

Algoritmai ir duomenų struktūros

8 paskaita

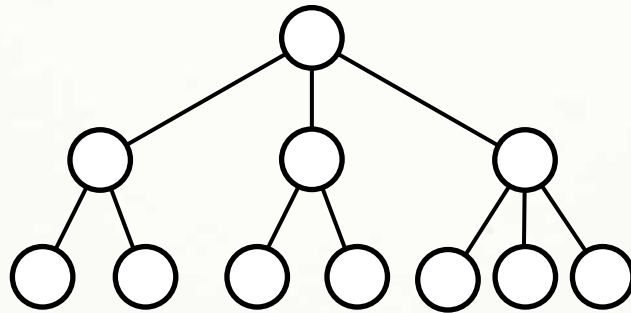
2026-03-31

8 paskaitos tikslas

- Susipažinti su:
2–3 medžiais,
2–3–4 medžiais,
B-medžiais.

2–3 medis

- 2–3 medžiu vadinamas subalansuotas (save balansuojantis) paieškos medis, kuriame, skirtingai nei dvejetainiame paieškos medyje, kiekviena vidinė viršūnė gali turėti 2 arba 3 vaikus (taip pat, 1 arba 2 reikšmes):

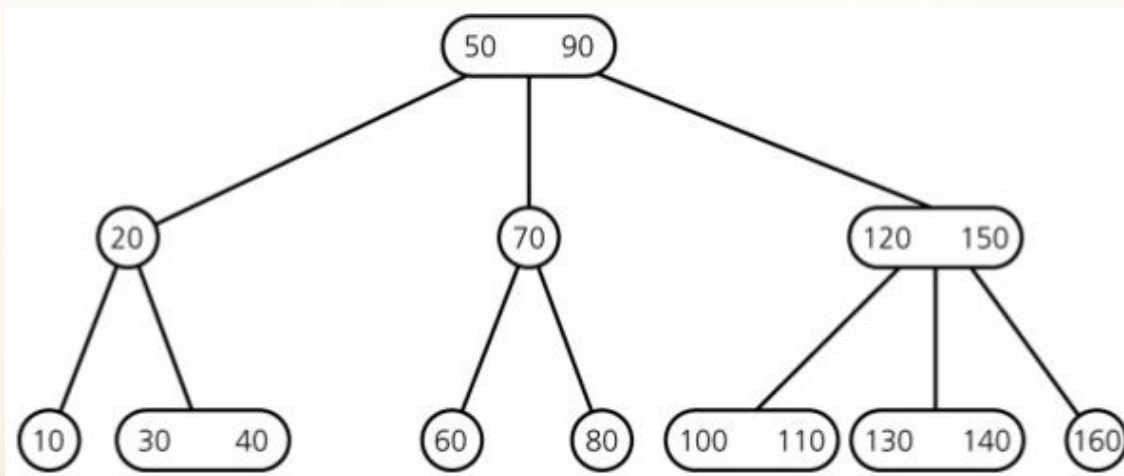


- 2–3 medis buvo pasiūlytas autoriaus Džono Hopkrofto 1970 m.

2–3 medžio savybės

1. Kiekviena vidinė viršūnė turi 2 arba 3 vaikus.
2. Visos viršūnės turi 1 arba 2 reikšmes.
3. Visi medžio lapai yra viename lygyje.

2–3 medžio pavyzdys:

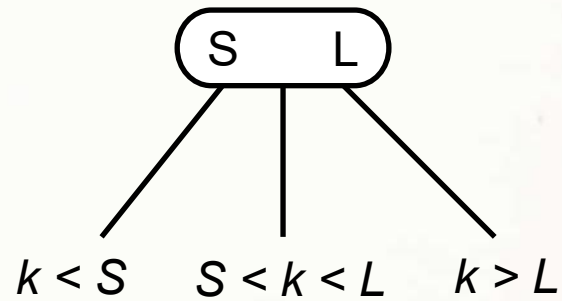
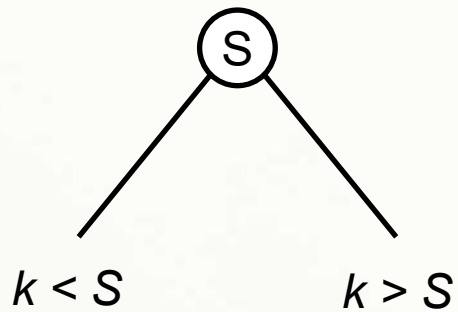


2–3 medžio sudarymo taisyklės

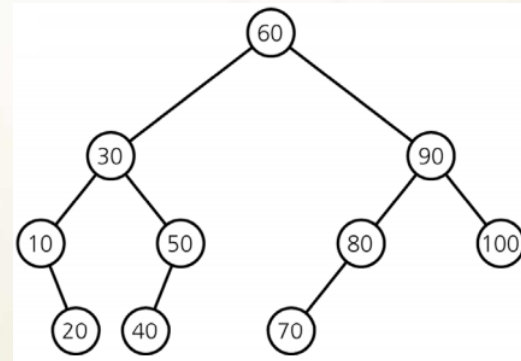
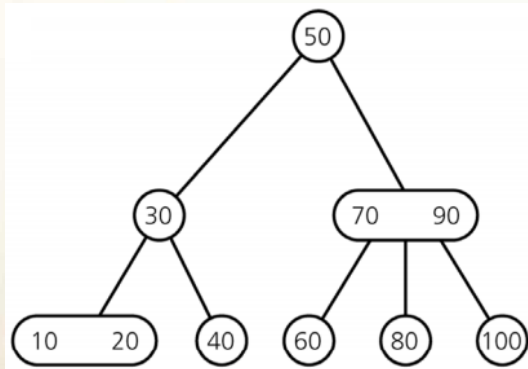
1. Kiekviena 2–3 medžio viršūnė sudaroma iš 1 (pažymėkime S) arba 2 reikšmių (pažymėkime S ir L).
2. Visada $S < L$.
3. Kiekviena vidinė viršūnė su viena reikšme S turi 2 pomedžius:
 1. Kiekviena kairiojo pomedžio reikšmė mažesnė už S.
 2. Kiekviena dešiniojo pomedžio reikšmė didesnė už S.
4. Kiekviena vidinė viršūnė su 2 reikšmėmis S ir L turi 3 pomedžius:
 1. Kiekviena kairiojo pomedžio reikšmė mažesnė už S.
 2. Kiekviena viduriniojo pomedžio reikšmė yra tarp S ir L.
 3. Kiekviena dešiniojo pomedžio reikšmė didesnė už L.

Ryšiai 2–3 medyje

Pažymėkime ieškomą reikšmę raide k (key):



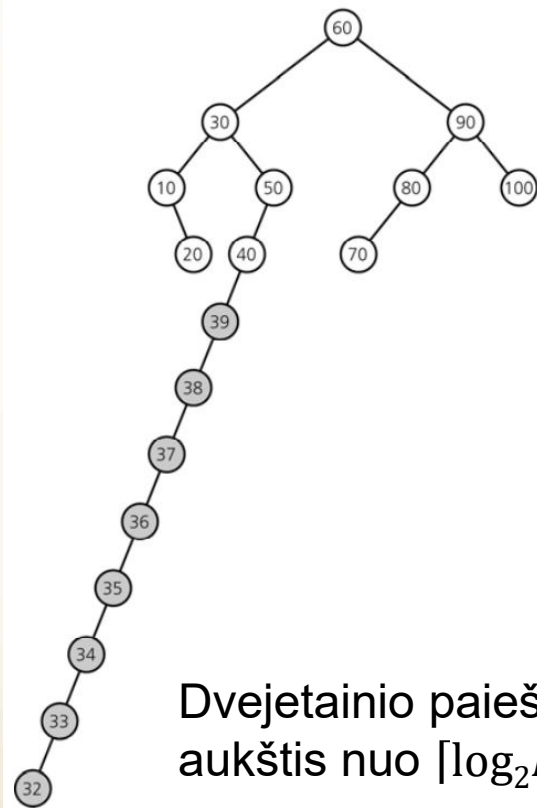
2–3 medžio pavyzdys ir jį atitinkantis dvejetainis paieškos medis:



Elementų įterpimo palyginimas

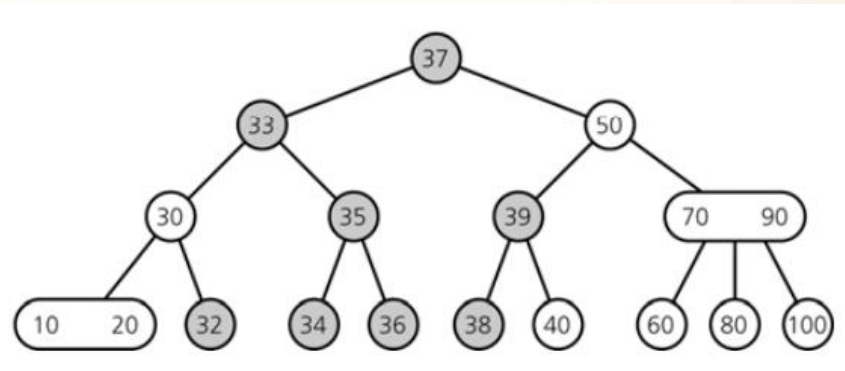
Elementų 39, 38, ..., 32 įterpimas

dvejetainiame paieškos medyje:



Dvejetainio paieškos medžio aukštis nuo $\lceil \log_2 N \rceil$ iki $N - 1$.

2–3 medyje:



2–3 medžio aukštis nuo $\lceil \log_3 N \rceil$ iki $\lceil \log_2 N \rceil$.

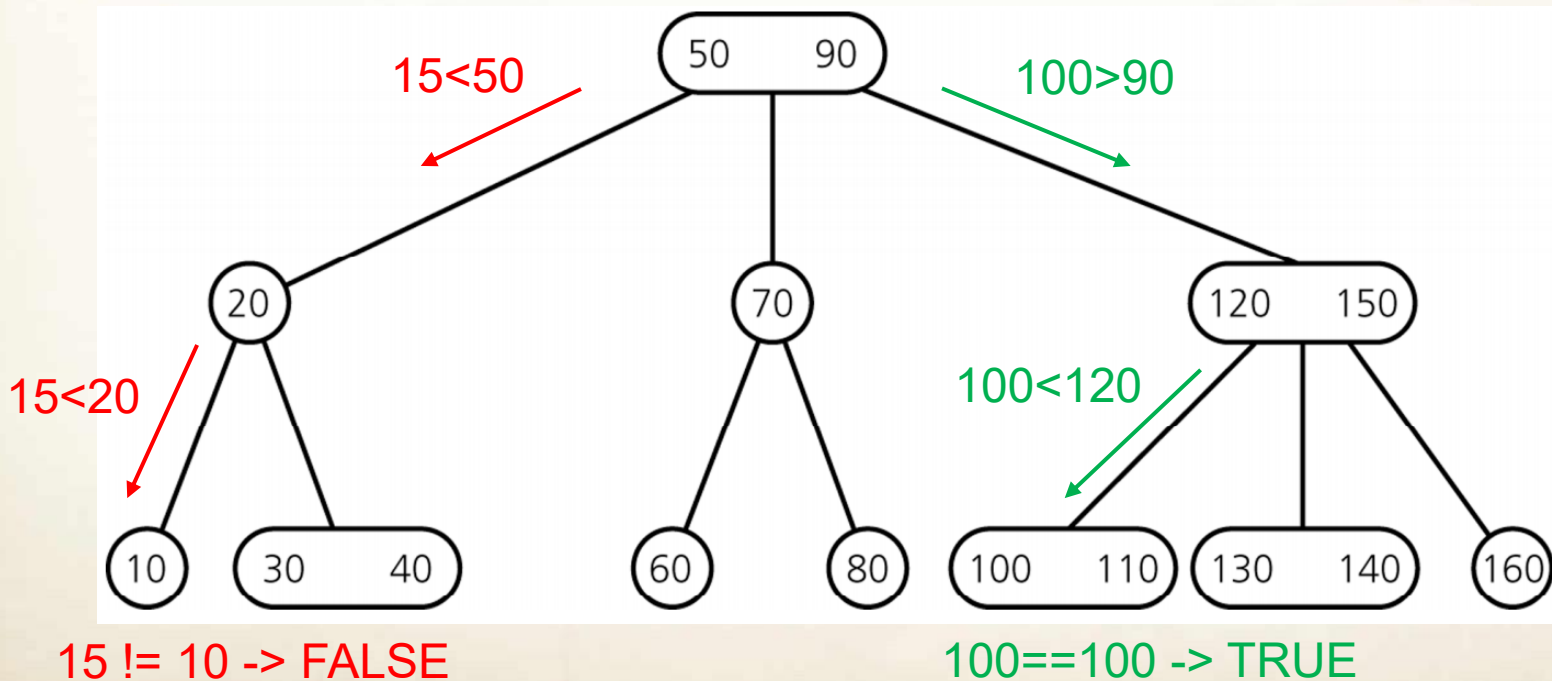
2–3 medžiuose atliekamos operacijos

- Elemento (viršūnės) paieška.
- Elemento (viršūnės) įterpimas.
- Elemento (viršūnės) šalinimas.

