# Nuo atsitiktinio klaidžiojimo iki Levy procesų: Įvadas į ekonofiziką

Aleksejus Kononovičius

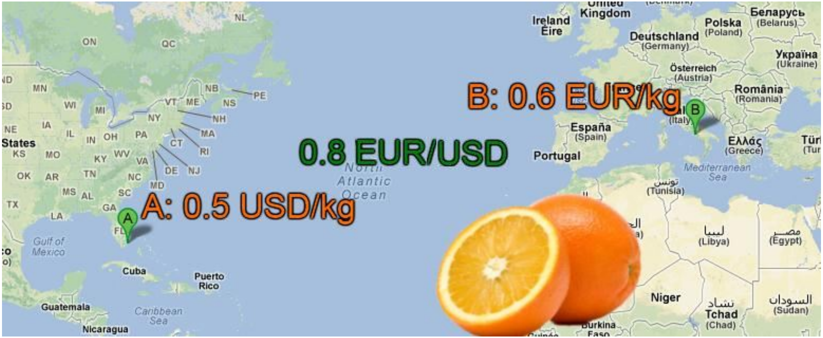
2013-02-22

Pagal R. N. Mantegna ir H. E. Stanley knygos “An Introduction to the Econophysics” 2, 3 ir 4 skyrius

# Apie ką šnekėsime...

1. Efektyvios rinkos hipotezė - atsitiktinumai ir kainos dinamika idealiose rinkose
2. Atsitiktinis klaidžiojimas - Centrinė ribinė teorema (Gauso skirstinys)
3. Levy stochastiniai procesai - kitos ribinės teoremos ir jų skirstiniai

# Arbitražas




Nusipirkę 100 tūkst. kg apelsinų Majamije ir pervežę juos į Neapolį (tegu už 0.1 EUR/kg) gausime 10 tūkstančių EUR užtikrinto pelno.

$$10^5[0.6 - (0.8 \cdot 0.5) - 0.1] = 10^4$$

# Arbitražas finansų rinkose


Tas pats "triukas" gali būti atliktas esant kainų skirtumams vertybinių popierių biržose...

$$1000\left(\frac{8}{0.8}-9\right)=1000$$

Kainos laikui bėgant, sandoriams vykstant, susilygins!

# Efektyvios rinkos hipotezė

"Efektyvi yra tokia rinka, kuri apdoroja informaciją vos tik ją gavusi ir iš karto atspindi naujai įgytas žinias per naują rinkos kainą" (E. N. Fama, XX a. 7 dešimt.).

Pasinaudodamas šia hipoteze Samuelson parodo, kad efektyvios rinkos yra markovinės ir "sąžiningos":

$$\mathbf{E}\{Y_{t+1}|Y_0, Y_1, \ldots, Y_t\} = Y_t.$$

Arba kitaip tariant - tikėtinas pelnas ir tikėtinas nuostolis yra lygiaverčiai (ir vienodai tikėtini).

Panašiu metu Kolmogorov ir Chaitin nagrinėja informacijos "spūdumą". Pasiūloma algoritminio sudėtingumo teorija. Jos pagrindą sudaro efektyviausių algoritmų atkuriančių pasirinktą laiko eilutę paieška.

Šiuolaikiniame kontekste šios teorijos idėja veikiausiai geriausiai suprantama per archyvavimo algoritmus (pvz., $RLE$). Jų esmė yra atrasti duomenyse pasikartojančias struktūras. O jas vėliau panaudoti sumažinant duomenų apimtį - t.y. "suspausti".

$$\text{RLE}: \quad \ldots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \ldots \quad \rightarrow \quad \ldots 0\,7\,1\,5\,0\,2 \ldots$$

# Trumpai:

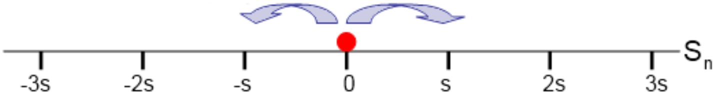
- Arbitražas - elementariausias informacijos pavertimo kainos kitimu mechanizmas.
- Idealios rinkos yra “sąžiningos” ir markovinės.
- Finansų rinkose yra daug nespūdžios informacijos.

