Algoritmai ir duomenų struktūros

7 paskaita

2026-03-24

7 paskaitos tikslas

- Susipažinti su:

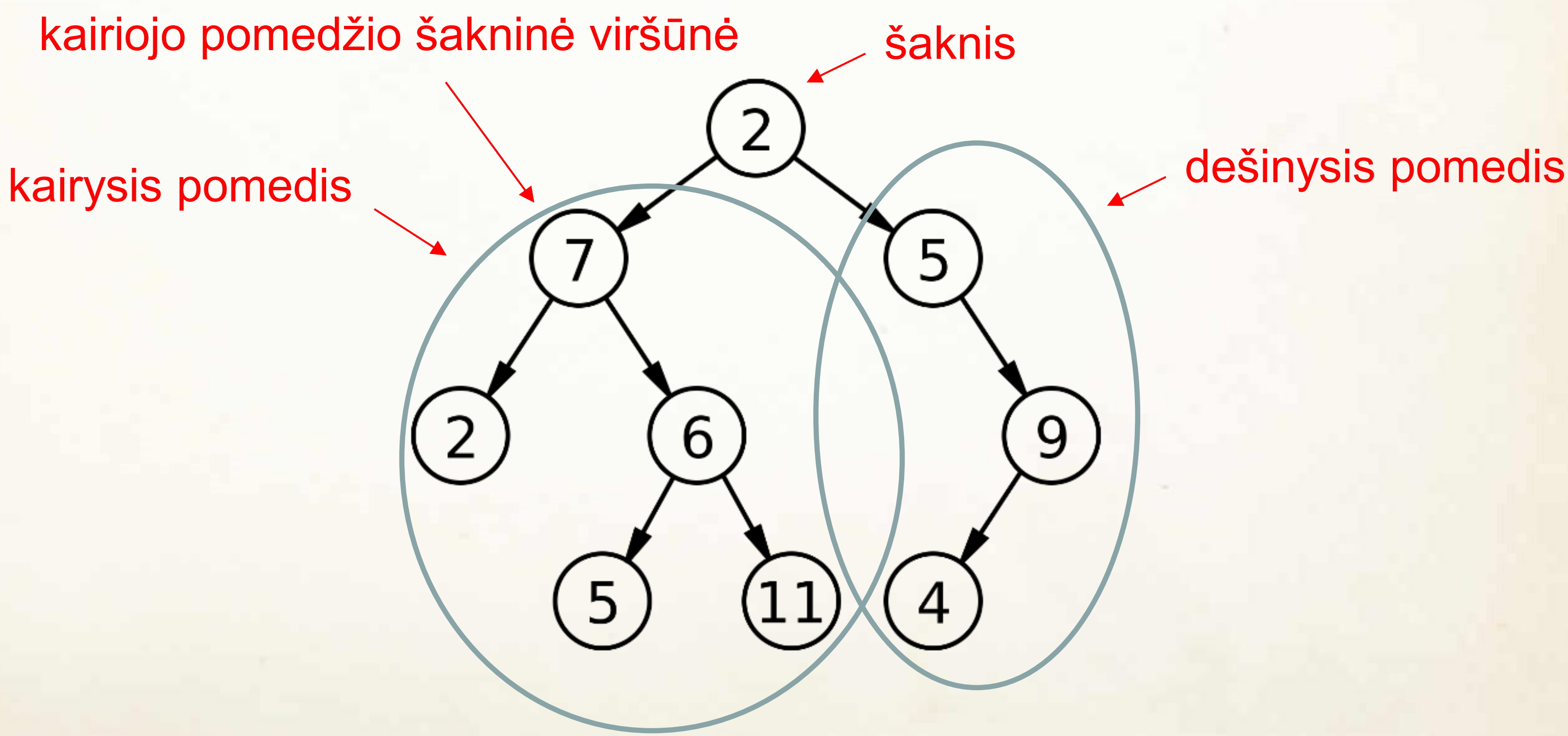
  Dvejetainiais paieškos medžiais,

  AVL medžiais,

  Raudonais–juodais medžiais.

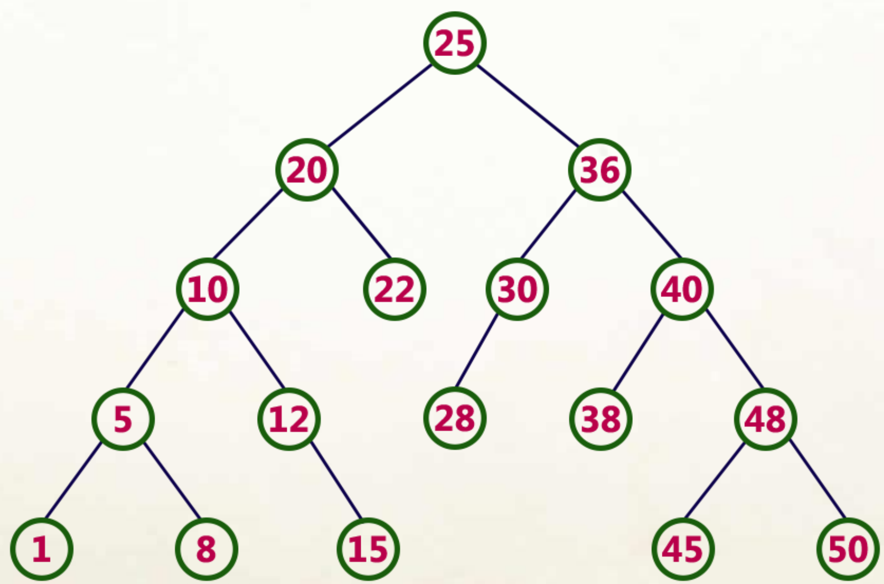
Dvejetainis medis

- Dvejetainis medis (*binary tree*) – tai toks medis, kurio kiekviena viršūnė turi ne daugiau kaip 2 vaikus:



Dvejetainis paieškos medis

- Dvejetainis paieškos medis (*binary search tree*) – tai toks dvejetainis medis, kurio viršūnių reikšmės išdėstytos tokia tvarka:
  - Viršūnės reikšmė yra didesnė už visas reikšmes jos kairiajame pomedyje.
  - Viršūnės reikšmė yra mažesnė už visas reikšmes jos dešiniajame pomedyje.
  - Kairysis ir dešinysis pomedžiai yra dvejetainiai paieškos medžiai.
  - Viršūnių reikšmės negali kartotis.



Operacijos dvejetainiame paieškos medyje

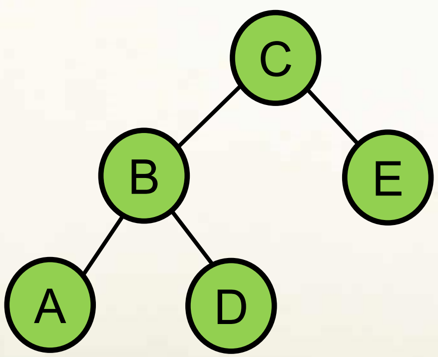
- Medžio apėjimas
- Reikšmės paieška
- Elemento įterpimas
- Elemento šalinimas

Dvejetainio paieškos medžio apėjimas

Apėjimo strategijos:

- V-K-D: aplankyti **V**iršūnę, apeiti **K**airįjį pomedį, apeiti **D**ešinįjį pomedį.
- K-V-D: apeiti **K**airįjį pomedį, aplankyti **V**iršūnę, apeiti **D**ešinįjį pomedį.
- K-D-V: apeiti **K**airįjį pomedį, apeiti **D**ešinįjį pomedį, aplankyti **V**iršūnę.

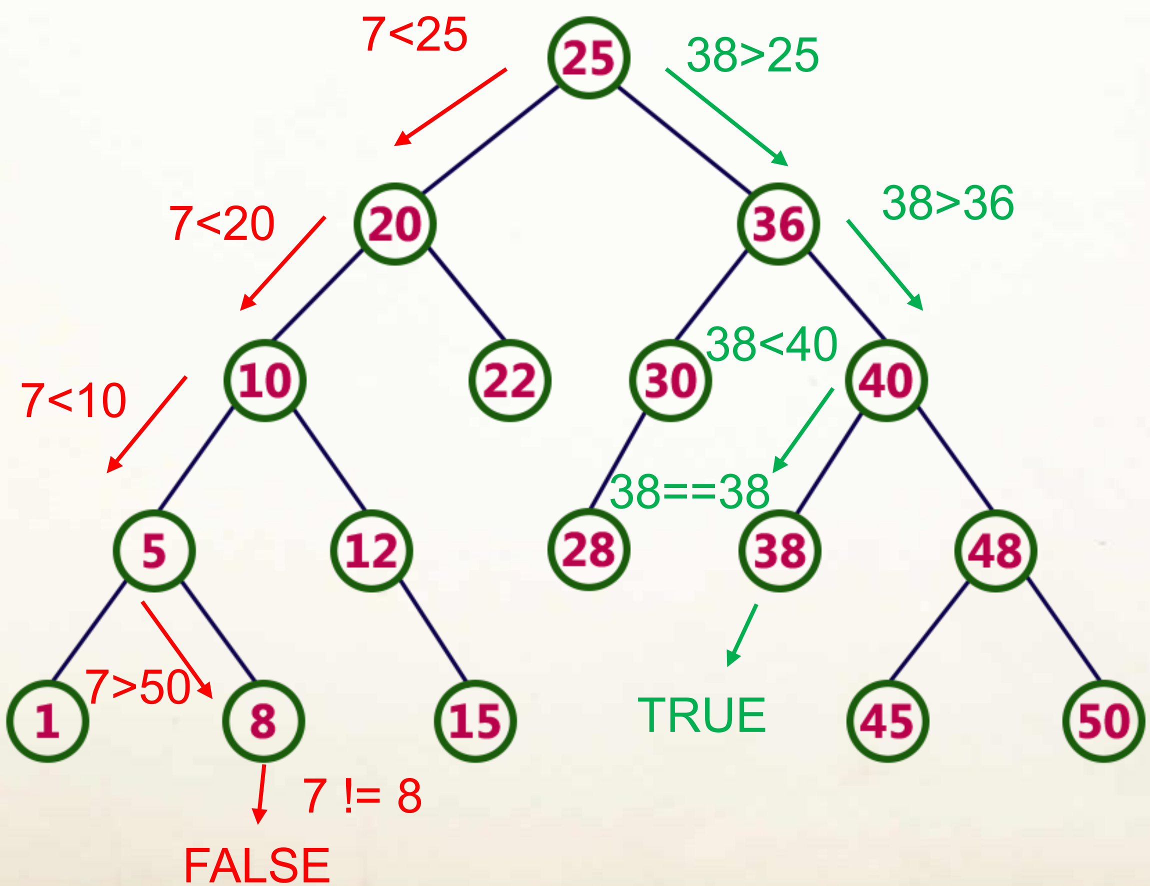
Apėjimo pavyzdžiai:



V-K-D: C B A D E
K-V-D: A B D C E
K-D-V: A D B E C

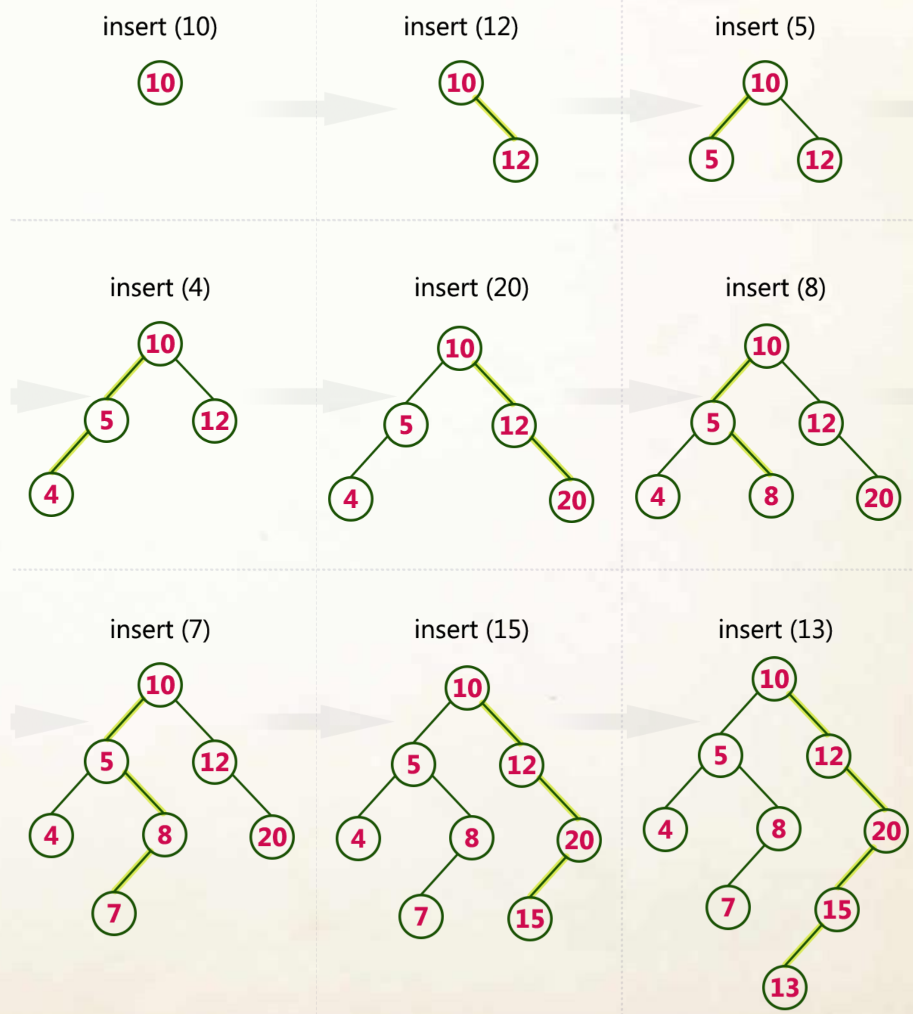
Reikšmės paieška dvejetainiame paieškos medyje

Ieškomos reikšmės **7** ir **38**:



Elementų įterpimas dvejetainiame paieškos medyje

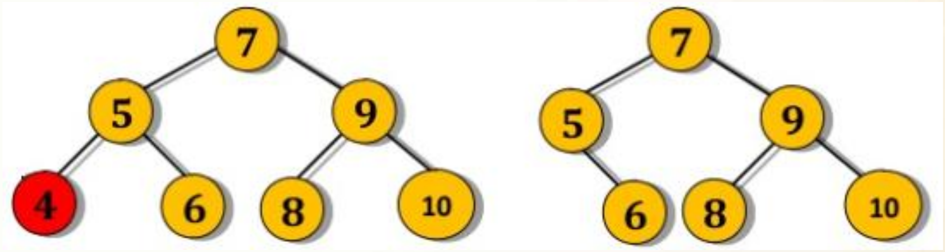
- Jei įterpiama reikšmė lygi viršūnės reikšmei, darbas baigiamas.
- Kitu atveju nauja reikšmė įterpiama dvejetainės paieškos principu leidžiantis žemyn kol randama vieta naujam lapui.



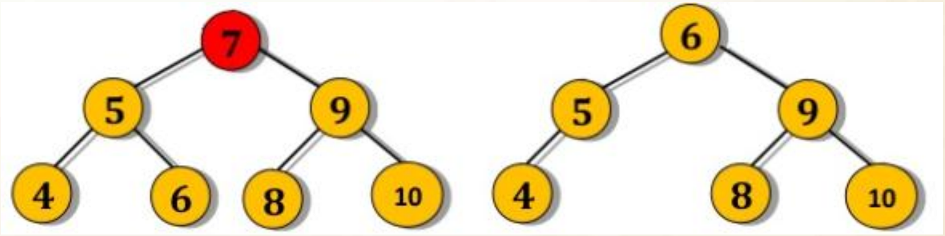
Elemento šalinimas dvejetainiame paieškos medyje

- Reikia rasti viršūnę su išmetamais duomenimis.
- Jei ta viršūnė – lapas, jis ištrinamas.
- Jei ta viršūnė nėra lapas, jos reikšmę galima sukeisti su didžiausia kairiojo pomedžio arba mažiausia dešiniojo pomedžio reikšme ir išmesti tą viršūnę.

Viršūnės su reikšme 4 išmetimo pavyzdys:

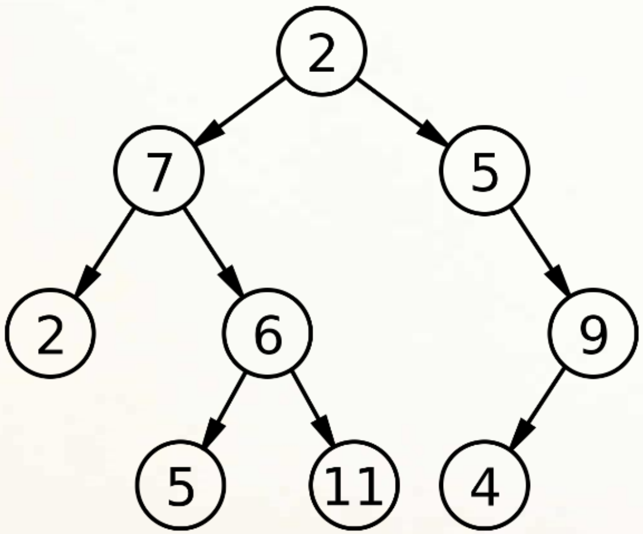


Viršūnės su reikšme 7 išmetimo pavyzdys:

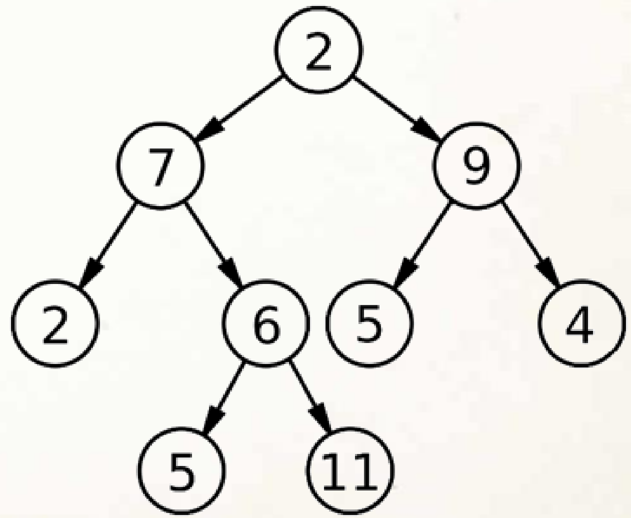


Subalansuotas medis

- Subalansuotu medžiu vadinamas toks medis, kurio šaknis priklauso to medžio centrui, taip pat ir kiekvieno pomedžio šakninė viršūnė priklauso to pomedžio centrui.



Nesubalansuotas medis



Subalansuotas medis

- Pomedžio aukštis atitinka ilgiausio tako briaunų skaičių tame pomedyje.

Kokia prasmė balansuoti medžius?

- Dvejetainis paieškos medis gali išsibalansuoti atliekant viršūnių įterpimo ar šalinimo operaciją, todėl paieška jame gali tapti neefektyvi, t. y. išaugti algoritmo sudėtingumas.

- Šios problemos sprendimo būdai:
  - Medžio subalansavimas.
  - Neišsibalansuojančių medžių naudojimas (pavyzdžiui, AVL medžių).

AVL medžiai

- AVL medžiu vadinamas dvejetainis paieškos medis, kurio kiekvienos vidinės viršūnės dešiniojo ir kairiojo pomedžių aukščiai skiriasi daugiausiai vienetu.

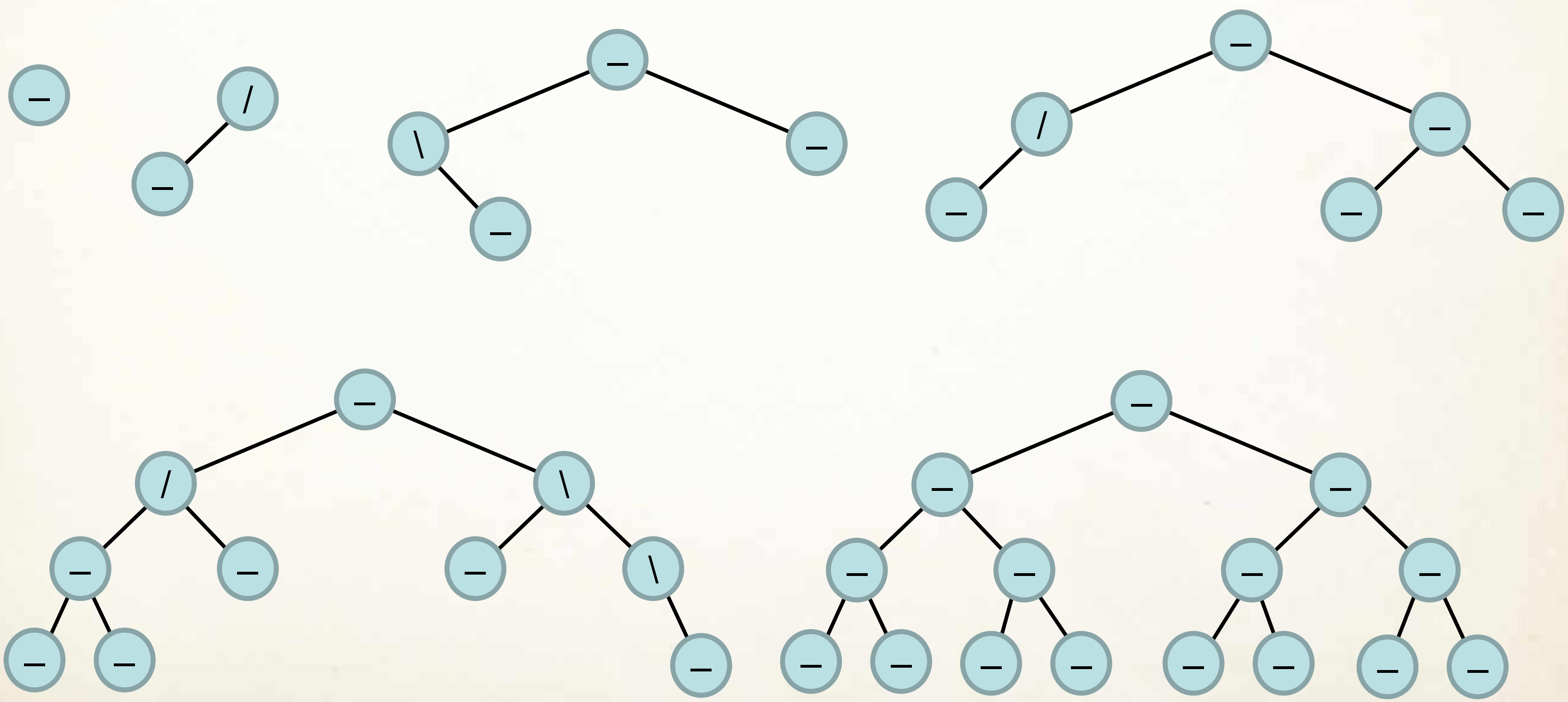
- Išvada: visi AVL medžio pomedžiai yra AVL medžiai.