Elemento paieška 2–3 medyje

- Elemento paieška pradedama nuo medžio šaknies.
- Jei ieškomasis elementas viršūnėje, paieška baigiama.
- Kitu atveju paieška tampa panaši kaip ir dvejetainiame paieškos medyje.

Paieškos pavyzdys, kai ieškomos reikšmės **15** ir **100**:

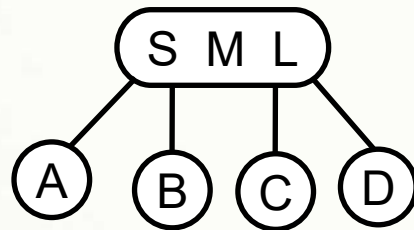


Elemento įterpimas 2–3 medyje

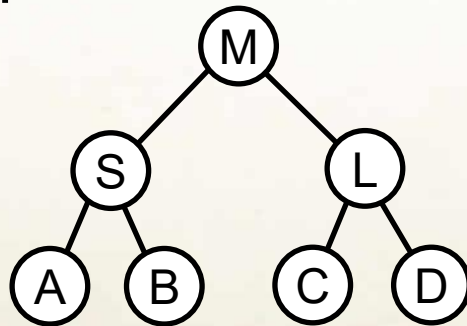
- Naujo elemento įterpimas 2–3 medyje vyksta paieškos principu: iš viršūnės nusileidžiama į kurį nors lapą, į kurį įrašoma naujo elemento reikšmė.
- Elementas neįterpiamas, jei tokia reikšmė rasta 2–3 medyje.
- Jei po įterpimo pažeidžiamos 2–3 medžio taisyklės, medis turi būti koreguojamas.
- Po sėkmingo įterpimo galimos 2 situacijos:
 - Jei lapas turi 2 reikšmes, įterpimas baigtas.
 - Jei lapas turi 3 reikšmes (S, M, L), atliekamas medžio koregavimas:
 - *Viršūnė suskaidoma į dvi naujas viršūnes S ir L.*
 - *Į tėvo viršūnę įrašoma reikšmė M.*
 - *Jei tėvo nėra, jis sukuriamas su nauja reikšme M.*

Perpildytos viršūnės 2–3 medžiuose

- Atliekant 2–3 medžio koregavimą, pasitaiko atvejų, kai viršūnė įgyja 4 vaikus:

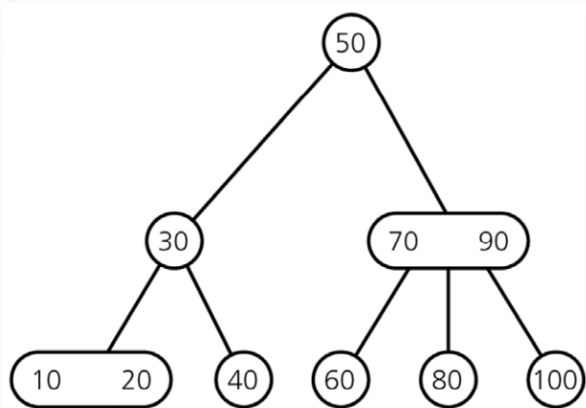


- Tokiu atveju pomedis (medis) pertvarkomas suformuojant naujas viršūnes:

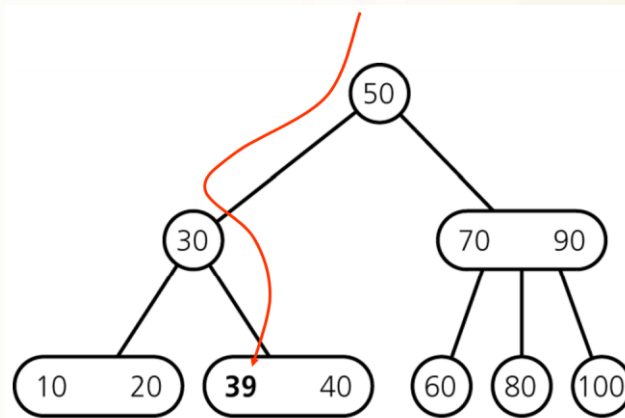


Įterpimų pavyzdžiai 2–3 medžiuose

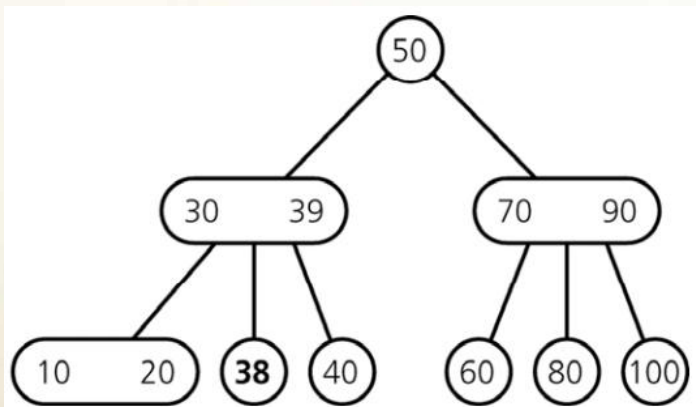
2–3 medis su reikšmėmis 10, 20, ..., 100:



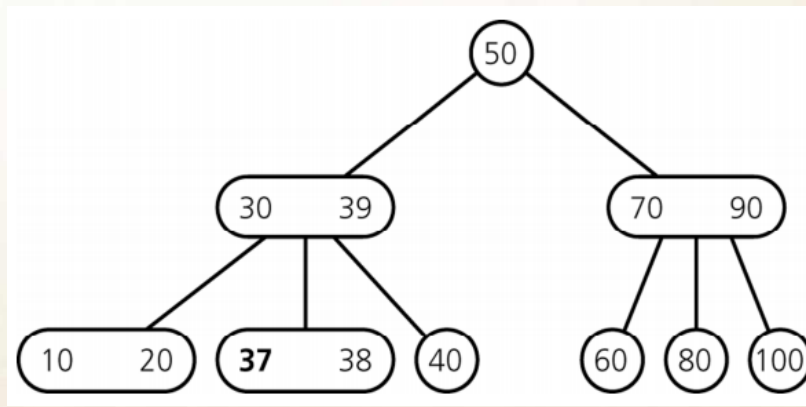
Įterpiama reikšmė 39:



Įterpiama reikšmė 38:

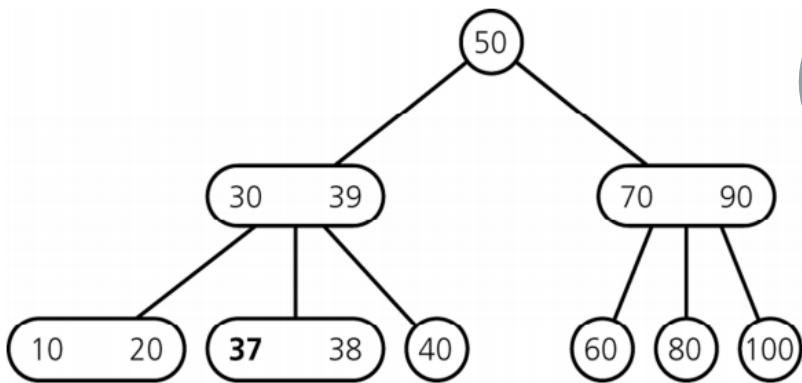


Įterpiama reikšmė 37:

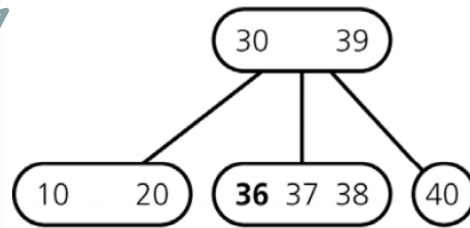


Įterpimų pavyzdžiai 2–3 medžiuose

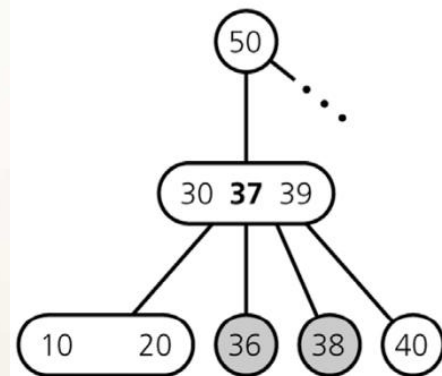
Į medį:



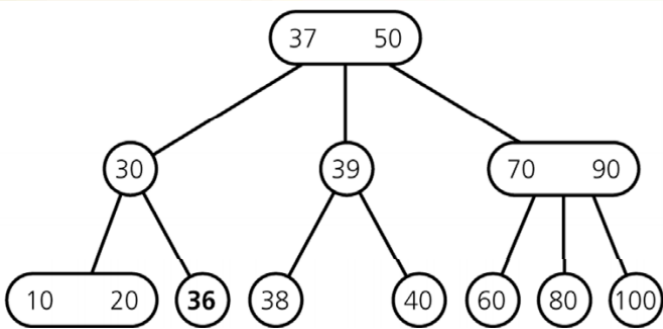
Įterpiama reikšmė 36:



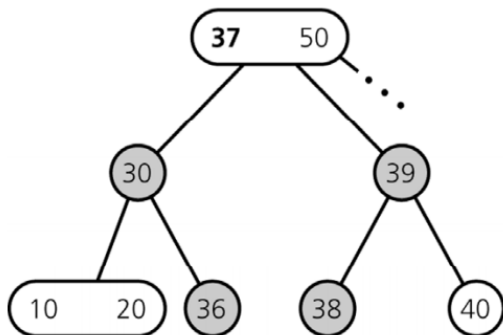
Pomedis pertvarkomas:



Rezultatas:



Pomedis pertvarkomas:

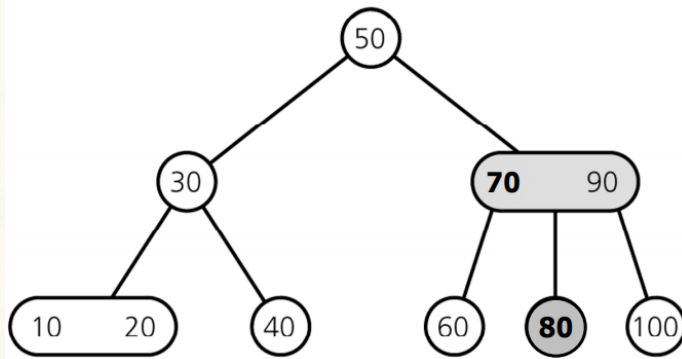


Elemento šalinimas iš 2–3 medžio

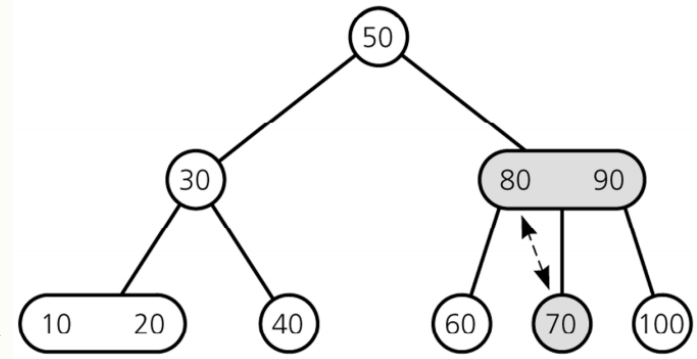
- Iš pradžių, vykdant paiešką, randamas elementas, kurį reikia pašalinti.
- Elementas šalinamas jį išmetant iš medžio, po to medis sutvarkomas taip, kad tenkintų 2–3 medžio taisykles. Galimi du atvejai:
 1. Šalinamas elementas yra vidinėje medžio viršūnėje.
Šalinamą elementą reikia sukeisti su didžiausiu elementu iš pomedžio, kurio visi elementai yra mažesni už šalinamą elementą (arba su mažiausiu elementu iš pomedžio, kurio visi elementai yra didesni už šalinamą elementą), ir tada pašalinti sukeistą elementą iš lapo.
 2. Šalinamas elementas yra medžio lape.
Jei po elemento išmetimo lape lieka bent 1 reikšmė, šalinimas baigtas. Kitu atveju, po šalinimo gavus tuščią lapą, medį reikia pertvarkyti, kad jis tenkintų 2–3 medžio taisykles, t. y. visi jo lapai būtų tame pačiame aukštyje.

Elemento šalinimas iš 2–3 medžio (1)

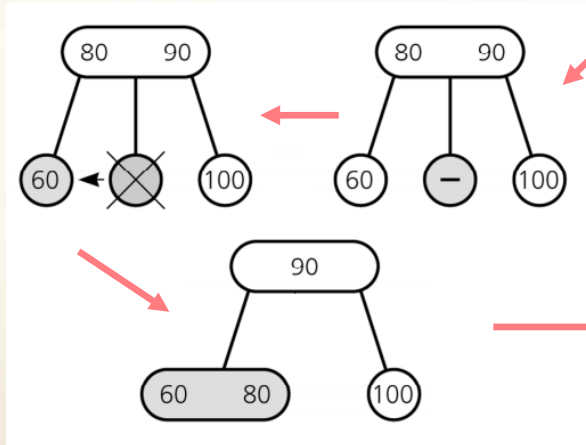
Ištrinama reikšmė 70:



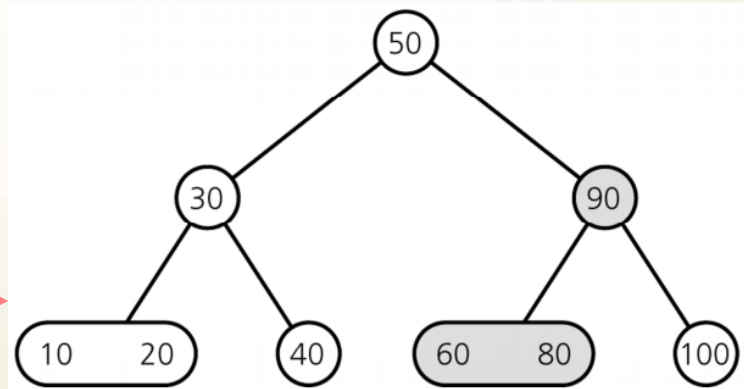
Reikšmė 70 sukeičiama su 80 (galima sukeisti ir su 60):



Koreguojamas pomedis:

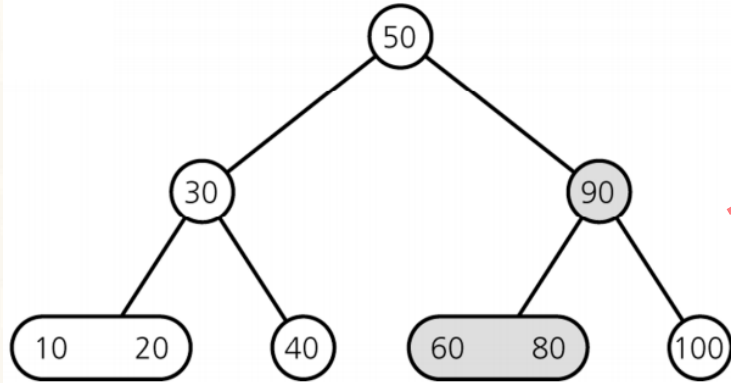


Rezultatas:

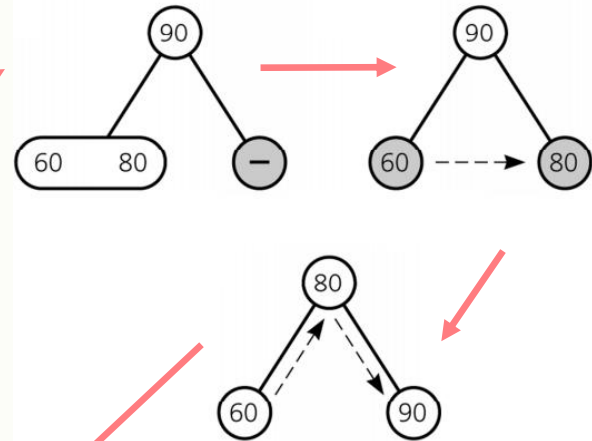


Elemento šalinimas iš 2–3 medžio (2)

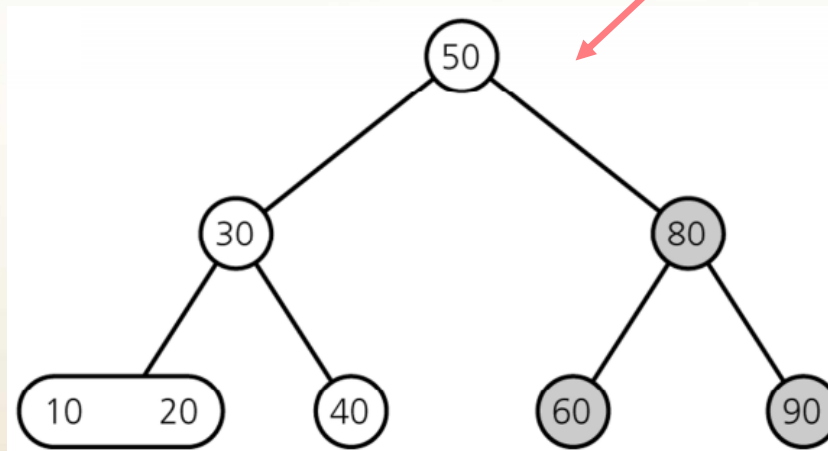
Ištrinama reikšmė 100:



Pomedis koreguojamas:

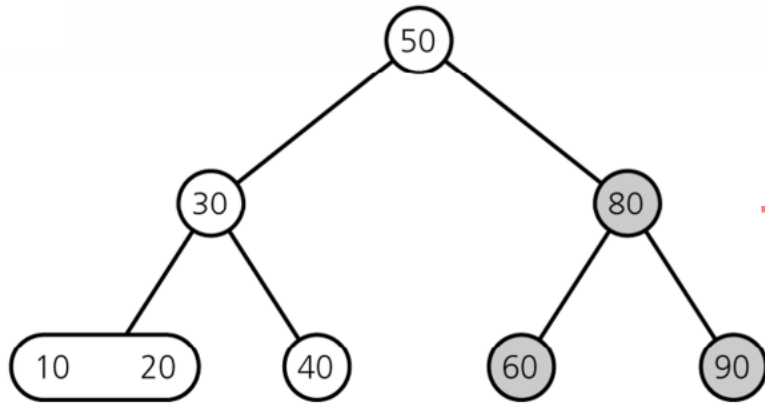


Rezultatas:

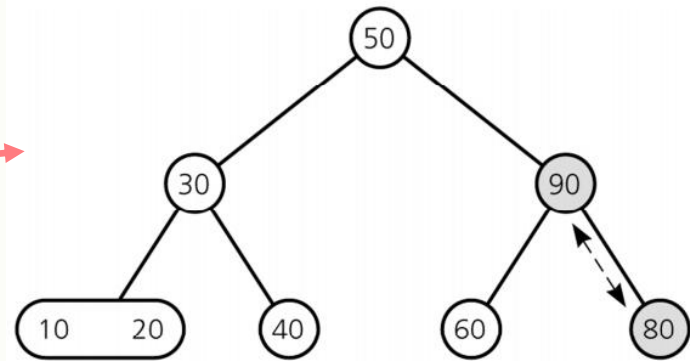


Elemento šalinimas iš 2–3 medžio (3)

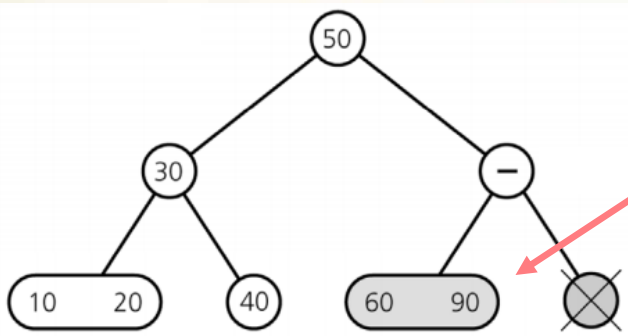
Ištrinama reikšmė 80:



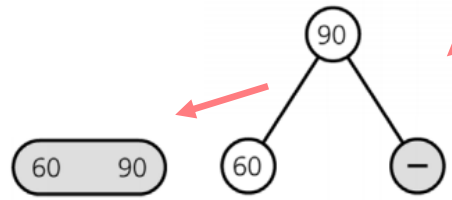
Reikšmė 80 sukeičiama su 90 (galima sukeisti ir su 60):



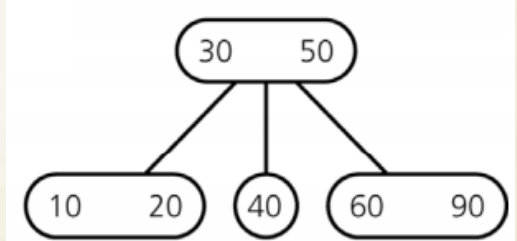
Medis koreguojamas:



Pomedis koreguojamas:



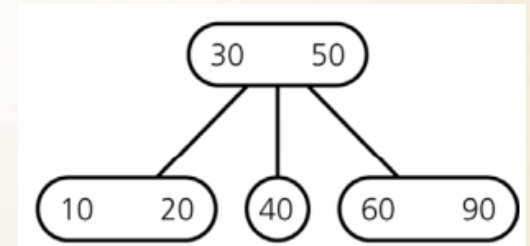
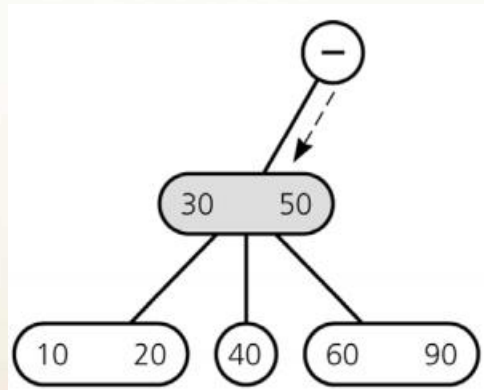
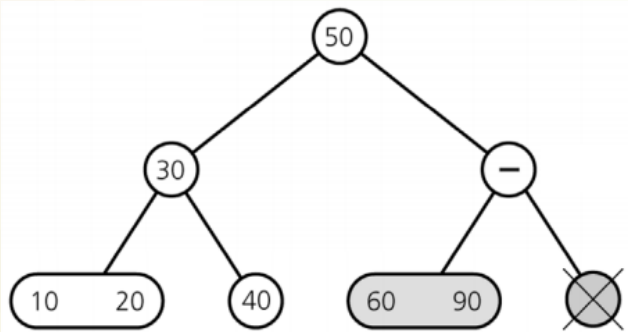
Rezultatas:



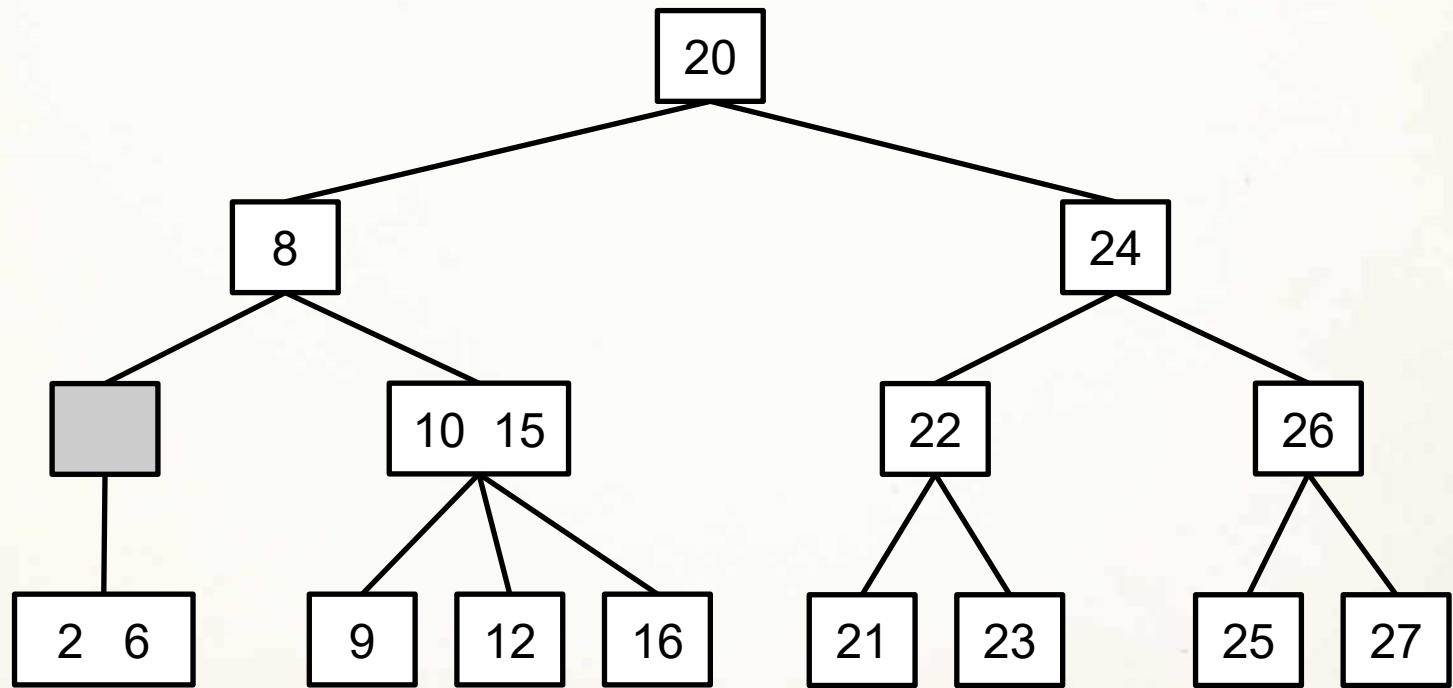
2–3 medžio koregavimas

2–3 medžio koregavimas atliekamas pašalinus viršūnę be sukeitimo:

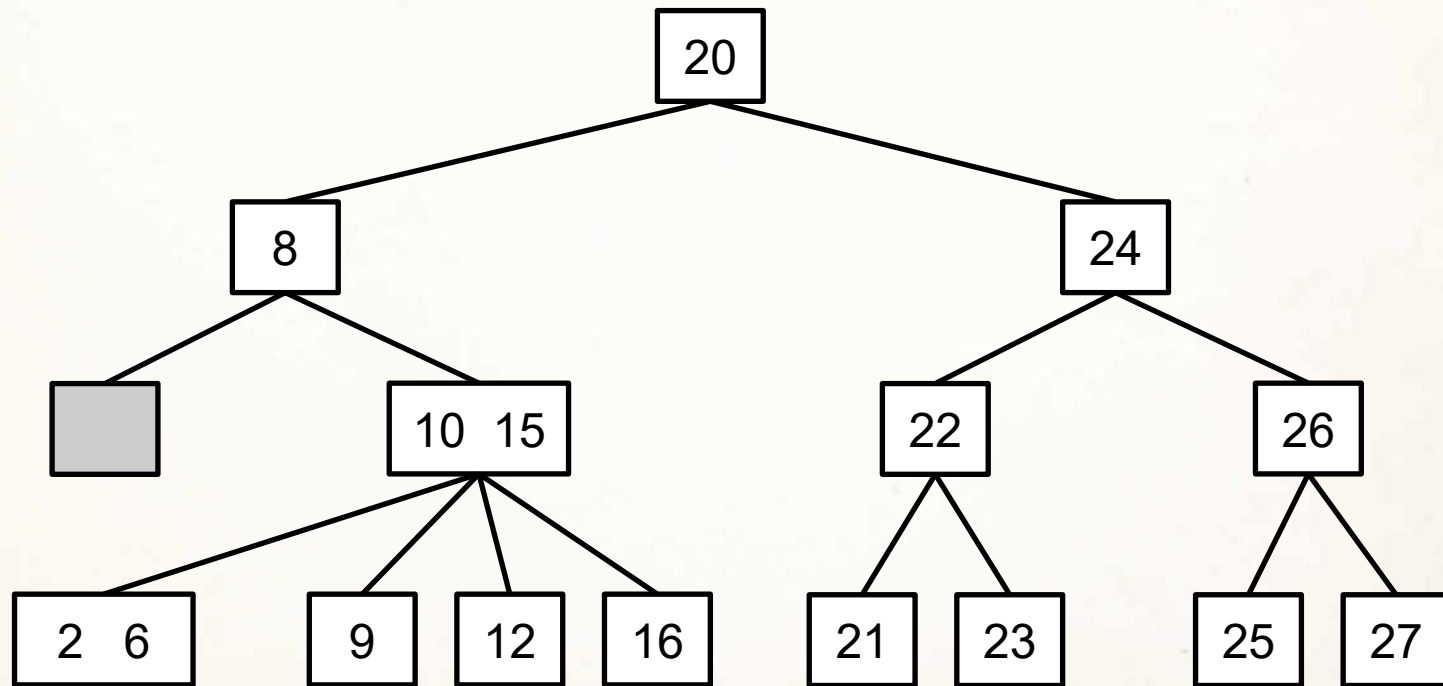
- Tuščios viršūnės (tėvo) sūnus prijungiamas prie dėdės.
- Po sūnaus perdavimo reikalinga papildoma reikšmė dėdės viršūnėje. Ši reikšmė paimama iš senelio.