**Kas iš to?** Stochastiniai procesai gali būti formalizuojami kaip Markovo grandinės ir jų laiko eilutės taip pat nėra itin spūdžios. O tokie stochastiniai procesai kaip Brauno judesys dar yra ir “sąžiningi”. Taigi stochastinius procesus prasminga taikyti finansų rinkos modeliavimui.

# Atsitiktinis klaidžiojimas I: Uždavinys

Tarkime turime paprasčiausią atvejį:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad x_i = \pm s.$$




Kokios yra $S_n$ savybės (pvz., skirstinio momentai)?

# Atsitiktinis klaidžiojimas II: Momentų radimas

Akivaizdu, kad vieno žingsnio metu:

$$P_{S_1} = \frac{1}{2}\left[\delta(S+s) + \delta(S-s)\right],$$

$$f_{S_1} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{S_1} \exp(ikS) \mathrm{d}S = \cos(ks).$$

Jei žingsniai yra nepriklausomi, tai įvykių sumos charakteringoji funkcija bus lygi atskirų įvykių charakteringųjų funkcijų sandaugai:

$$f_{S_N} = (f_{S_1})^N = \cos^N(ks).$$

Skleidžiame charakteringą funkciją $k = 0$ aplinkoje ir randame skirstinio momentus:

$$\langle S_N \rangle = 0, \quad \langle S_N^2 \rangle = N s^2.$$

# Ats. klaidžiojimas III: Nykstamai mažo žingsnio riba

$$P_{S_n} = P_S(S, N\Delta t) = P_S(S, t), \quad \Rightarrow \quad f_{S_n}(k) = f_S(k, N\Delta t) = f_S(k, t).$$

$$\frac{f_S(k, (N+1)\Delta t) - f_S(k, N\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\cos(ks) - 1}{\Delta t} f_S(k, N\Delta t) \approx$$

$$\approx -\frac{s^2 k^2}{2\Delta t} f_S(k, N\Delta t),$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_S(k, (N+1)\Delta t) - f_S(k, N\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial f_S(k,t)}{\partial t},$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\Delta t \to 0} \lim_{s\to 0} \left( -\frac{s^2 k^2}{2\Delta t} f_S(k, N\Delta t) \right) = -Dk^2 f_S(k,t), \quad D = \frac{s^2}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial f_S(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 f_S(k,t), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_S(t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P_S(t)}{\partial S}.$$

Gauname difuzijos lygtį - jos sprendinys yra Gausas.

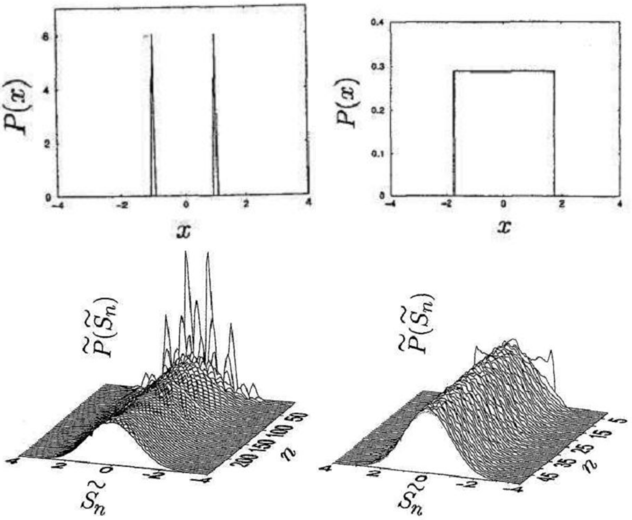
# Centrinė ribinė teorema I: Formaliai

CRT praplečia ankstesnį rezultatą - ji apibrėžia atskirą skirstinių aibę, kurie vykstant atsitiktiniam klaidžiojimui konverguoja į Gausą. Ji teigia, kad:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \mathbf{E}\{x_i\} = 0, \, \mathbf{E}\{x_i^2\} = s_i^2, \, p(x_i, x_j) = p(x_i) p(x_j) \, \forall i, j,$$