- AVL medis – pirmasis besibalansuojantis medis, kuris 1962 m. buvo pasiūlymas autorių G. M. **A**delson-**V**elsky ir E. M. **L**andis, todėl ir gavo vardą

AVL.

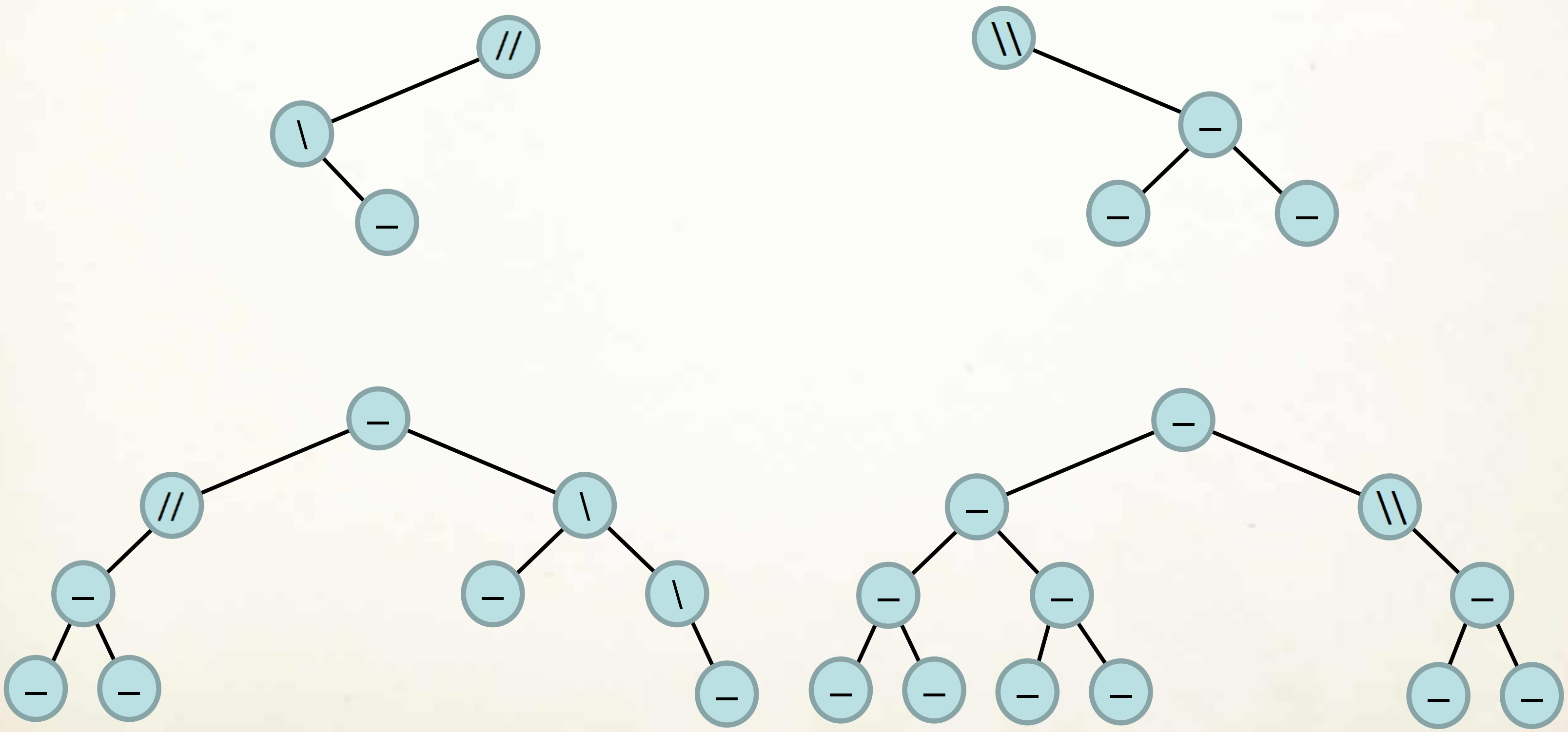
Pavyzdžiai

- Žemiau pateikti AVL medžiai. Kodėl?



Pavyzdžiai

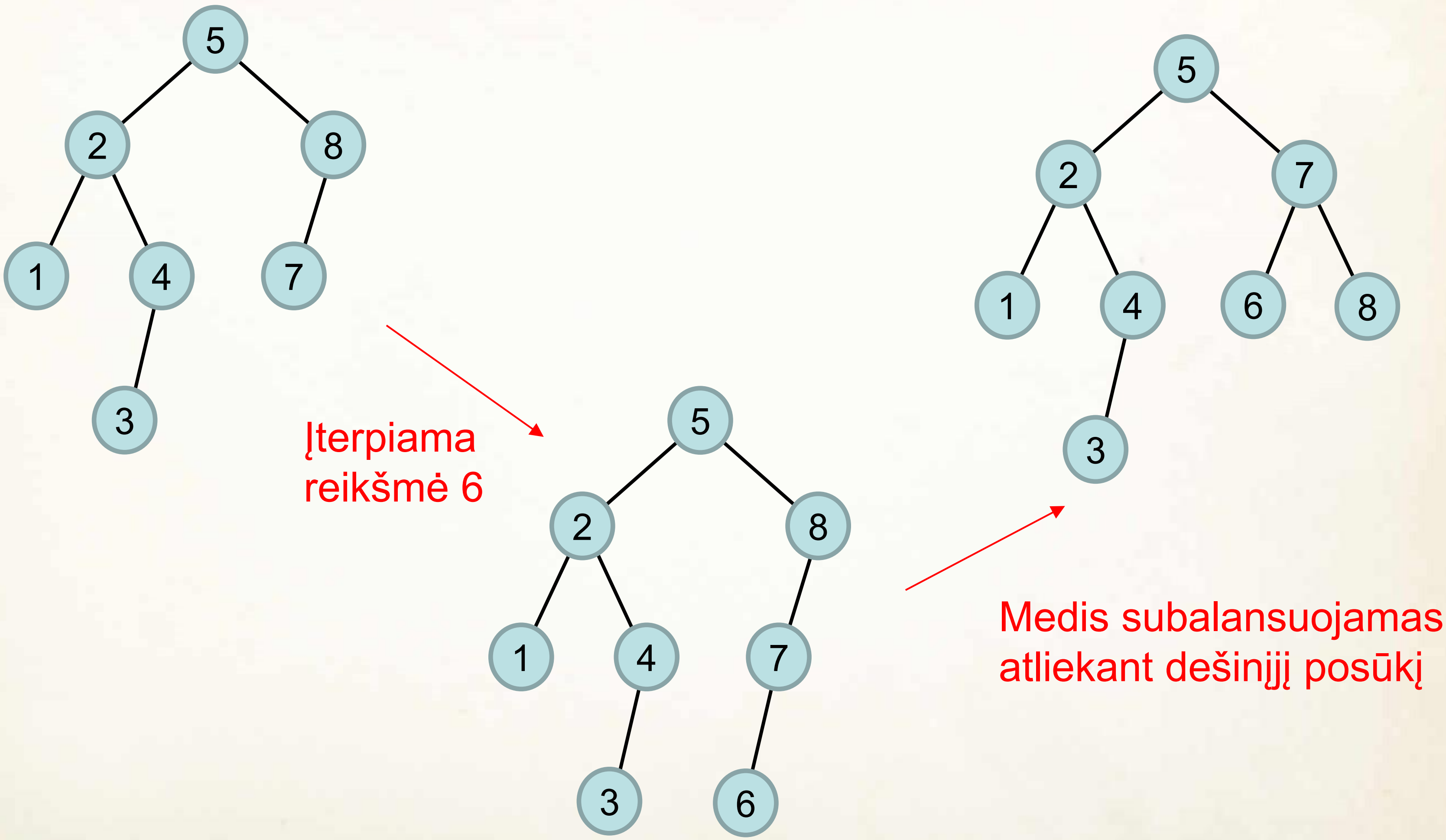
- Žemiau pateikti ne AVL medžiai. Kodėl?