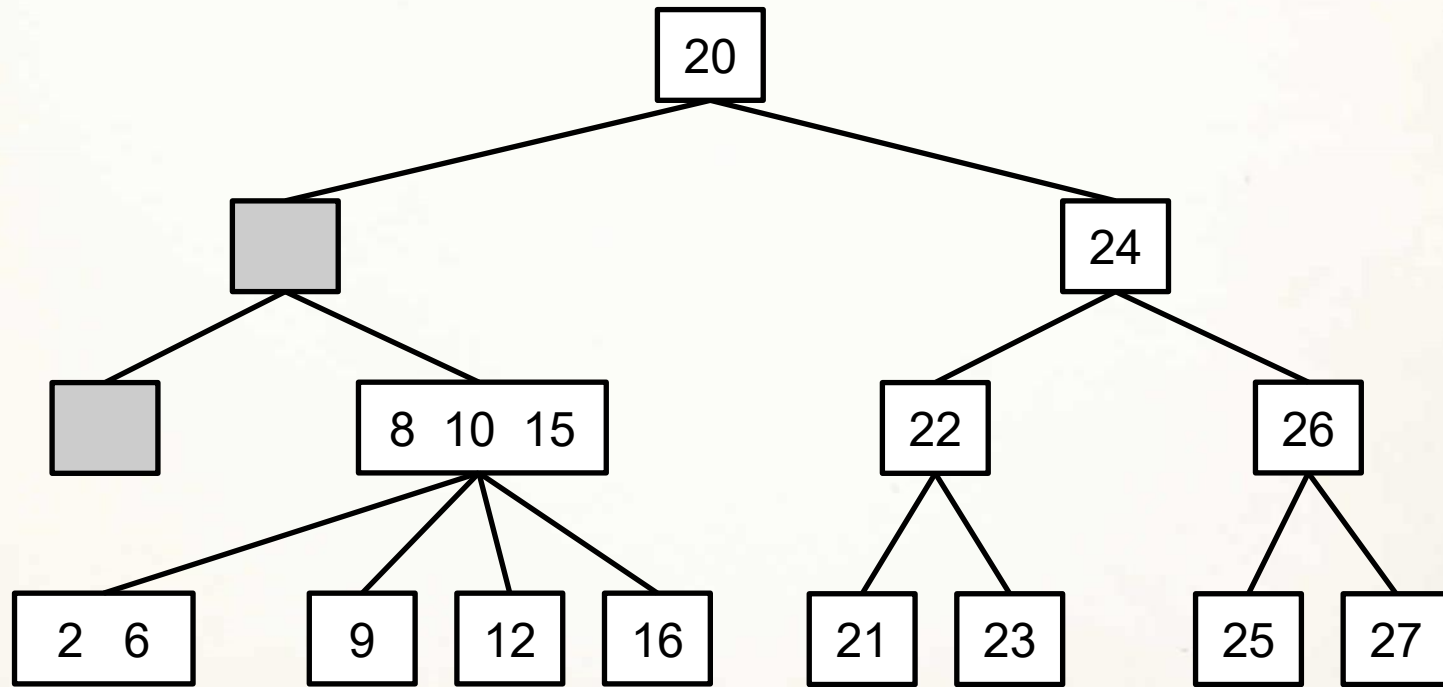
2–3 medžio koregavimo pavyzdys



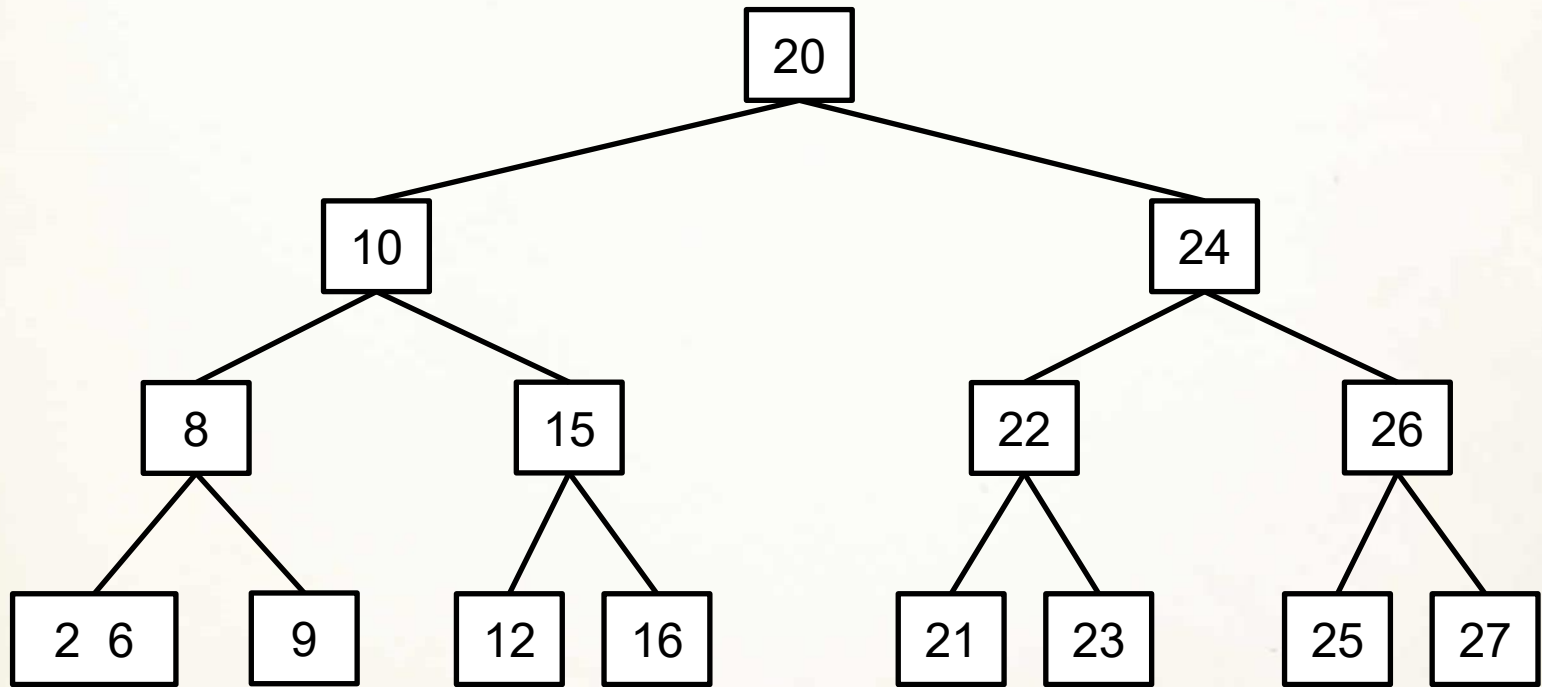
2–3 medžio koregavimo pavyzdys



2–3 medžio koregavimo pavyzdys



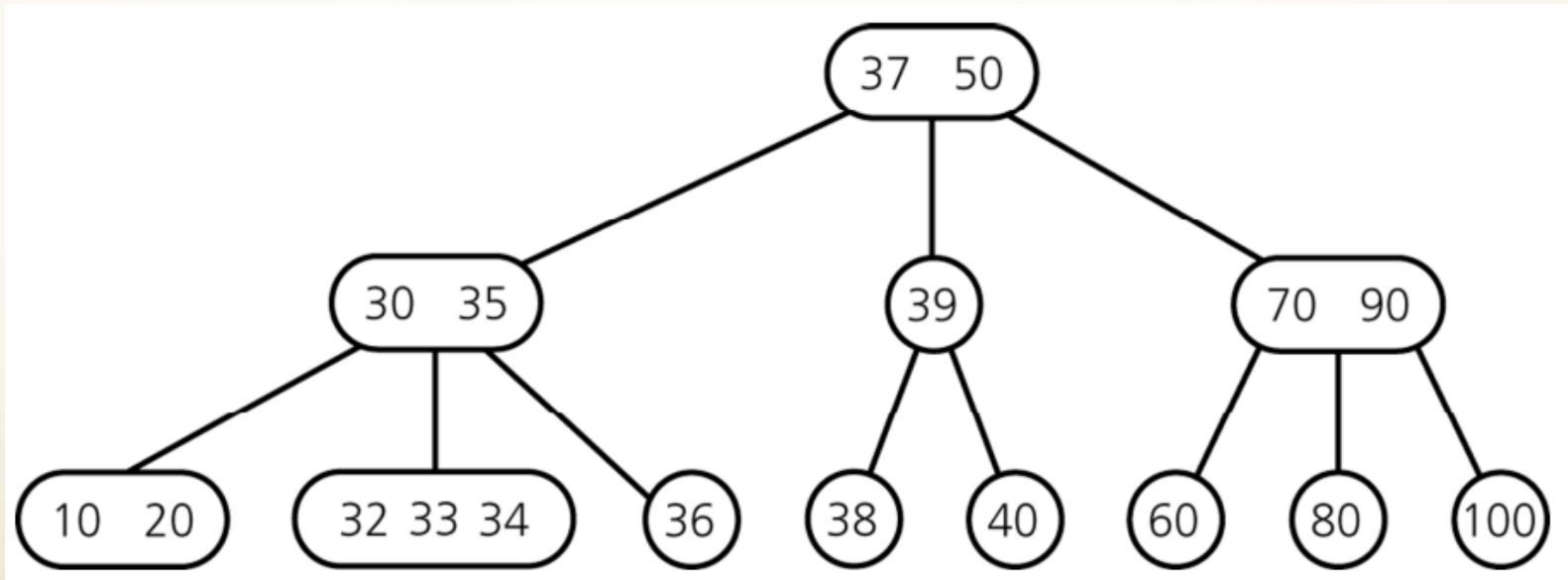
2–3 medžio koregavimo pavyzdys



2–3–4 medžiai

1. Kiekviena vidinė viršūnė turi 2, 3 arba 4 vaikus.
2. Visos viršūnės turi 1, 2 arba 3 reikšmes.
3. Visi medžio lapai yra viename lygyje.

2–3–4 medžio pavyzdys:



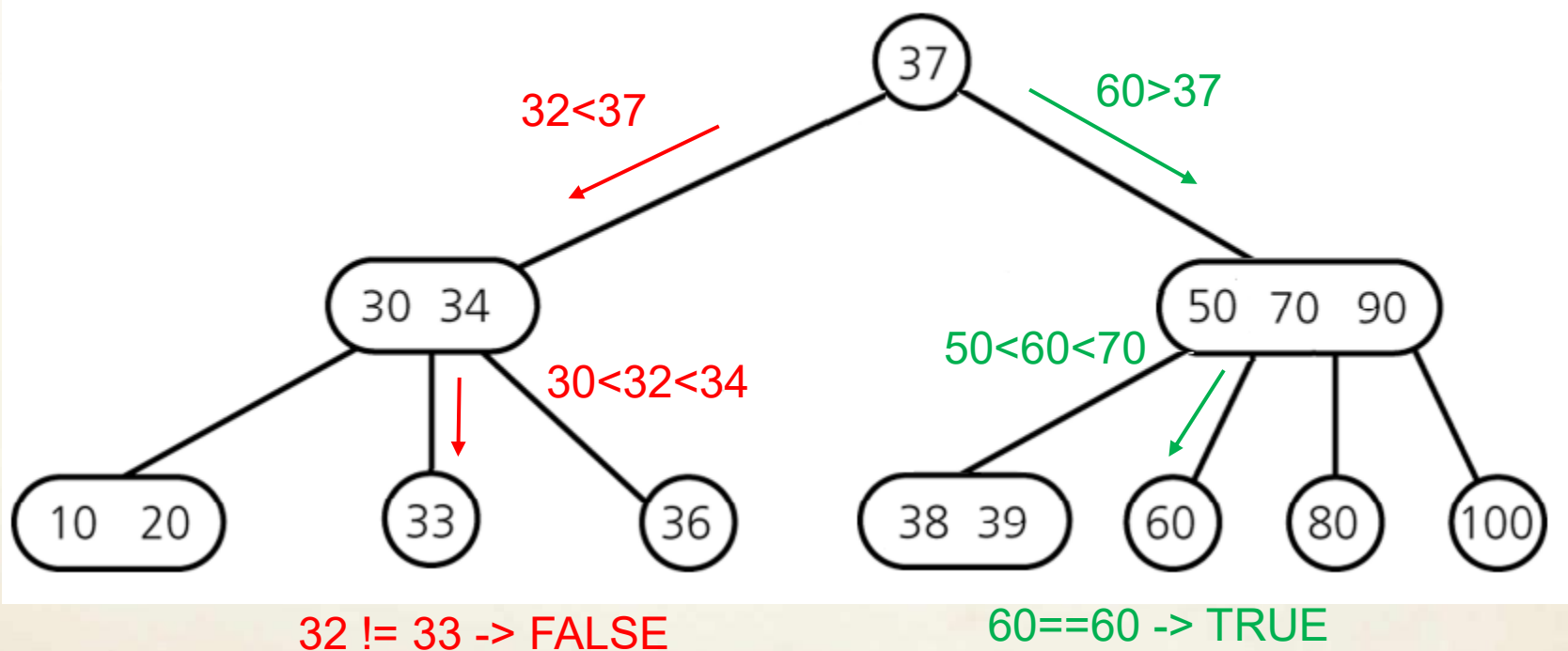
2–3–4 medžiuose atliekamos operacijos

- Elemento (viršūnės) paieška.
- Elemento (viršūnės) įterpimas.
- Elemento (viršūnės) šalinimas (galimos įvairios strategijos).

Elemento paieška 2–3–4 medyje

- Elemento paieška pradedama nuo medžio šaknies.
- Jei ieškomasis elementas viršūnėje, paieška baigiama.

Paieškos pavyzdys, kai ieškomos reikšmės **32** ir **60**:



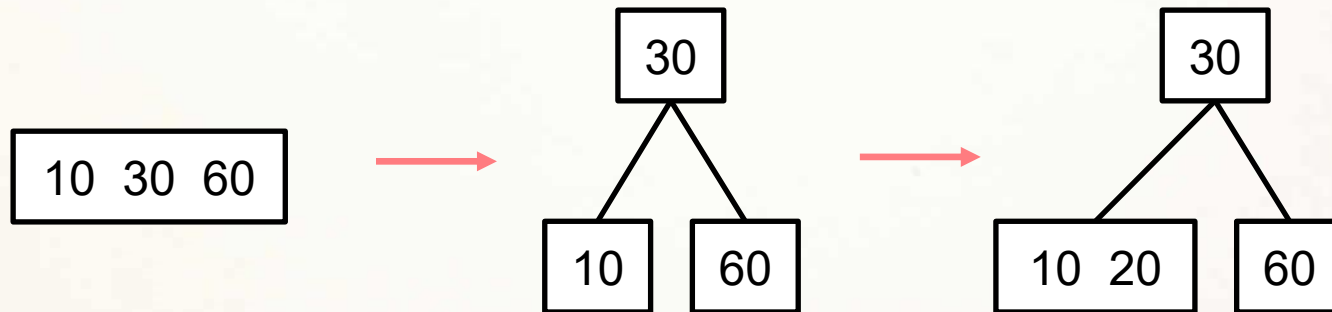
Elemento įterpimas 2–3–4 medyje

1. Įterpiamas panašus kaip ir 2–3 medžiuose.
2. Naujos reikšmės įterpiamos lapuose.
3. Jei lape susidaro 4 reikšmės, lapas turi būti padalijamas į naujas viršūnes.

