grupės modeliai buvo paremti taškiniu procesu, kuris buvo pasiūlytas [2] darbe. Vėliau šis modelis buvo apibendrintas ir užrašytas kaip netiesinė stochastinė diferencialinė lygtis, kurios laipsninės statistinės savybės buvo detaliai išanalizuotos tiek analiziškai, tiek skaitmeniškai [1]. Šiame darbe mes apibendriname šį taškinį procesą pažeisdami Markovo prielaidą.

Ilga atmintis Markovo taškiniame procese

Taškinį procesą sudaro tam tikrais laiko momentais, t_k, įvykę įvykiai (pvz., fotono kontaktas su detektoriumi ar sandoris finansų rinkose). Įvykius nusako jų profiliai (pvz., sistemos atsakas), $A_k(t)$. Taigi taškinio proceso laiko eilutė yra gaunama sumuojant visų įvykių profilius:

$$x(t) = \sum_k A_k (t - t_k) . \tag{1}$$

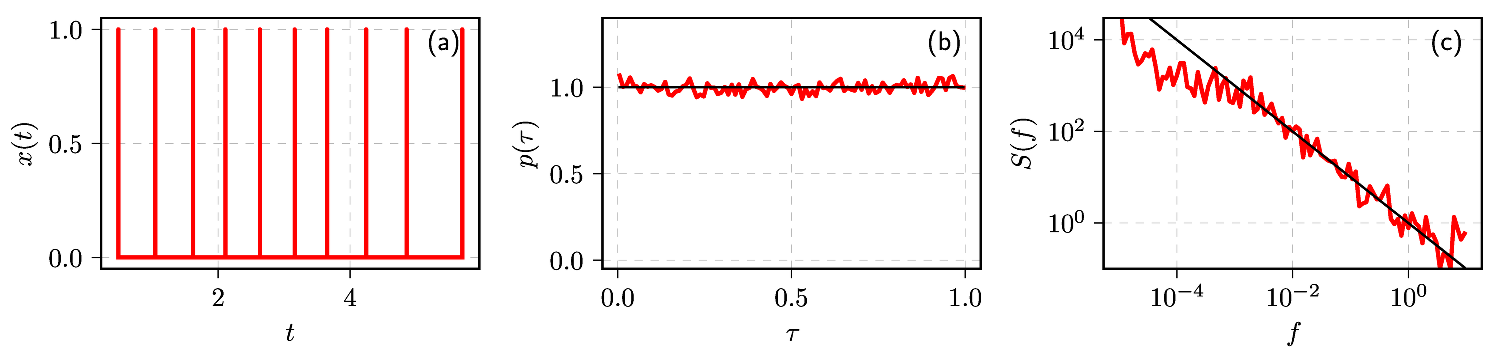
Paprastumo dėlei tarsime, kad mūsų nagrinėjami įvykiai turi Kronekerio delta funkcijos profilius, $A_k(t) = \delta(t)$. Tokį taškinį procesą pilnai nusako tarplaikių rinkinys $\{\tau_k = t_{k+1} - t_k\}$. Bendresniu atveju įvykių profiliai gali būti sudėtingesni ar turėti įvairias formas.

[2] darbe pasiūlyta tarplaikius modeliuoti naudojant Brauno judėjimą:

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \sigma \cdot \varepsilon_k, \tag{2}$$

čia ε_k yra standartinis nekoreliuotas Gauso triukšmas. Parametro σ vertė turėtų būti mažas teigiamas skaičius, priešingu atveju iteracinė lygtis neaprašo Brauno judėjimo.

Žinoma, tarplaikiai negali būti neigiami, o pats tarplaikių procesas turėtų būti stacionarus. Tad iteracinė lygtis (2) yra sprendžiama naudojant kraštines sąlygas iš mažų ir didelių verčių pusės. Tegu τ_k gali įgyti vertes intervale $[\tau_{min}, \tau_{max}]$, jei τ_k paliktų šį intervalą, tai naujoji τ_k vertė yra prilyginama apatinei arba viršutinei intervalo ribai.



1 pav. Taškinio proceso, (2) lygtis, (a) laiko eilutės fragmentas, (b) tarplaikių skirstinys ir (c) laiko eilutės galios spektrinis tankis. Modelio parametrai: $\sigma = 0.1$, $\tau_{min} = 0$, $\tau_{max} = 1$.