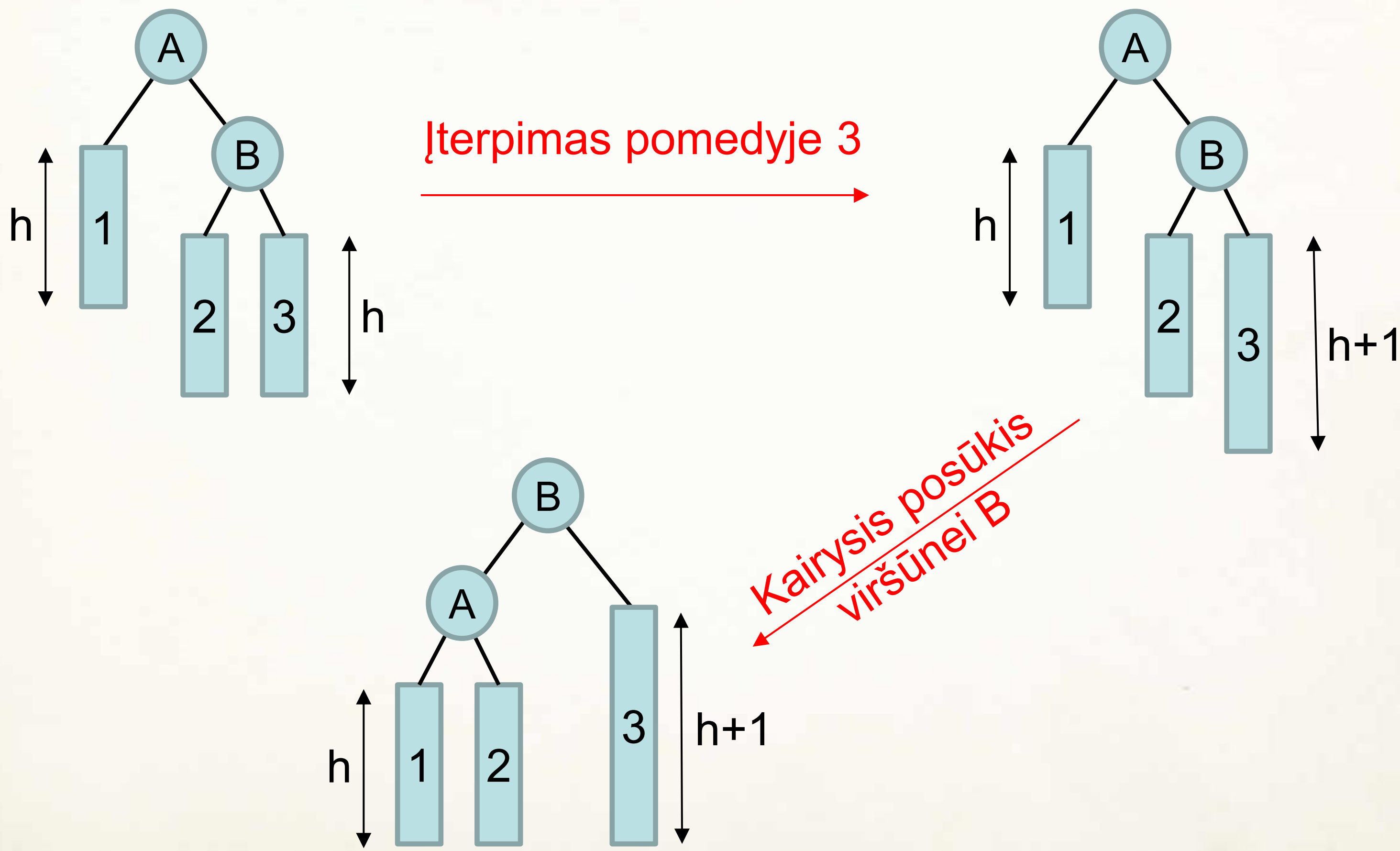
AVL medžiuose atliekamos operacijos

- Elementų (viršūnių) įterpimas.
- Elementų (viršūnių) šalinimas.
- AVL medžio balansavimas:
  - Pomedžio sukimas į kairę pusę.
  - Pomedžio sukimas į dešinę pusę.
  - Dvigubas pomedžio sukimas.

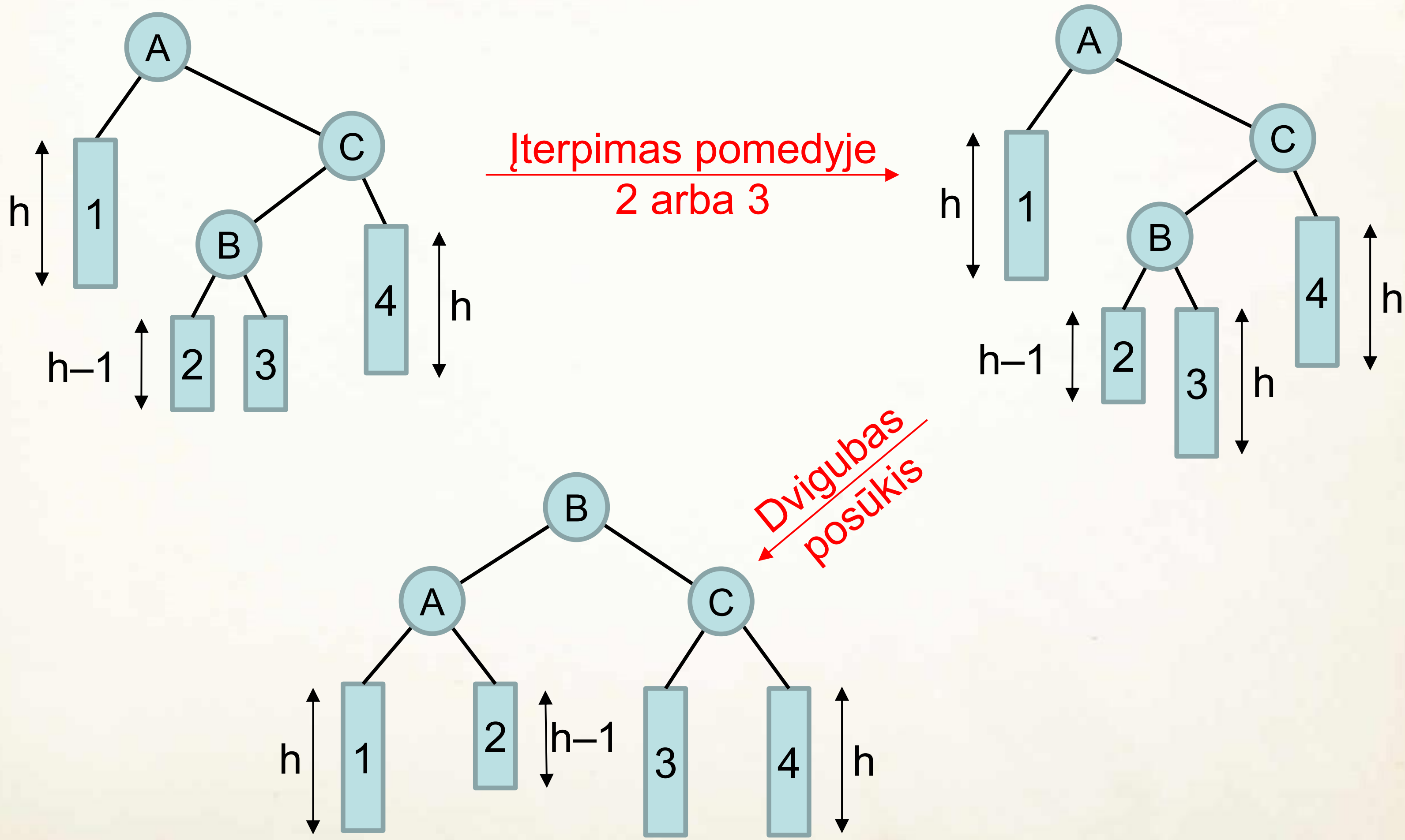
Viršūnės įterpimas AVL medyje (1)



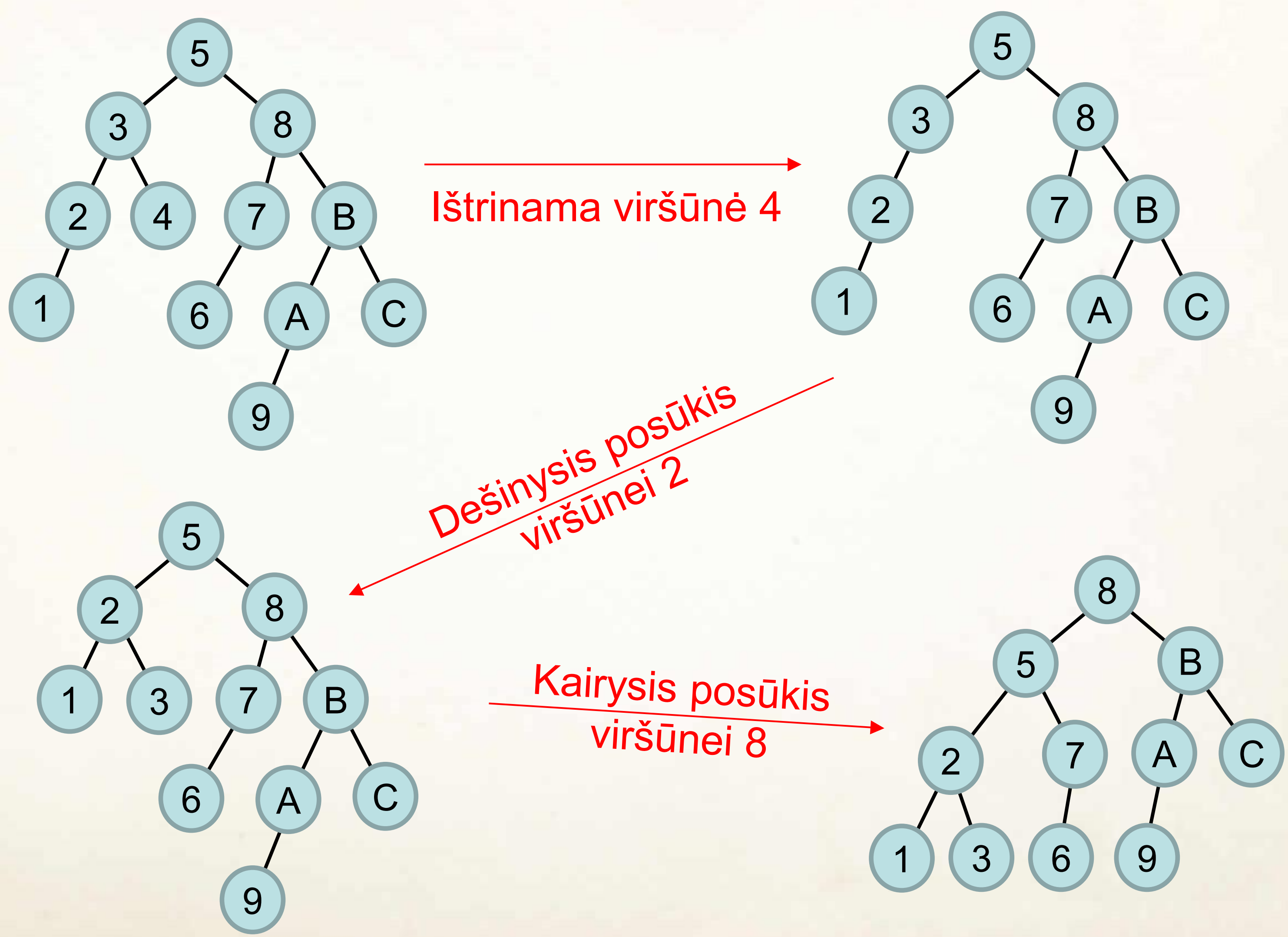
Viršūnės įterpimas AVL medyje (2)