Pavyzdys. Sudarykime 2–3–4 medį įterpiant reikšmes 60, 30, 10, 20, 50, 40, 70, 80, 15, 90.

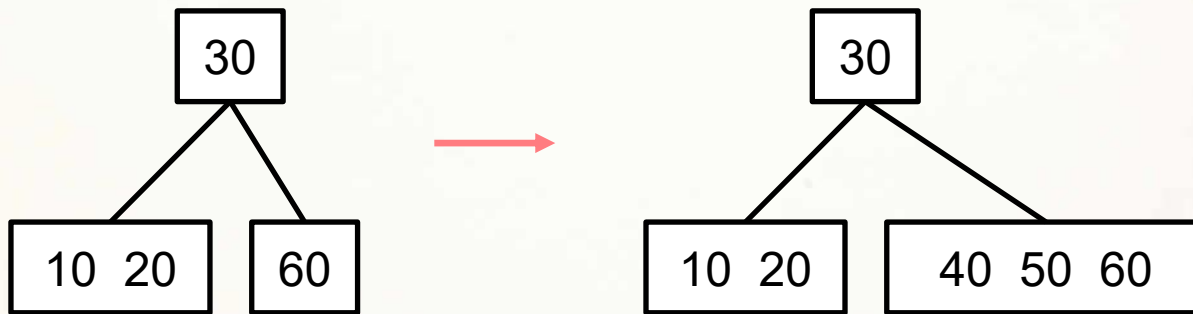
Įterpimo pavyzdys 2–3–4 medyje

2–3–4 medyje įterpiamos reikšmės 60, 30, 10, 20:



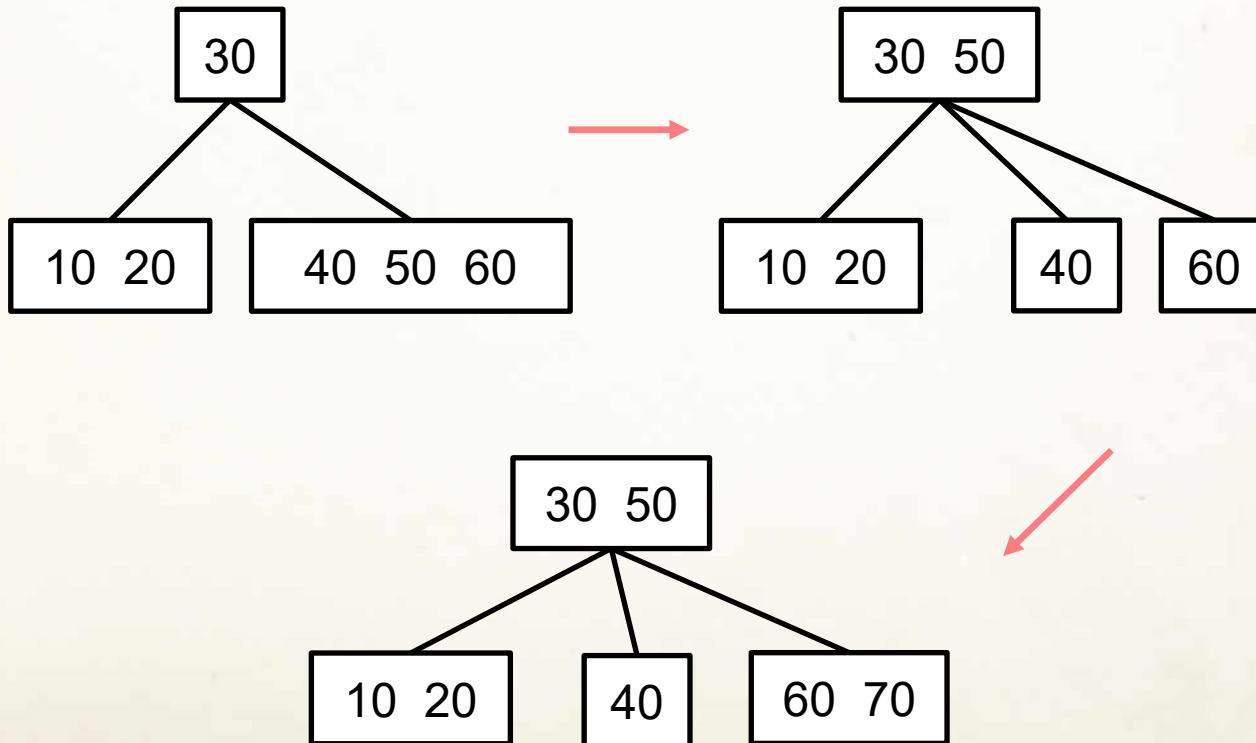
Įterpimo pavyzdys 2–3–4 medyje

2–3–4 medyje įterpiamos reikšmės 50, 40:



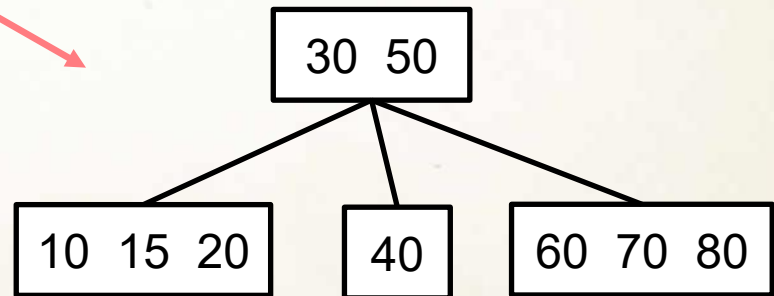
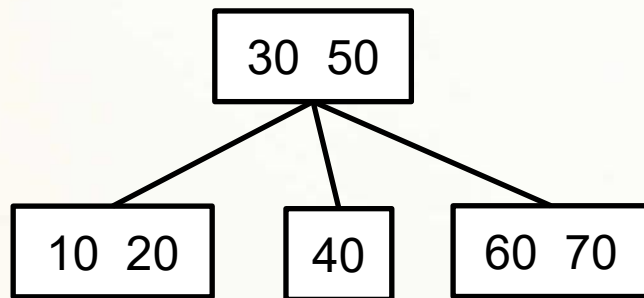
Įterpimo pavyzdys 2-3-4 medyje

2-3-4 medyje įterpiama reikšmė 70:



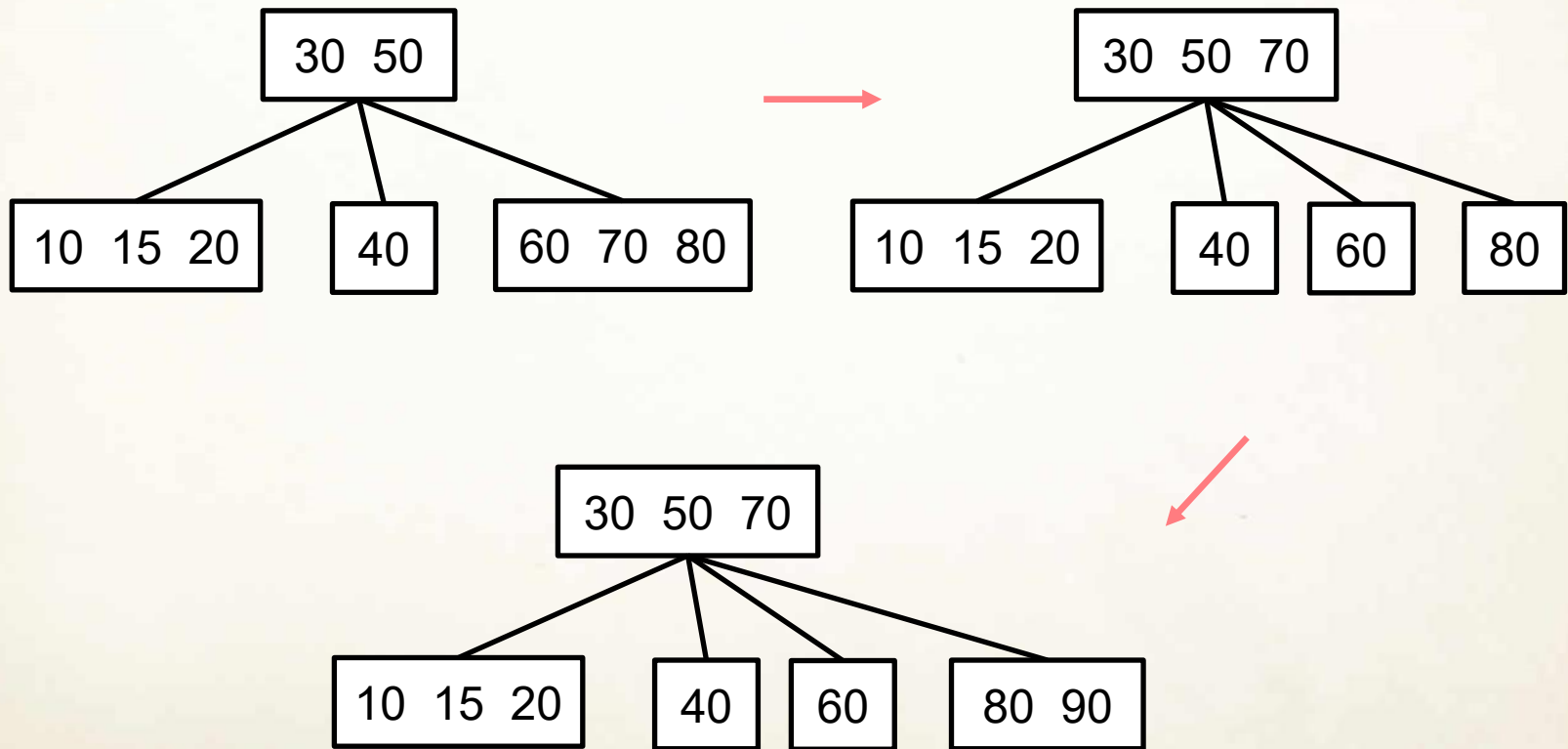
Įterpimo pavyzdys 2–3–4 medyje

2–3–4 medyje įterpiamos reikšmės 80, 15:



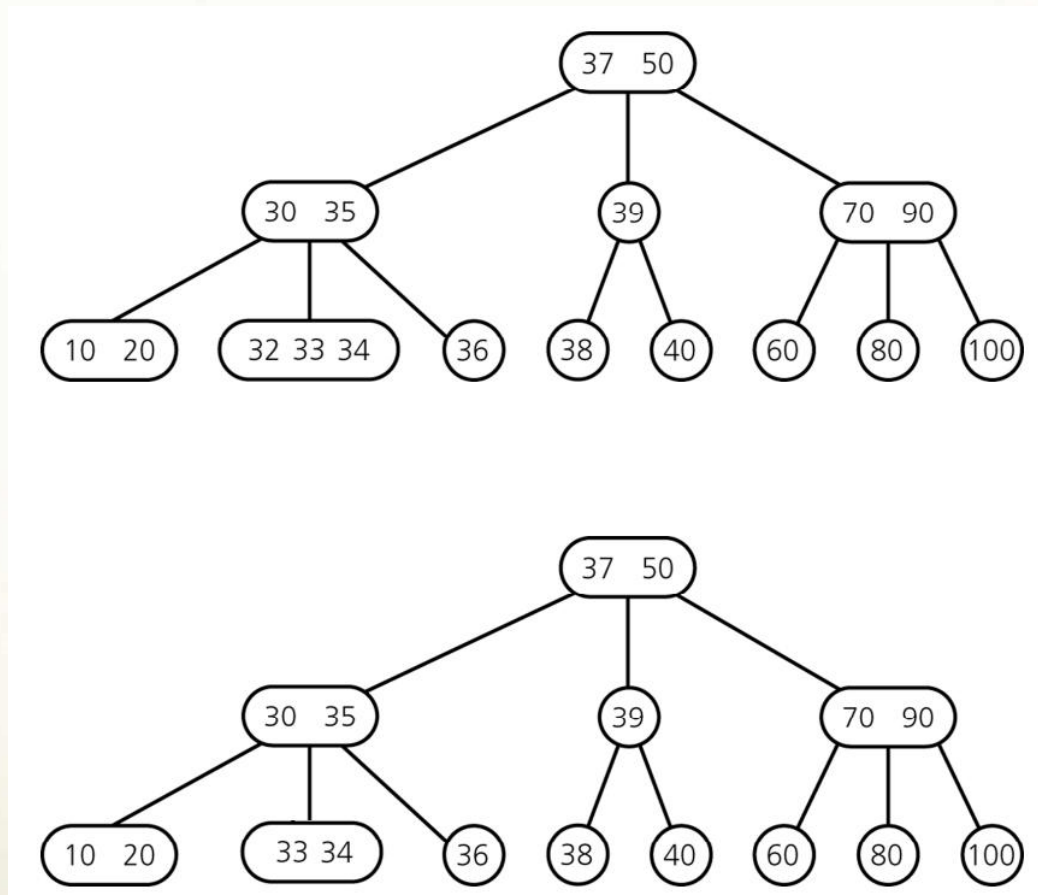
Īterpimo pavyzdys 2–3–4 medyje

2–3–4 medyje ĳterpiama reikšmė 90:



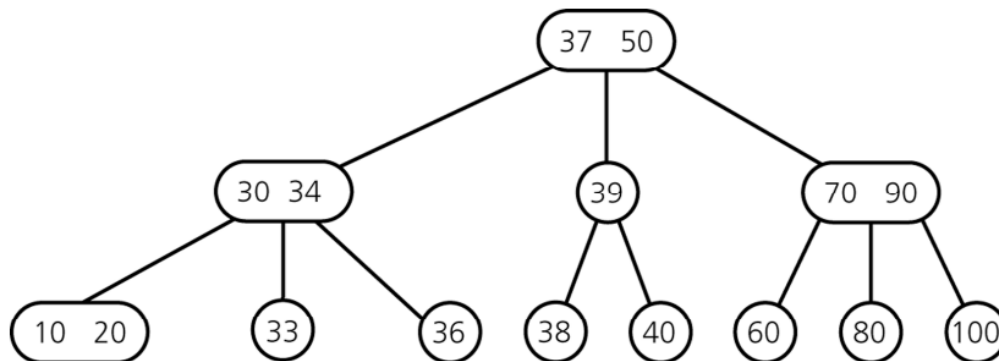
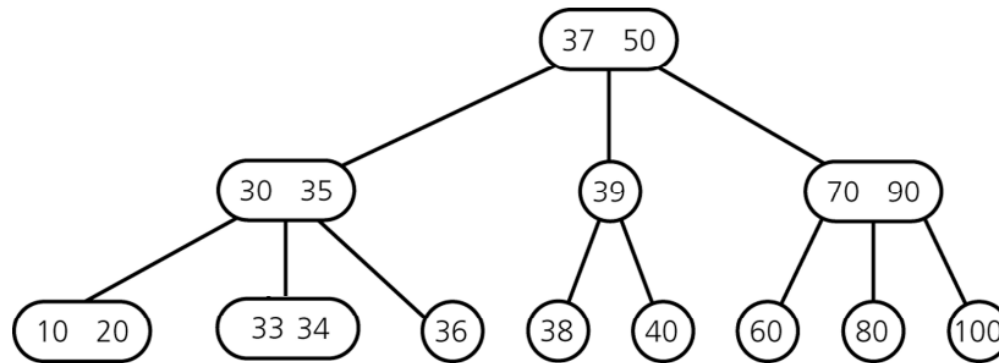
Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 32:



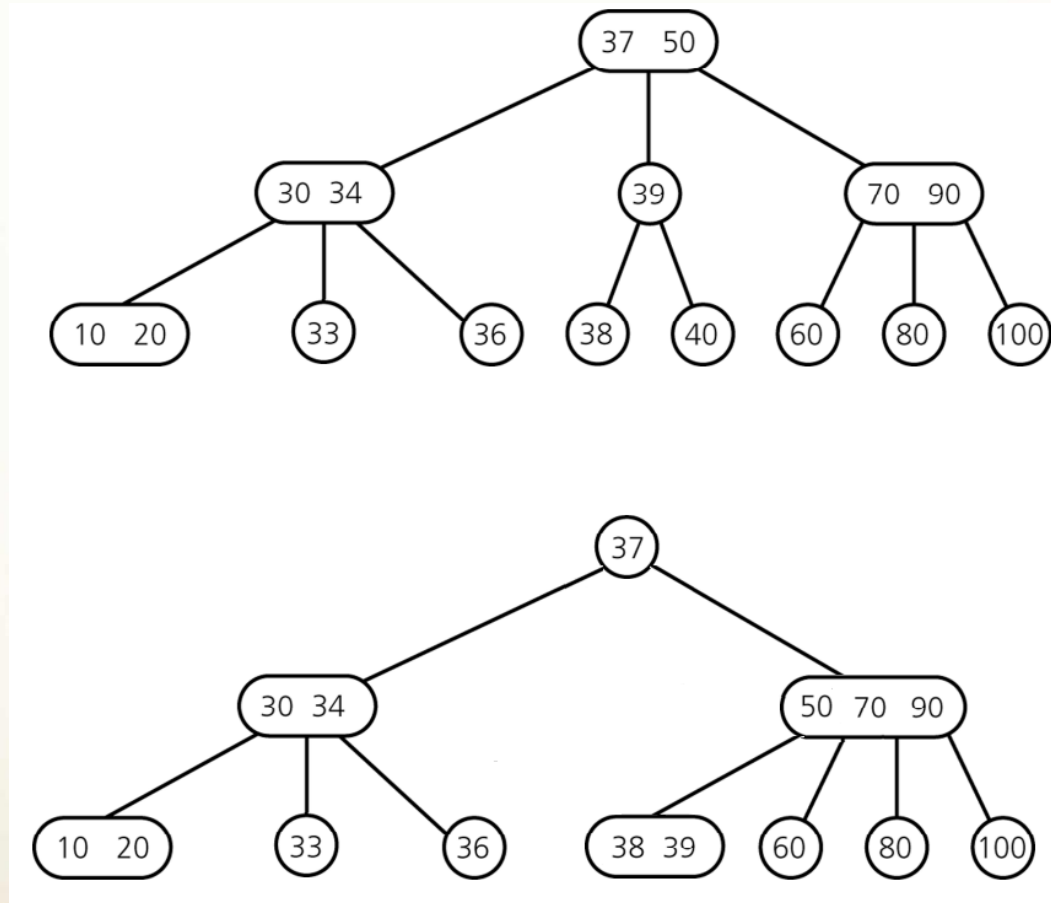
Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 35:



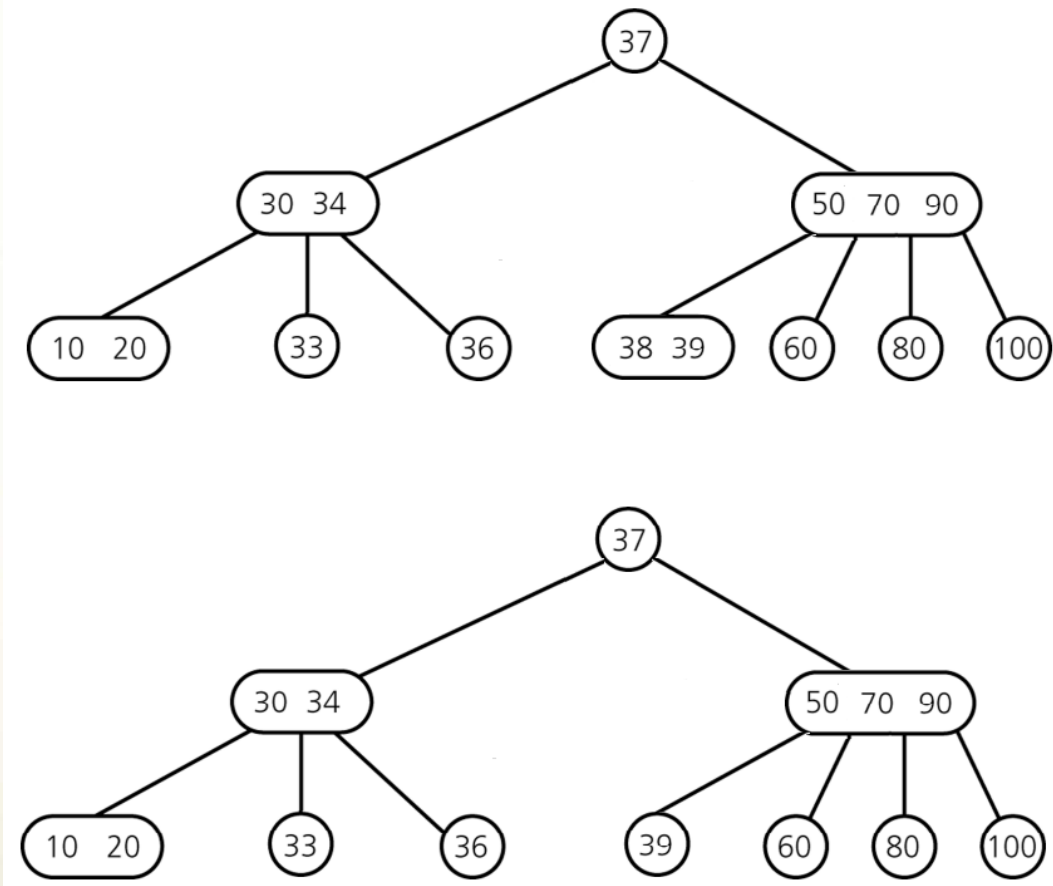
Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 40:



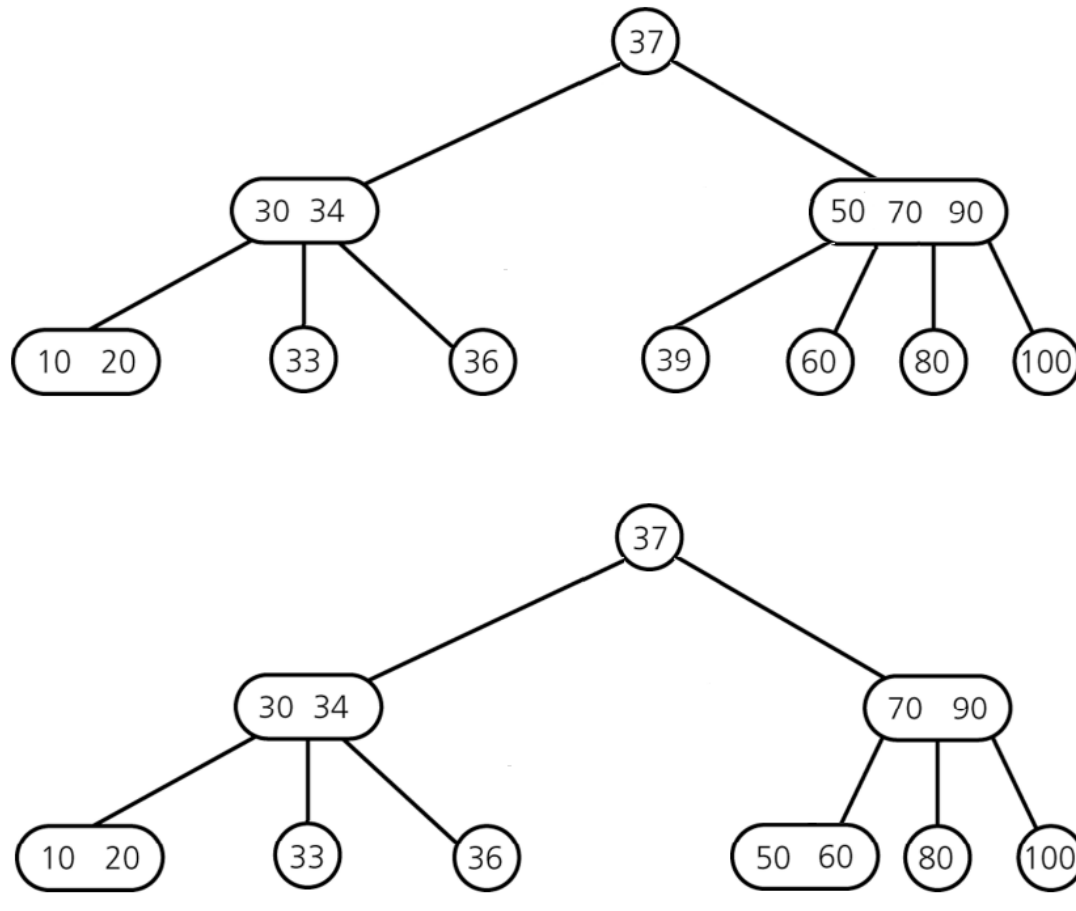
Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 38:



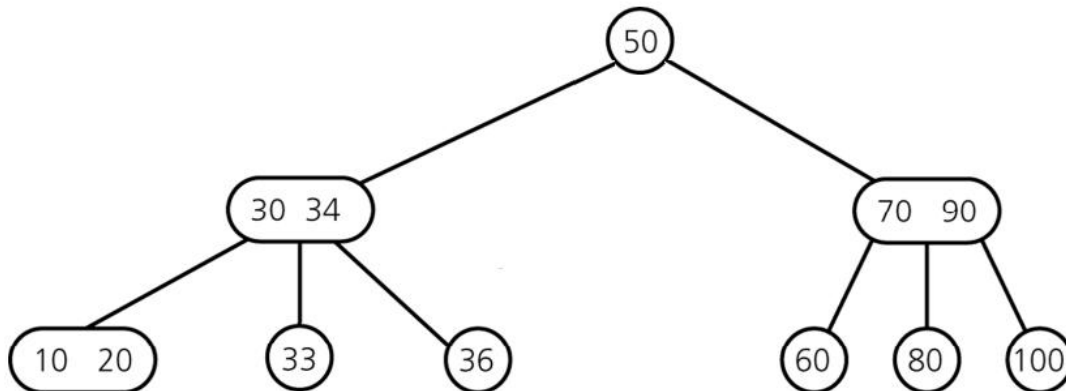
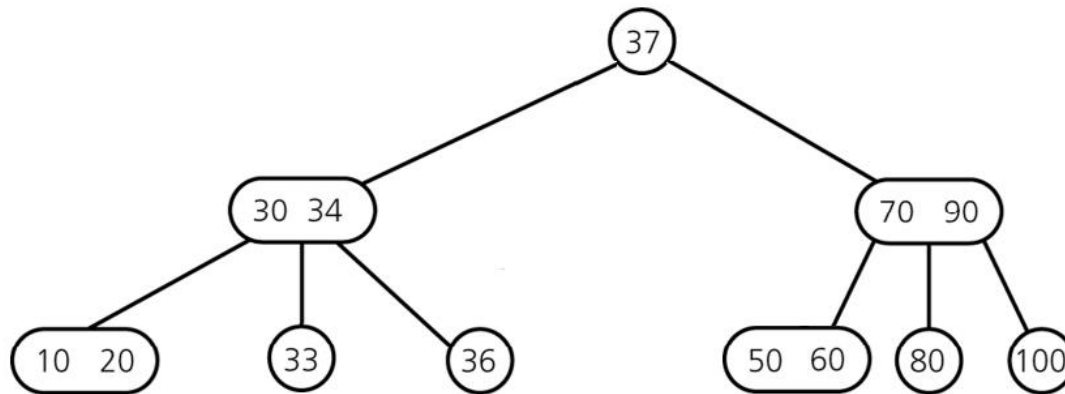
Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 39:



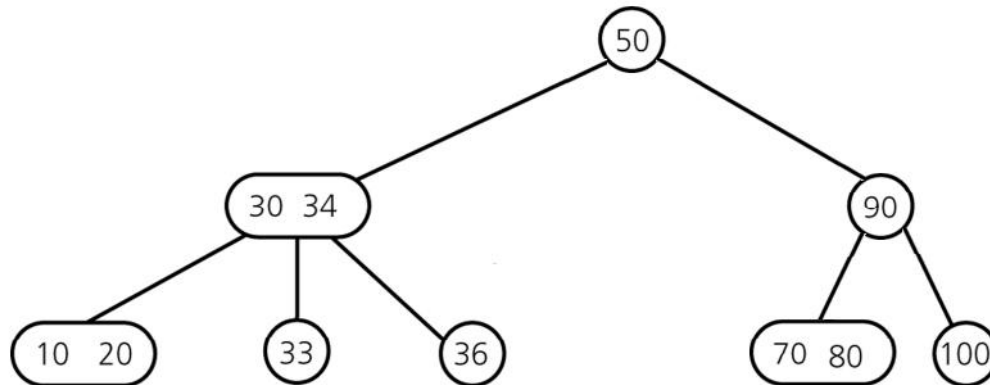
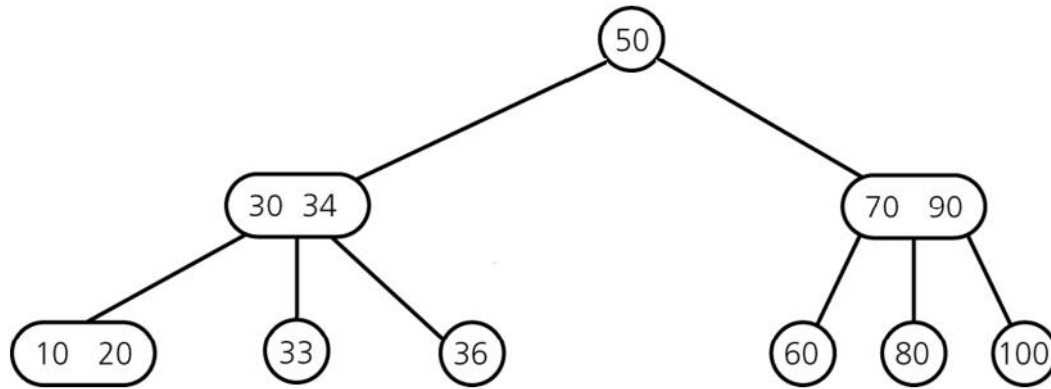
Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 37:



Elemento šalinimas 2–3–4 medyje

Šalinama reikšmė 60:



B-medžiai

B-medžiai buvo pasiūlyti 1972 metais autorių R. Bayer'io ir E. McCreight'o.

B-medžiai yra jau nagrinėtų medžių bendrasis atvejis:

- 2-osios eilės B-medis – pilnasis dvejetainis paieškos medis.
- 3-osios eilės B-medis yra 2–3 medis.
- 4-osios eilės B-medis yra 2–3–4 medis.

...

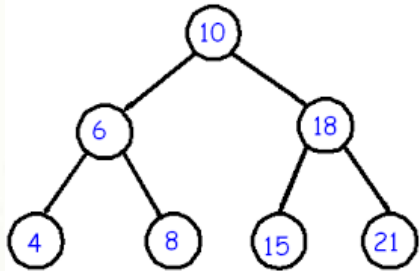
O kas yra M-osios eilės B-medis?

B-medis

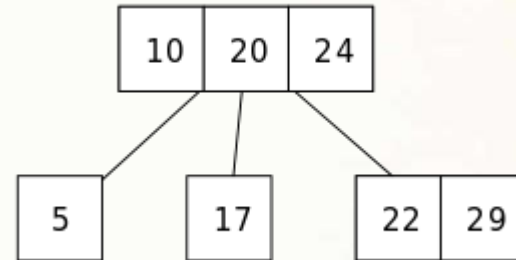
M-osios eilės B-medžiais vadinami save balansuojantys medžiai, kurie sudaromi pagal šias taisykles:

1. Šaknis turi mažiausiai 2 vaikus.
2. Kiekviena vidinė viršūnė turi mažiausiai 2 ir daugiausiai M vaikų.
3. Kiekviena viršūnė turi ne daugiau $M-1$ reikšmių.
4. Kiekvienos viršūnės reikšmės išdėstytos didėjimo tvarka.
5. Kiekvienos vidinės viršūnės i -toji reikšmė yra didesnė už visas i -tojo pomedžio reikšmes ir mažesnė už $(i+1)$ -tojo pomedžio reikšmes.
6. Visi B-medžio lapai yra tame pačiame aukštyje.

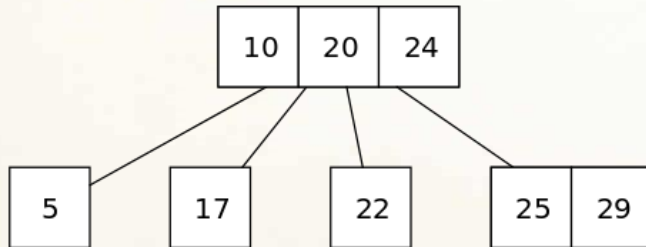
B-medžių pavyzdžiai



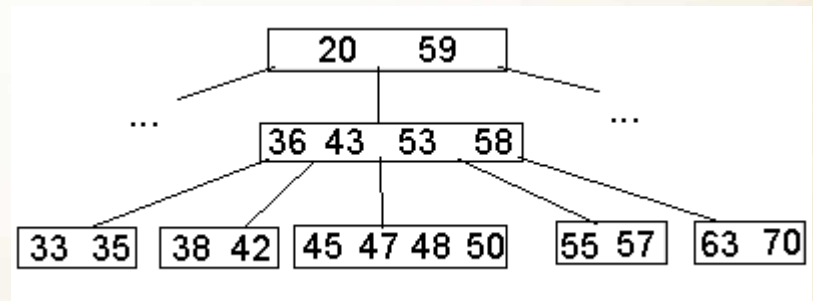
2-osios eilės B-medis



3-osios eilės B-medis



4-osios eilės B-medis



5-osios eilės B-medis

Išorinis B-medis

- Programos vykdymo metu išorinio B-medžio šaknis saugoma operatyviojoje atmintyje.
- Kitos B-medžio viršūnės nukopijuojamos iš išorinės atminties į operatyviają atmintį tik tada, kai jų prireikia.

Aukštos eilės B-medis turi savybę, kad jame vykdant paiešką kreipinių į antrinės atminties įrenginius sumažėja.

Pavyzdžiui, 100 eilės 5 lygių B-medis saugo iki trilijono įrašų, todėl paieška nepareikalauja daugiau nei 5 kreipinių į išorinės atminties įrenginius.

Ačiū už dėmesį.

Klausimai?