Šis elementarus taškinis procesas pasižymi tolygiu tarplaikiu skirstiniu, o šio proceso laiko eilutė $x(t)$ pasižymi ilga atmintimi ($S(f) \sim 1/f$), nors Markovo prielaida nėra pažeidžiama.

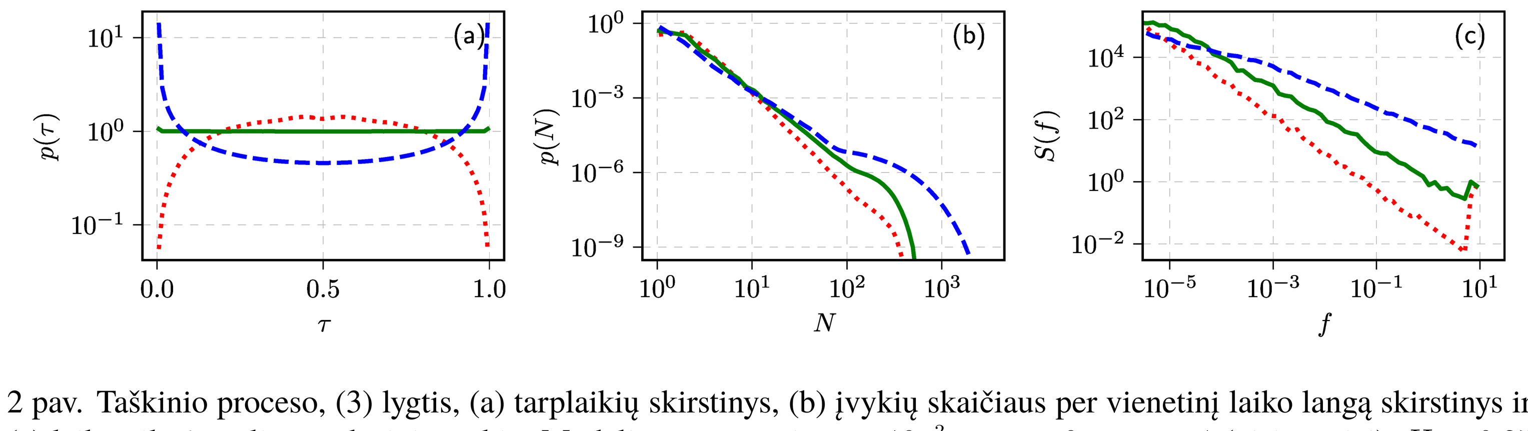
Trupmeninis taškinis procesas

Mes apibendriname (2) iteracinę lygtį nekoreliuotą Gauso triukšmą pakeisdami trupmeniniu Gauso triukšmu:

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \sigma \cdot \varepsilon_k^{(H)}, \tag{3}$$

čia H yra triukšmo Hursto rodiklis. $H = 0.5$ atvejis yra ekvivalentus originaliam taškiniam procesui. $H < 0.5$ atveju triukšmas yra anti–koreliuotas, o $H > 0.5$ atveju – koreliuotas. Šios koreliacijos turi įtaką tiek tarplaikių skirstiniui, tiek įvykių skaičiaus skirstiniui, tiek laiko eilutės spektrui.

Tarplaikių skirstinį ganėtinai gerai nusako simetriškas Beta skirstinys, kai triukšmas yra antikoreliuotas tarplaikių tikimybės tankis tampa išgaubtas, kai triukšmas yra koreliuotas tarplaikių tikimybės tankis tampa įgaubtas. Šis pastebėjimas yra suderinamas su kitų autorių darbais [3]. Įvykių skaičiaus skirstinys keičiasi nežymiai, bet pastebimas jo plokštėjimas didėjant H. Galios spektrinis tankis panašėja į baltą triukšmą didėjant H.



2 pav. Taškinio proceso, (3) lygtis, (a) tarplaikių skirstinys, (b) įvykių skaičiaus per vienetinį laiko langą skirstinys ir (c) laiko eilutės galios spektrinis tankis. Modelio parametrai: $\sigma = 10^{-3}$, $\tau_{min} = 0$, $\tau_{max} = 1$ (visi atvejai), $H = 0.35$ (raudona taškuota kreivė), 0.5 (žalia kreivė) ir 0.8 (mėlyna brūkšniuota kreivė).