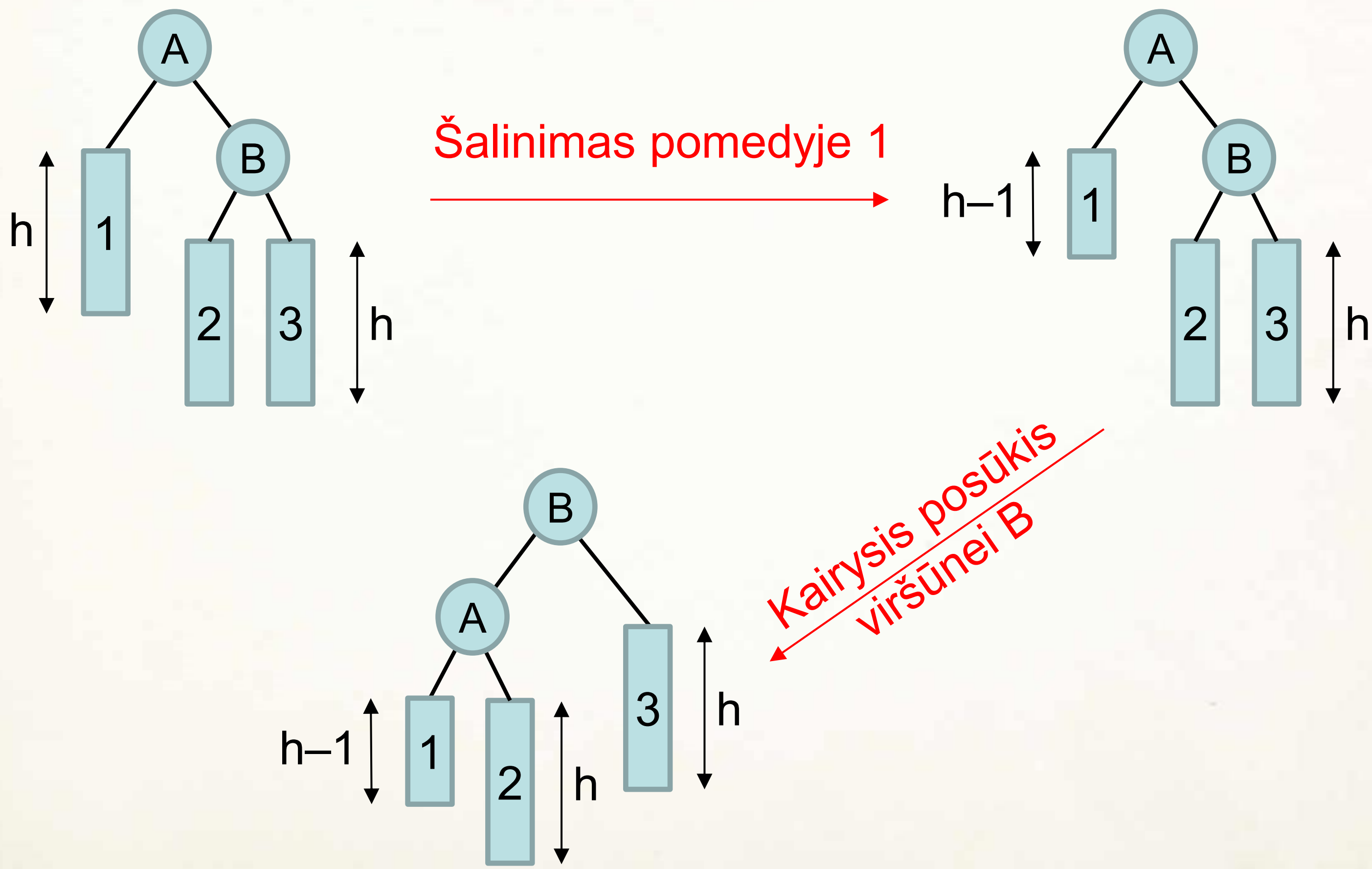
Viršūnės įterpimas AVL medyje (3)



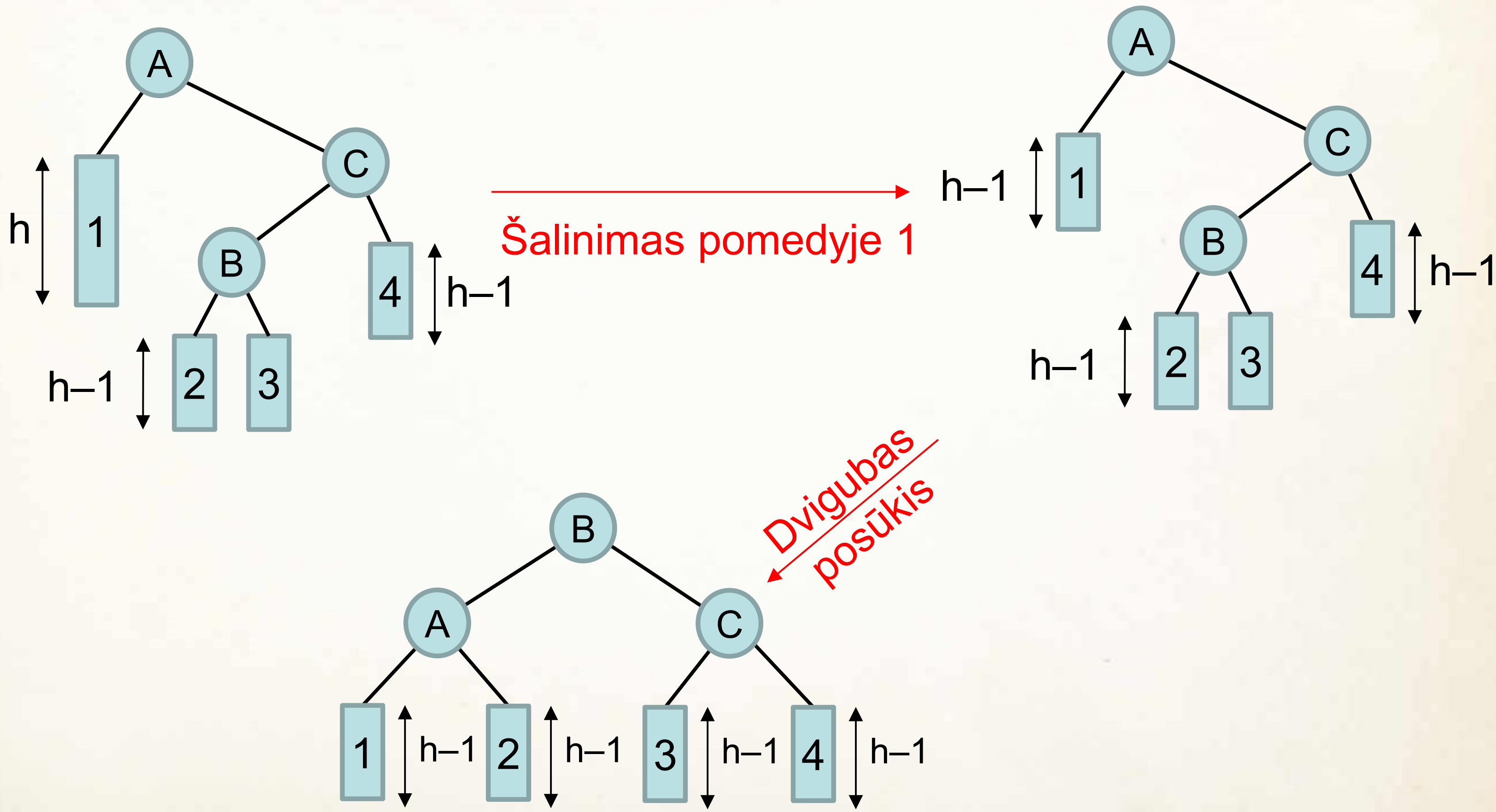
Viršūnės šalinimas AVL medyje (1)



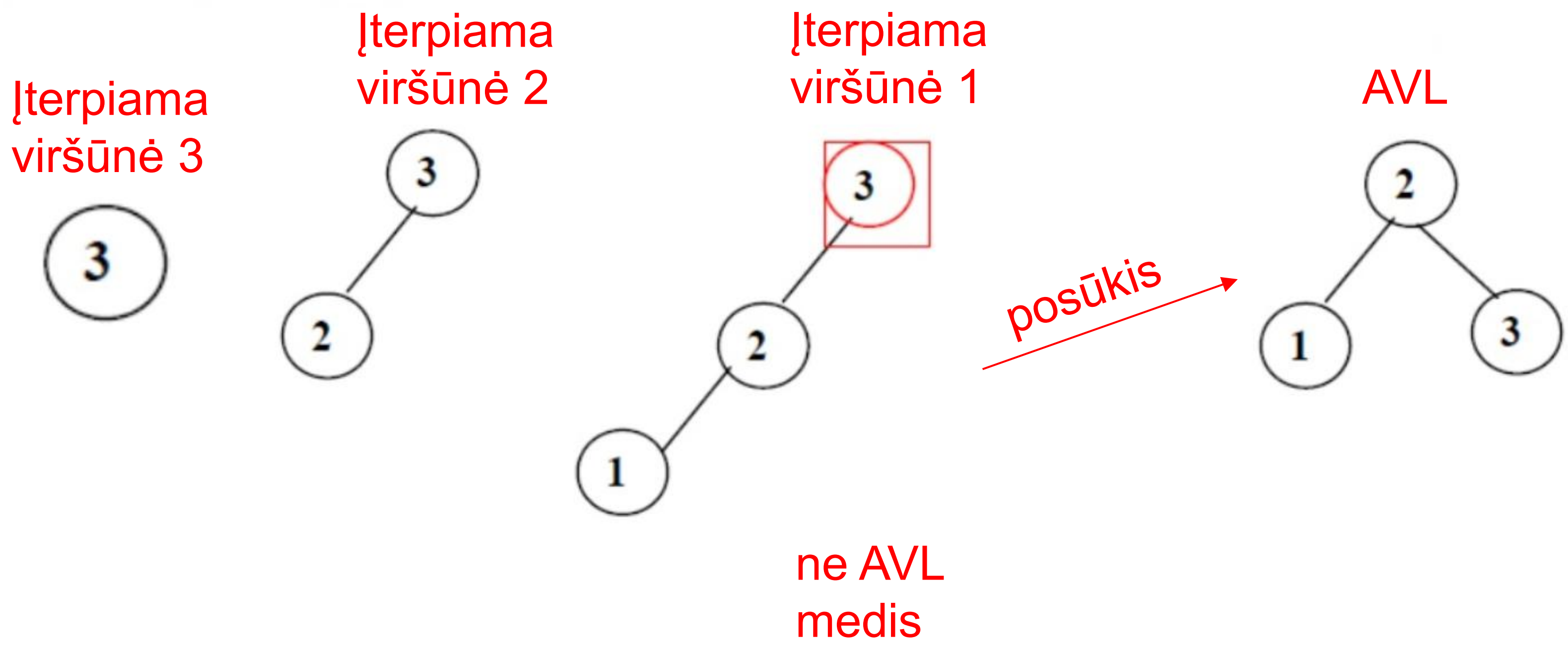
Viršūnės šalinimas AVL medyje (2)



