Signalų spektrų korektiškas gavimas:

Aleksejus Kononovičius

2012-11-09

Parengta pagal "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing" 3, 9 ir 16 skyrius (http://www.dspguide.com)

ir "Numerical recipes" 13.4 skyrių

Spektras - kas tai? Periodogramos.

Periodograma:

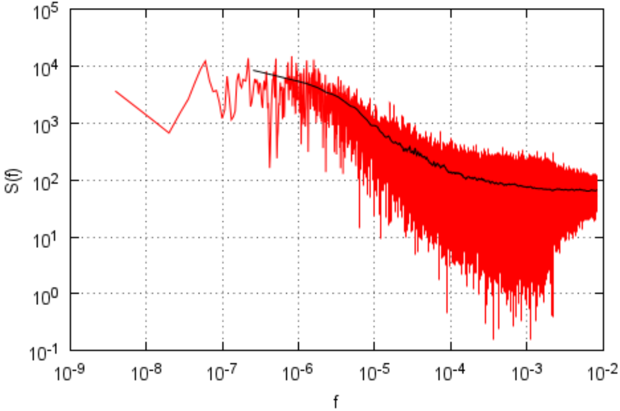
$$a_k = \frac{2}{T} \sum_t x_t \cos(kt), \quad b_k = \frac{2}{T} \sum_t x_t \sin(kt), \quad S_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Iš Eulerio formulės seka, kad

$$a_k - i b_k = \frac{2}{T} \sum_t x_t \exp(-ikt) = \mathrm{DFT}(x)_k, \quad \Rightarrow \quad S_k = \left|\mathrm{DFT}(x)_k\right|^2.$$

Turint mintyje FFT algoritmą antrasis apibrėžimas yra tinkamiausias.

Spektras - kas tai? Periodograma vs spektras



Periodograma yra “gryna” (angl. raw), o spektrinis tankis yra jos filtruota versija.

Metodai naudojami pereinant prie spektro

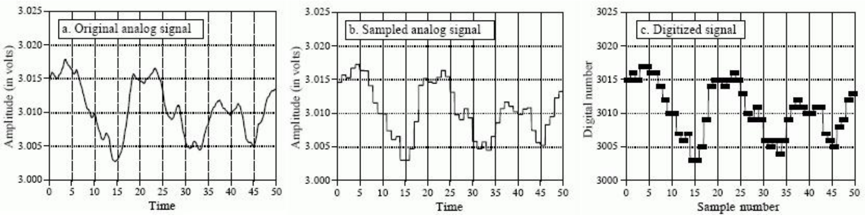
Vidurkintų periodogramų arba **Barletto metodas** - (1) laiko eilutę padaliname į N vienodo ilgio segmentų, (2) kiekvieno segmento periodogramą gauname iš FFT, (3) skaičiuojame kiekvieno segmento spektrinį tankį, (4) vidurkiniame per segmentus. Rezultatas: sumažėja periodogramos standartinis nuokrypis.

Slenkančio vidurkio filtras - papildomai praleidę periodogramą per šį filtrą nusikratome daugumos atsitiktinių svyravimų galios spektriniame tankyje. Rezultatas: tampa akivaizdesnės tendencijos.

Žemi-praeina filtras (angl. low-pass filter) - ta pati paskirtis kaip ir slenkančio vidurkio filtro.

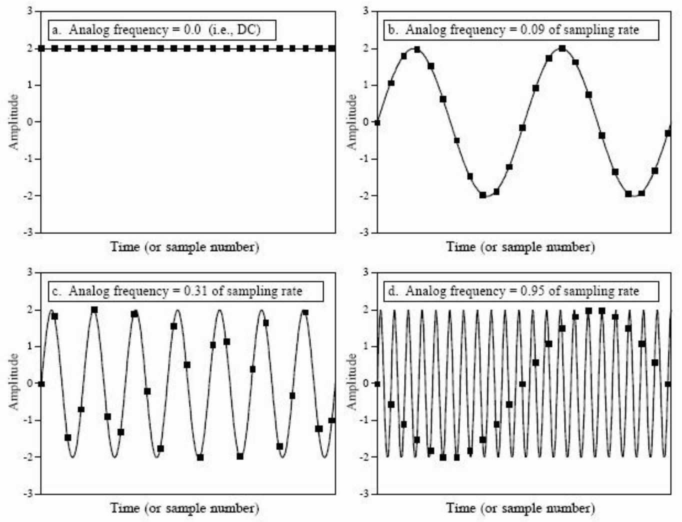
Tolydaus signalo diskretizavimas

Dauguma natūralių signalų yra analoginiai (tolydūs) laiko ir amplitudės atžvilgiu. Norint juos saugoti ar apdoroti kompiuteriu juos reikia diskretizuoti.



Atliekant diskretizavimą dalis informacijos prarandama visam laikui!