Mes galime išvesti taškinį procesą, kurio tarplaikiai irgi būtų pasiskirstę pagal simetrišką Beta skirstinį, bet kuris būtų Markovo procesas. Tokių procesų yra be galo daug, bet mums tinka tik tas, kurio triukšmo (difuzijos) narys nepriklauso nuo tarplaikio:

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \sigma^2 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tau_k} - \frac{1}{1-\tau_k} \right) + \sigma \varepsilon_k, \tag{4}$$

čia parametras α nusako tarplaikių skirstinio formą, $\mathcal{B}e(\alpha+1, \alpha+1)$. Šių dviejų taškinių procesų tarplaikių skirstiniai turėtų sutapti, kai $\alpha = 1/H - 2$.

Trupmeninio triukšmo įtaka

Taškinių procesų, kurių iteracinės tarplaikių lygtys yra (3) ir (4), lyginimas leidžia mums suprasti kiek netrivialios įtakos turi proceso trupmeninis triukšmas. Šie taškiniai procesai turi tuos pačius tarplaikių skirstinius, bet jų kitos statistinės savybės turėtų skirtis.

Yra žinoma, kad abiems lyginamiems taškiniams procesams trumpiems tarplaikiams, $\tau \ll \tau_{max}$:

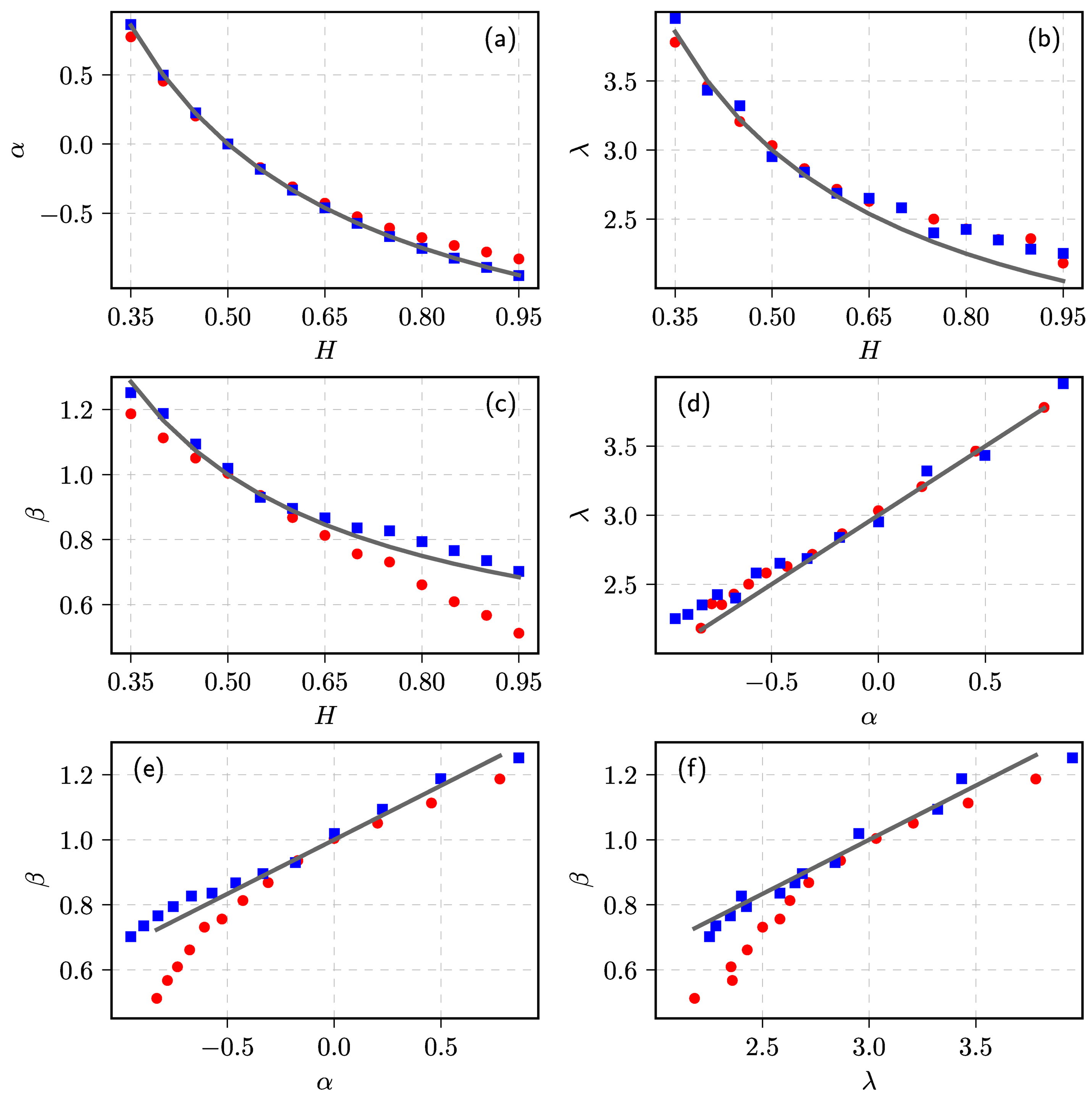
$$p(\tau) \propto \tau^{\alpha}, \quad \alpha \approx \frac{1}{H} - 2. \tag{5}$$