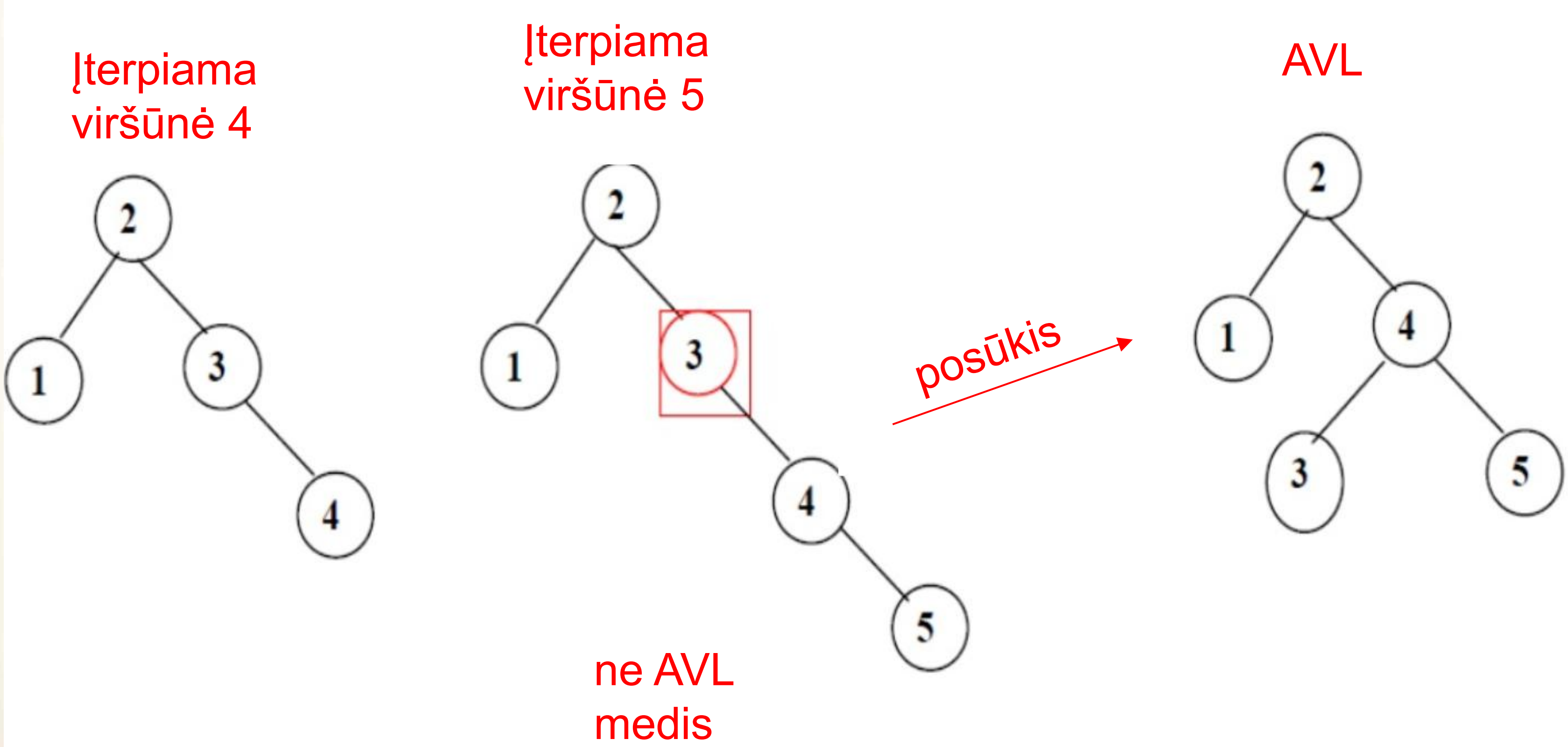
Viršūnės šalinimas AVL medyje (3)



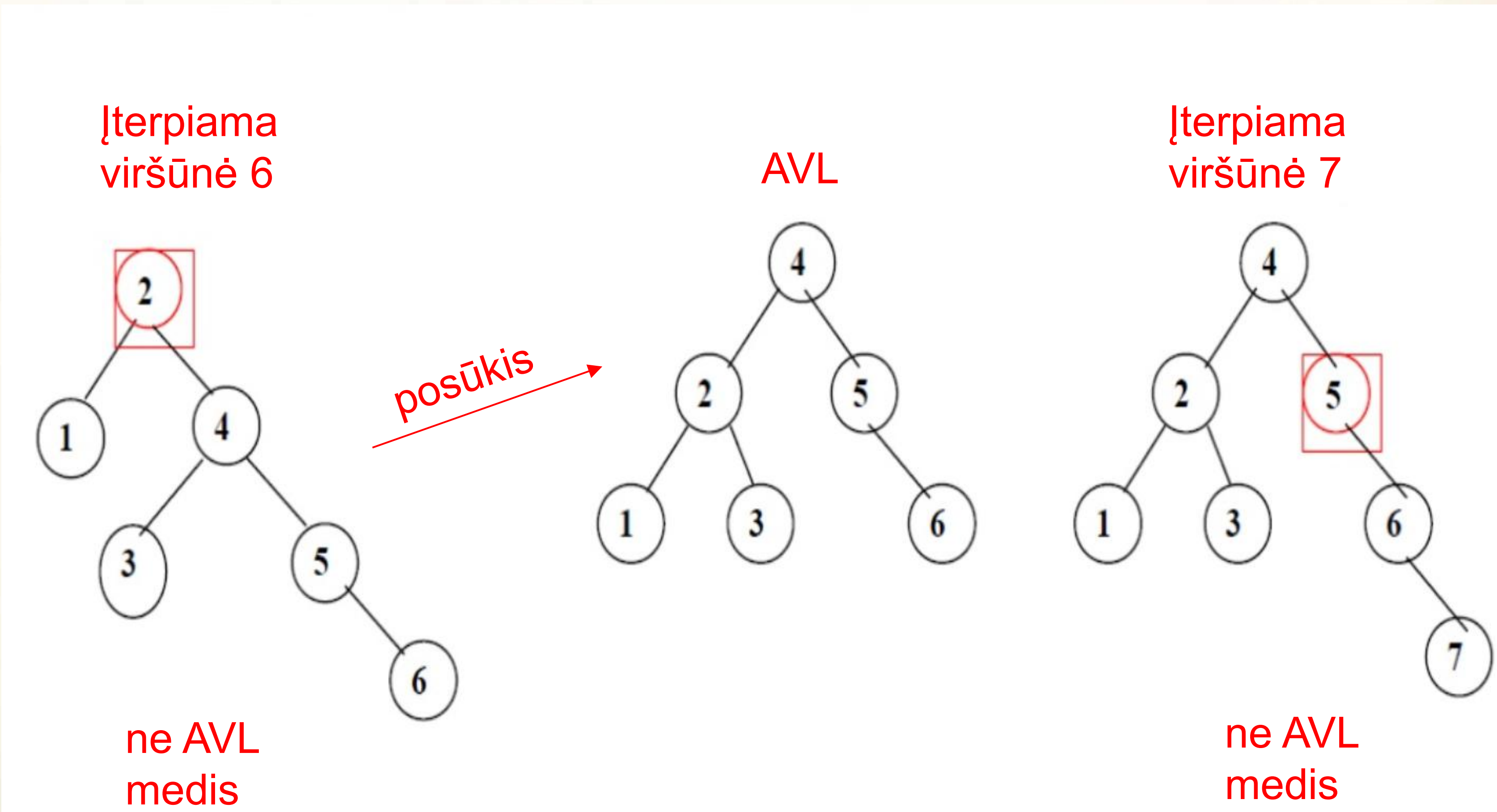
AVL medžių pavyzdžiai (1)



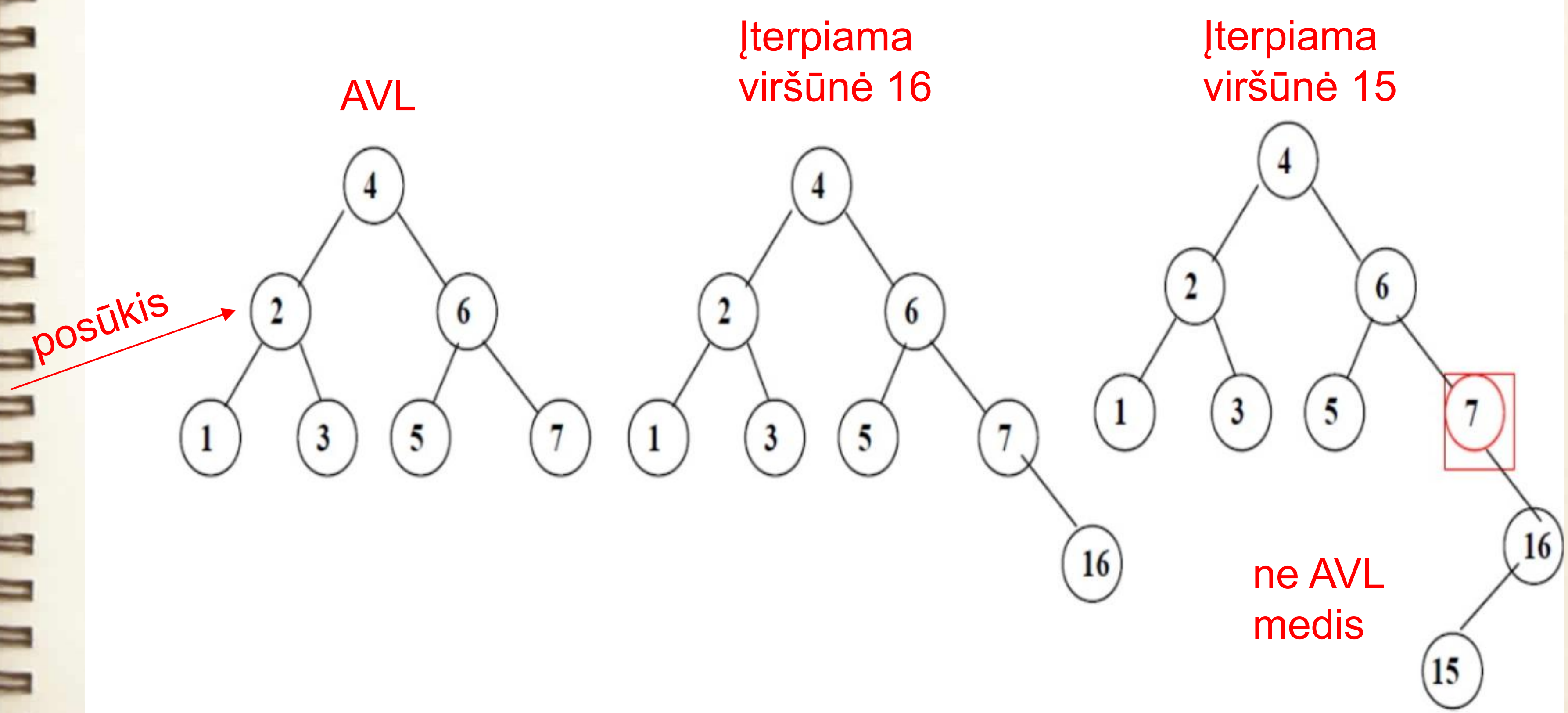
AVL medžių pavyzdžiai (2)