$$\tilde{S}_N = \frac{S_N}{\sigma_N}, \quad \text{kur } \sigma_N^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2, \quad \text{yra pasiskirstęs kaip} \quad \mathcal{N}(0,1).$$

# Centrinė ribinė teorema II: Pavyzdžiai



# Centrinė ribinė teorema III: Konvergavimo greitis

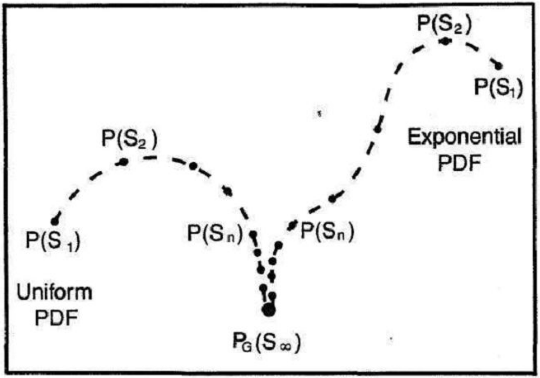
## Berry-Esseen teorema:

Tarkime turime $x_i$, kurie tenkina CRT sąlygas, papildomai tarkime, kad:

$$\mathbf{E}\{|x_i|^3\} = r_i, \quad \rho_N = \sum_{i=1}^{N} r_i, \quad \Rightarrow \quad |F_N(S) - \Phi(S)| \leq \frac{6\rho_N}{s_N^3},$$

kur $F_N(S)$ ir $\Phi(S)$ yra kumuliatyvus skirstiniai (pirmasis yra tas kuris konverguoja į antrąjį (Gausinį)).

# Trumpai:




Skirstiniai, nuosavoje fazinėje erdvėje, suformuoja tam tikrą baseiną, kurio atraktorius yra Gauso skirstinys.

# Stabilūs skirstiniai I: Paprasti atvejai

Stabiliu vadinamas toks skirstinys, kurio funkcinė forma išlieka nepakitusi sudėjus du šiam skirstiniui paklūstančius atsitiktinius dydžius.

Lorentzo skirstinys:

$$p_1(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2}, \quad \Rightarrow \quad f_1(k) = \exp(-\gamma |k|).$$

$$f_2(k) = f_1(k)^2 = \exp(-2\gamma |k|), \quad \Rightarrow \quad p_2(x) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{4\gamma^2 + x^2}$$

Gauso skirstiniui $f_1(k) = e^{-\gamma k^2}$ $(\gamma = \sigma^2/2)$, tad akivaizdu, kad $p_2(x) = \mathcal{N}_x(0, \sqrt{2}\sigma)$ .

# Stabilūs skirstiniai II: Bendra išraiška

Levy ir Khintchine yra užrašę bendrą charakteringosios funkcijos išraišką stabiliems skirstiniams:

$$\ln[f(k)] = i\mu k - \gamma |k|^\alpha \begin{cases} \left[1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right], & \alpha \neq 1 \\ \left[1 + i\beta \frac{k}{|k|} \frac{2}{\pi} \ln|k|\right], & \alpha = 1 \end{cases},$$

kur $\alpha \in (0, 2]$, $\gamma > 0$ yra mastelis, $\mu \in \mathbb{R}$, o $\beta \in [-1, 1]$ yra asimetrijos rodiklis.