Jei taškinis procesas yra Markovo procesas, tai perėjęs prie realaus laiko ir atlikę kintamųjų pakeitimą $N = 1/\tau$ galime įvertinti įvykių skaičiaus skirstinio ir galios spektrinio tankio formas. Jei tarplaikiai kinta pagal (4), tai įvykių skaičiaus skirstinys bus laipsninis tam tikroje verčių srityje:

$$p(N) \propto N^{-\lambda}, \quad \lambda = \alpha + 3 = \frac{1}{H} + 1. \tag{6}$$

Galios spektrinio tankio įvertinimas yra sudėtingesnė procedūra, bet (4) lygtis yra iš esmės panaši į jau išnagrinėtą (2) lygties apibendrinimą [4]. Iš šio panašumo seka, kad galios spektrinis tankis tam tikroje dažnių srityje:

$$S(f) \propto f^{-\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\alpha}{3} = \frac{\lambda}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{H} + 1 \right). \tag{7}$$



3 pav. Taškinių procesų, (3) lygtis (raudoni skrituliai) ir (4) lygtis (mėlyni kvadratai), statistinių savybių laipsnio rodiklių priklausomybė nuo Hursto rodiklio ((a), (b) ir (c)) ir tarpusavio sąryšiai ((d), (e) ir (f)). Pilkos kreivės analiziškai gaunamus sąryšius. Taškinių procesų parametrai: $H = \{0.35, 0.4, 0.45, \ldots, 0.95\}$, $\alpha = 1/H - 2$, $\sigma = 10^{-3}$, $\tau_{min} = 10^{-6}$, $\tau_{max} = 1 - \tau_{min}$.

3 pav. matome, kad Markovo taškiniam procesui, (4) lygtis, gauti skaitmeniniai rezultatai ganėtinai gerai atitinka analiziškai numatytus sąryšius, (5), (6) ir (7). Trupmeninio taškinio proceso, (3) lygtis, atveju sutapimas yra blogesnis, bet esmingesnis išsiskyrimas matomas tik galios spektriniam tankiui.

Išvados

Matome, kad trupmeninio Gauso triukšmo įvedimas turi pastebimą įtaką taškinio proceso statistinėms savybėms. Dalį pokyčių, tarplaikių ir įvykių skaičiaus skirstinius, galima sėkmingai atkartoti ir Markovo taškiniu procesu papildytu dreifo nariu. Tačiau dreifo įvedimas neatkartoja pokyčio galios spektriniame tankyje, kurį sukelia trupmeninio Gauso triukšmo įvedimas.

Paveikslas 3(f) sufleruoja, kad pokyčius galios spektriniame tankyje galima būtų paaiškinti kitu būdu - į Markovo taškinį procesą įvedus netiesiškumo laipsnį, kuris priklausytų nuo H. Netiesiškumo laipsnio įtaka Markovo taškinio proceso galios spektriniam tankiui jau anksčiau buvo tirta skaitmeniškai ir analiziškai [1]. Visgi toks tolesnis apibendrinimas leistų geriau suprasti sąveiką tarp lygčių netiesiškumo ir tikros ilgos atminties, kurią šio darbo kontekste atspindi trupmeninio Gauso triukšmas.

Literatūra

[1] R. Kazakevičius *et al.*. Entropy 23: 1125 (2021).
[2] B. Kaulakys, T. Meskauskas. Phys Rev E 58: 7013–7019 (1998).
[3] T. Vojta *et al.*. Phys Rev E 102: 032108 (2020).
[4] V. Gontis, B. Kaulakys. Phys A 344: 128–133 (2004).

Padėka

AK dėkoja Lietuvos mokslų akademijai už skirtą jaunojo mokslininko stipendiją (2020–2021 m., tema "Netiesiškumo įtaka trupmeninio Gauso triukšmo ilgos atminties savybėms").