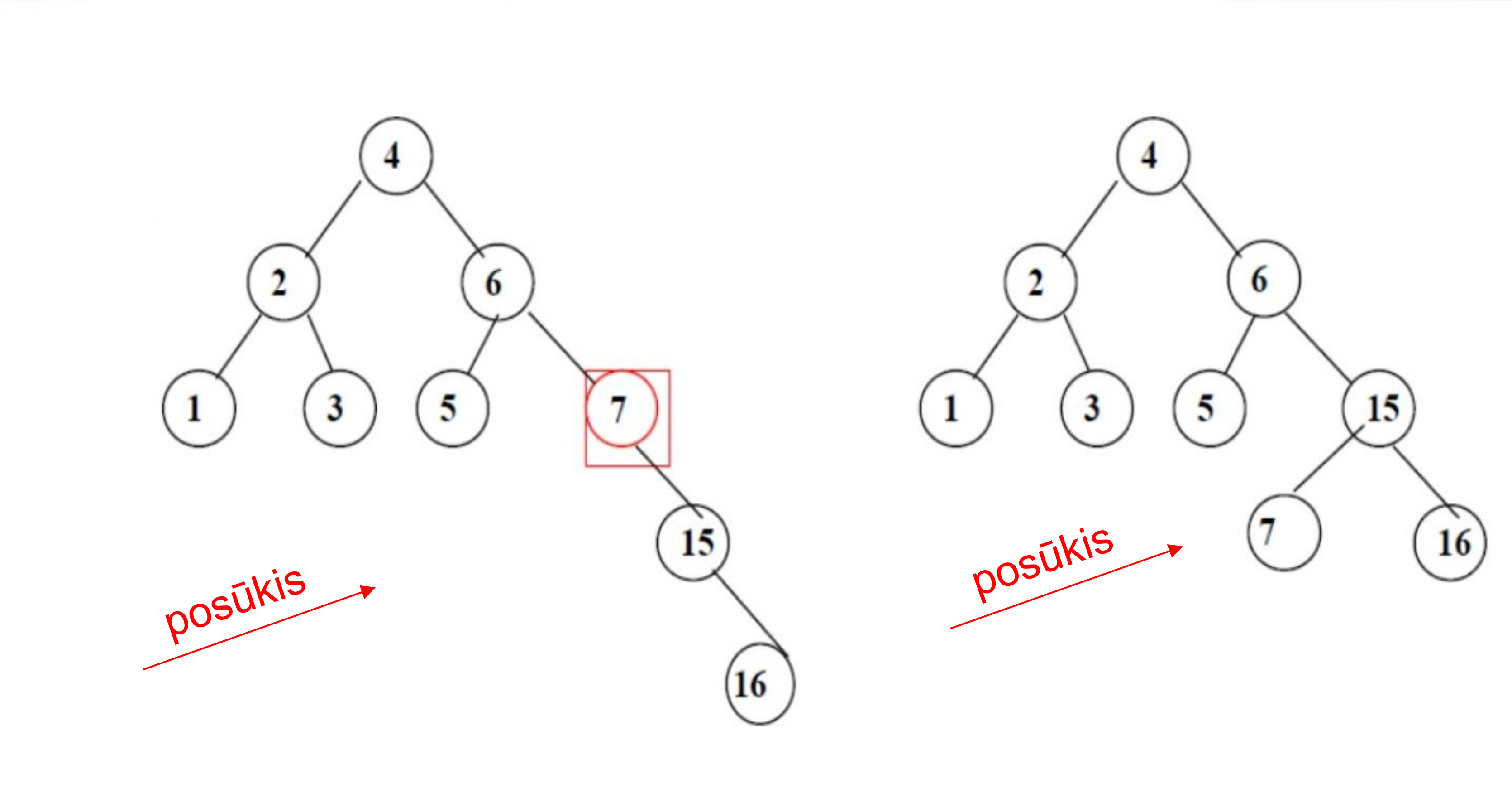
AVL medžių pavyzdžiai (3)



AVL medžių pavyzdžiai (4)

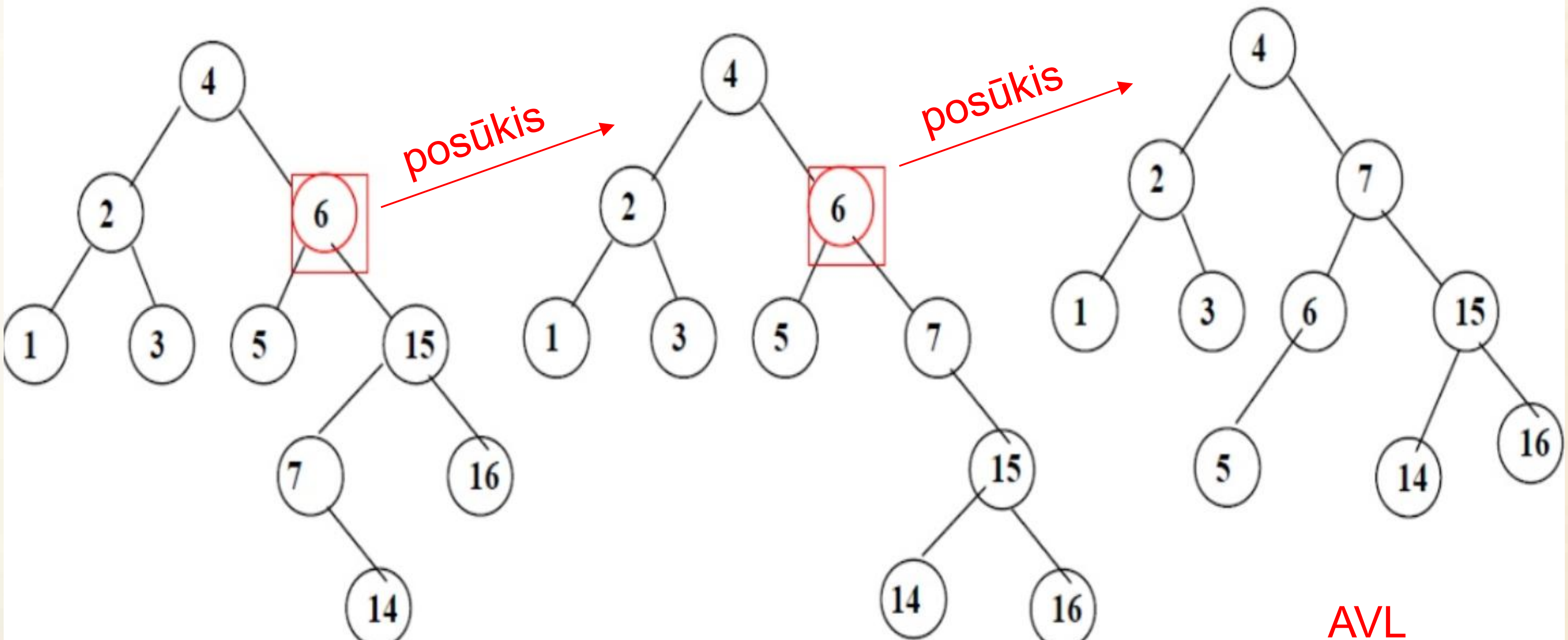


AVL medžių pavyzdžiai (5)



AVL medžių pavyzdžiai (6)

Įterpiama viršūnė 14



ne AVL medis

ne AVL medis

AVL

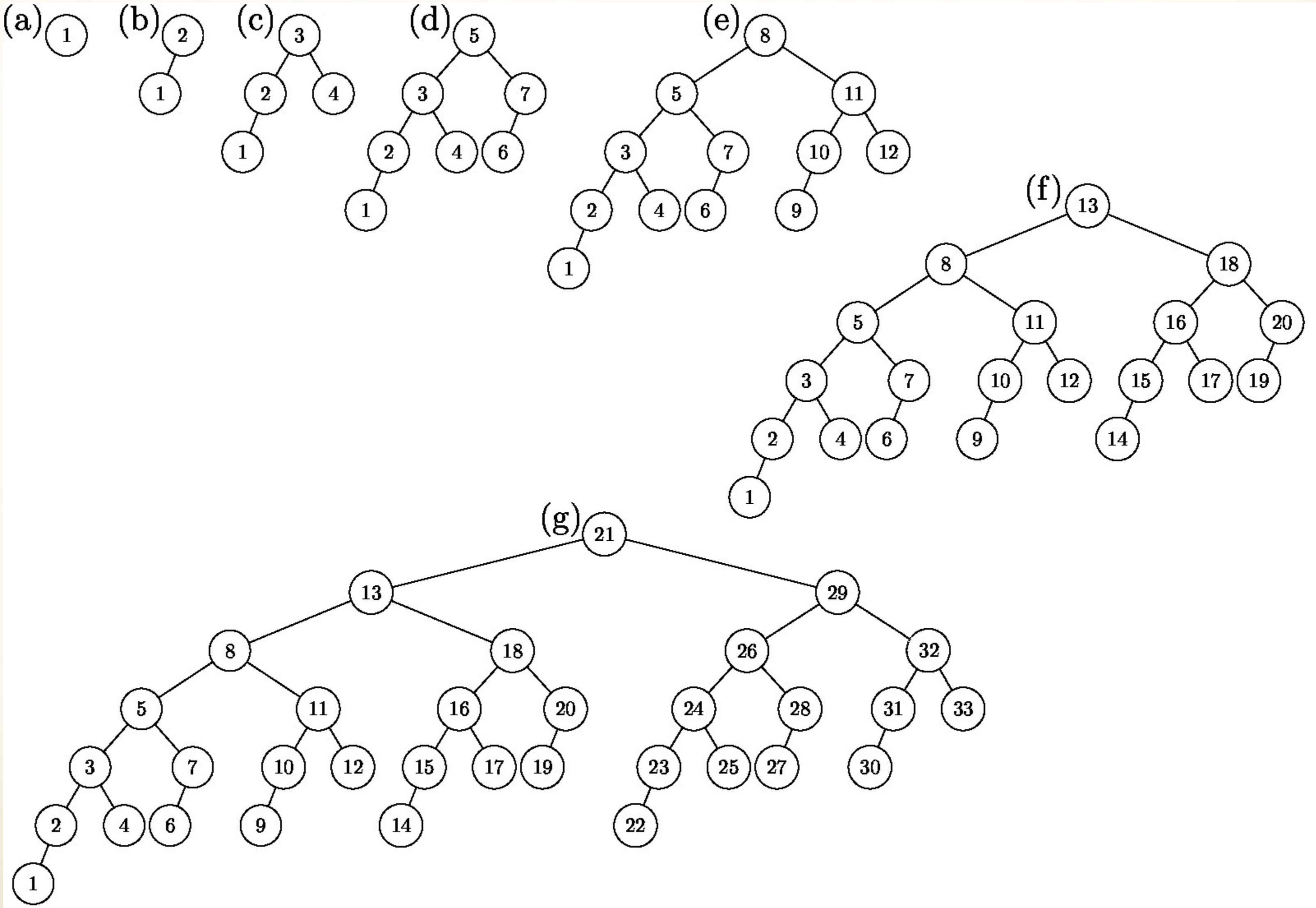
Apibendrinimas

- AVL medžio, turinčio n viršūnių, aukštis yra O(log n).
- *Tegu n(h) – AVL medžio, kurio aukštis h, viršūnių skaičius. <u>Ieškosime minimalaus n(h):</u>*
- *Akivaizdu, kad n(1)=1 ir n(2)=2.*
- *Kai n>2, tai AVL medis turi pomedžius, kurių vieno aukštis n(h-1), kito n(h-1) arba n(h-2).*
- *Kai vienas iš pomedžių turės mažiausiai viršūnių, jo aukštis bus n(h-2), todėl bus teisinga lygybė:*

$$n(h)=1+n(h-1)+n(h-2).$$

- *AVL medžiai, kurių minimalus viršūnių skaičius fiksuotam aukščiui h, vadinami **Fibonačio medžiais**.*