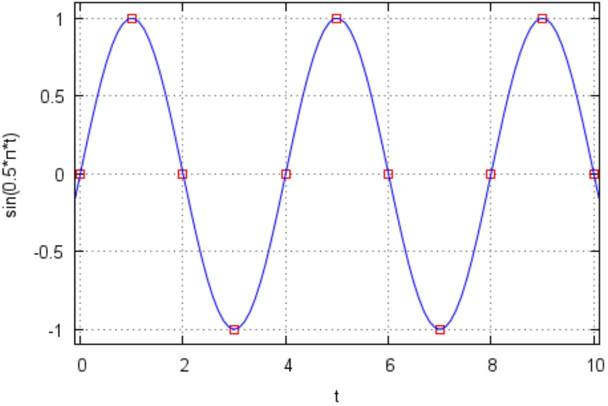
Geras ir blogas diskretizavimas



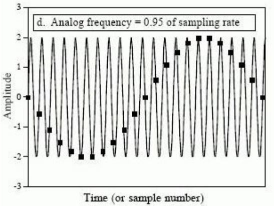
Akivaizdu, kad signalas, kurio dažnis $f = 0.95 f_s$ (d. paveikslas), yra iškraipytas.

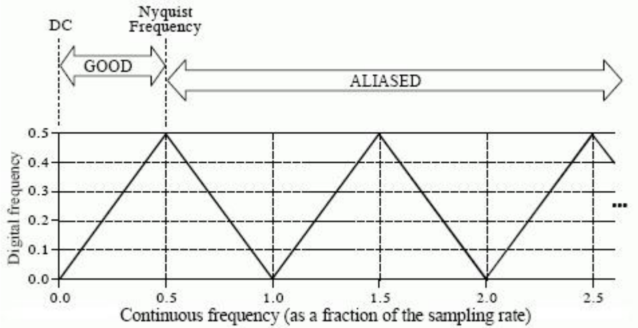
Naikvisto teorema (Nyquist sampling theorem)

1940 metais Naikvistas ir Šanonas parodė, kad signalas yra tinkamai diskretizuotas tada ir tik tada, jei jo **diskretizavimo dažnis, f_s, yra bent dvigubai didesnis už didžiausią dažnį esantį originaliame signale**.



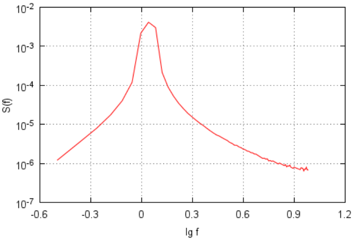
Kas nutinka, jei yra didesnių dažnių nei $0.5 f_s$?

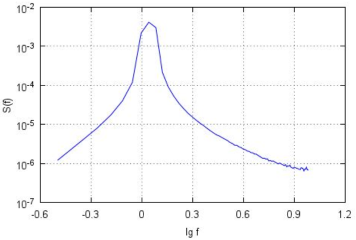




Tokiu atveju diskretizavimas pakeičia "nematomą" dažnį kitu, matomu, dažniu!

Praleidęs pro spektro skaičiavimo algoritmą du signalus - sinusoidę su dažniu 10 Hz, sinusoide su dažniu 190 Hz - matau identiškus spektrus! Diskretizavimo dažnis 200 Hz.

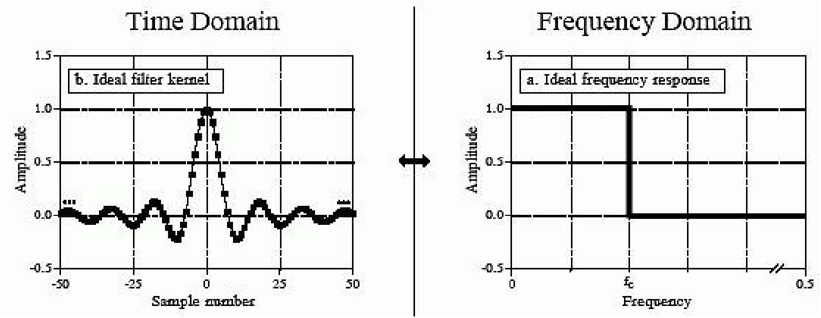




Tie patys grafikai $f = 1.05 f_s$, $f = 1.95 f_s$, $f = 2.05 f_s$, ...

Kaip spręsti “persiklojimo” problemą?

Jei neturime signalo su didesne skyra - sprendimo nėra.
Jei turime - galime taikyti žemi-praeina filtrus ir išimti potencialiai trukdysiančius dažnius.