Nagrinėtus atvejus įžvelgti šioje bendroje išraiškoje neturėtų būti sunku:

- Gausas: $\alpha = 2$, $\beta = 0$.
- Lorencas: $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

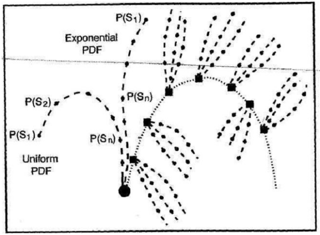
# Stabilūs skirstiniai III: Laipsniniai skirstiniai

Tegu $\mu = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\alpha < 2$:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|^\alpha} e^{-ikx} \mathrm{d}k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-k^\alpha} \cos(kx) \mathrm{d}k \sim |x|^{-\alpha-1}.$$

Tinkamas normavimas:

$$\tilde{x}_N = \frac{x_N}{N^{1/\alpha}\sigma}.$$



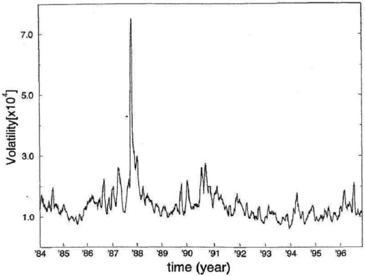
# Laipsninių skirstinių interpretavimas

**Uždaroje pusiausviroje sistemoje** laipsninis skristinys yra neįmanomas, mat tai reikštų, kad sistemos temperatūra yra begalinė. Mūsų laikais laipsniniai skirstiniai yra naudojami **atvirų sistemų** aprašymui. Laipsninės priklausomybės taip pat sietinos su **kritinėmis būsenomis**.

| $n$ | coins won | probability | expected winnings |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1/2 | $1 \times 1/2$ |
| 2 | 2 | 1/4 | $2 \times 1/4$ |
| 3 | 4 | 1/8 | $4 \times 1/8$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $2^{n-1}$ | $1/2^n$ | 1/2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

# Kainų pokyčių statistika

Lyg šiol naudojome dvi esmines prielaidas: (i) $x_i$ turi būti nepriklausomi ir (ii) identiškai pasiskirstę.




(ii) prielaidos galima atsisakyti pasinaudojant Bawly ir Khintchine ribine teorema, bet tuomet ribinio tikimybės tankio funkcija turi būti be galo "padalinama".

# Be galo “padalinami” stochastiniai procesai

Be galo “padalinamo” skirstinio charakteringoji funkcija gali būti užrašyta kaip charakteringųjų funkcijų sandauga:

$$f(k) = [f_l(k)]^l, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Tinka:

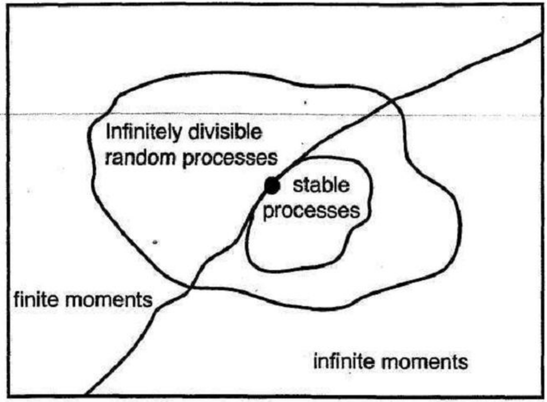
$$f_{st.}(k) = e^{\frac{i\mu k}{l} - \frac{\gamma}{l}|k|^\alpha}, \; f_{pois.} = \exp\left[\frac{\lambda}{l}(e^{ik} - 1)\right], \; f_\Gamma = (1 - ik)^{-\frac{\nu}{l}}.$$

Netinka:

$$f_{uni.,a}(k) = \frac{\sin(ka)}{ka},$$

mat $l$-toji šaknis neegzistuoja.

# Trumpai:


Infinitely divisible
random processes
stable
processes
finite moments
infinite moments

# Ačiū už dėmesį

Medžiaga padėta: http://spektras.itpa.lt/~alius/seminaras130222/