Žemi-praeina filtro konstravimas

Idealus spektrinis atsakas,

$$S_{brand}(f) = 1 - \theta(f - f_c) = 1 - \int_{-\infty}^{x} \delta(f - f_c) \mathrm{d}s,$$

turėtų iš spektro "išimti" nereikalingus dažnius. T.y.,

$$S_{norim}(f) = S_{turim}(f) \cdot S_{brand}(f),$$

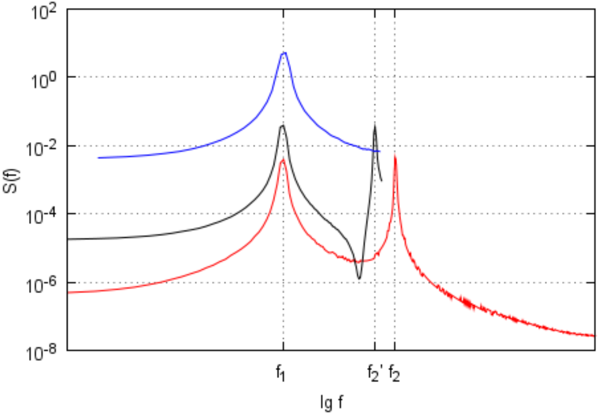
neturėtų turėti dažnių didesnių už f_c.

Laiko srityje:

$$x_{brand}(t) = C_0 \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} = C_0 \mathrm{sinc}(2\pi f_c t),$$

$$x_{norim}(t) = [x_{turim} \star x_{brand}](t).$$

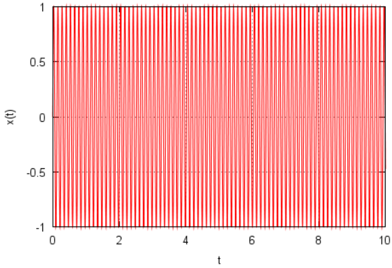
“Persiklojimo” problemos ir sprendimo demonstracija

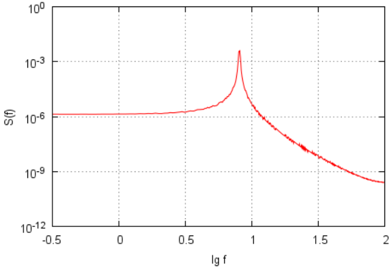


Raudonas spektras - originalus signalas, juodas spektras - sumažinta skyra, mėlynas spektras - (1) sinc filtras, (2) sumažinta skyra.

Dar viena problema - galios “nutekėjimas”

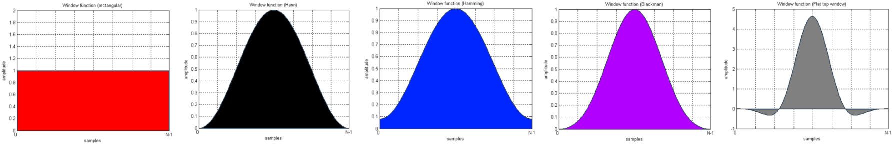
Idealios laiko eilutės, idealūs filtrai yra begaliniai. Skaitmeniškai realizuoti, saugoti, apdoroti galima tik baigtinius duomenis. Tad kyla tam tikrų problemų...





Reiktų turėti mintyje, kad $x(t)$, kai $t < 0$ arba $t > 10$, yra lygus nuliui.

Problemos sprendimas - langai!



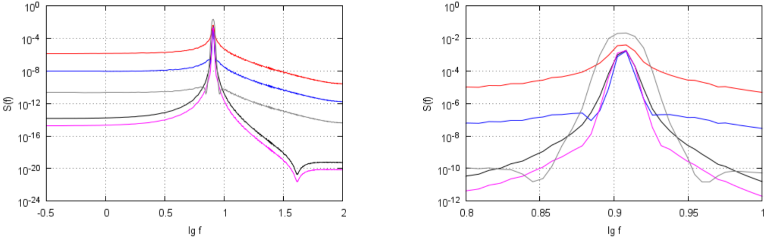
Pvz., Blackmano lango funkcija ($\alpha = 0.16$):

$$w(t) = \frac{1-\alpha}{2} - 0.5\cos\left(\frac{2\pi t}{N-1}\right) + \frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{4\pi t}{N-1}\right).$$

O lango “uždėjimas” yra tiesiog signalo verčių padauginimas iš svorinių koeficientų:

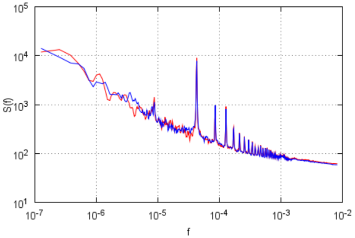
$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot w(t), \quad t = 1, 2, \ldots, N.$$

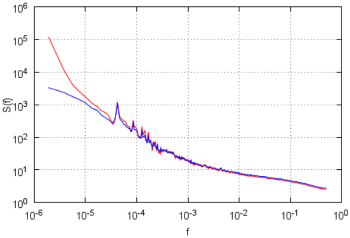
Problemos sprendimas - langai!



Raudona - originalus signalas. Juoda - Hann langas. Mėlyna - Hamming. Violetinė - Blackman. Pilka - flat-top.

Ar langai ką nors keičia mūsų atveju?





Empirinio spektro (segmentų ilgis ∼200000 taškų) Blackmano lango panaudojimas iš esmės nekeičia.

Kokią įtaką galėtų turėti dažnių "persiklojimas"? Veikiausiai irgi menką.

Ačiū už dėmesį

Medžiaga padėta: http://spektras.itpa.lt/~alius/seminaras1109/