Fibonačio medžių pavyzdžiai



AVL medžio didžiausias aukštis

Abiejose lygybės n(h)=1+n(h-1)+n(h-2) pusėse pridėjus po 1, gauname:

n(h)+1=n(h-1)+1+n(h-2)+1.

Kadangi n(h)+1 yra Fibonačio sekos narys, tai

$$n(h)+1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}$$

arba

$$n(h)\approx\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}-1, \qquad kai \quad h\to\infty$$

Iš šios lygybės h≈1,44 n(h). Tai reiškia, kad blogiausiu atveju AVL medžio, turinčio n viršūnių, aukštis lygus O(log n).

Fibonačio sekos bendasis narys

Raskite Fibonačio sekos bendrąjį narį, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$.

<u>Sprendimas</u>

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Big| : x^n,$$

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \\ C_1 \cdot \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{2} + C_2 \cdot \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = 1, \end{cases}$$

$$-\begin{cases} C_1 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right) + C_2 \cdot \left(1-\sqrt{5}\right) = 2, \\ C_1 \cdot \left(3+\sqrt{5}\right) + C_2 \cdot \left(3-\sqrt{5}\right) = 2, \end{cases}$$

$$2C_1 + 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1,$$

$$C_1 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right) + C_1 \cdot \left(\sqrt{5}-1\right) = 2,$$

$$C_1 \cdot 2\sqrt{5} = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

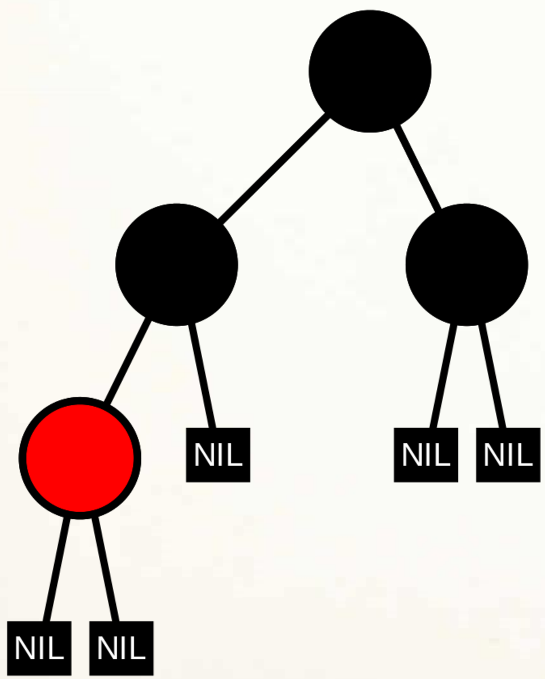
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

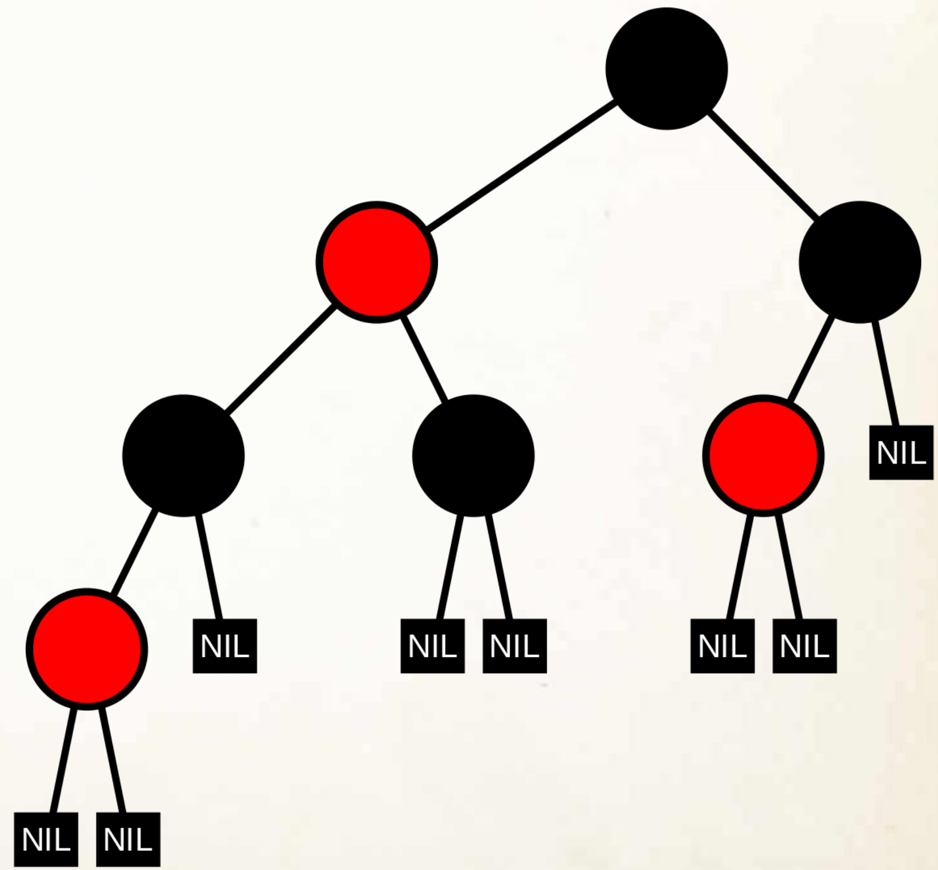
Raudoni–juodi medžiai

- Raudoniems–juodiems medžiams formuluojamos šios struktūrinės savybės:

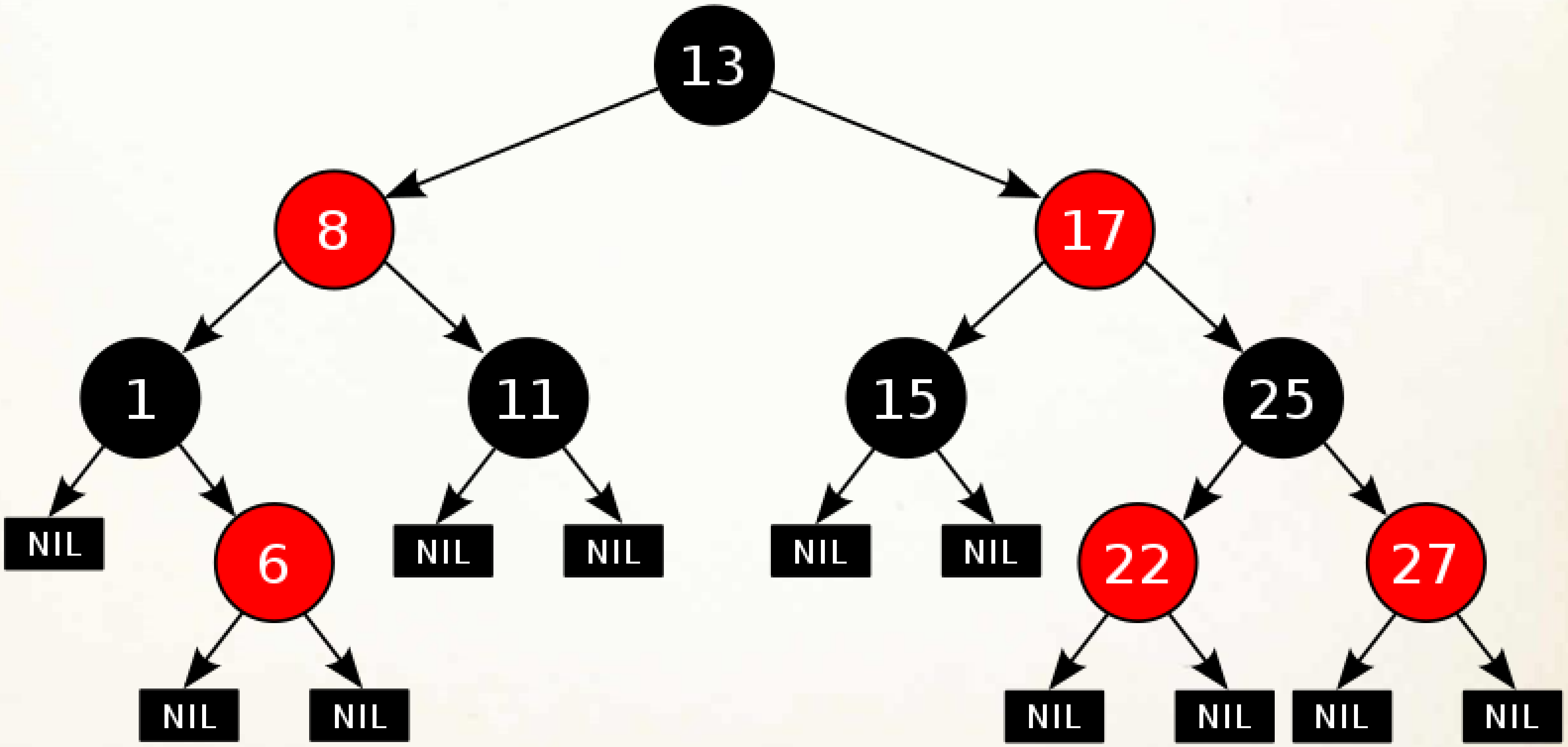
1. *Kiekviena viršūnė yra raudona arba juoda.*
2. *Medžio šaknis visada yra juoda (jei šaknis nėra juoda, ją reikia padaryti juoda).*
3. *Įterpiamos viršūnės yra raudonos.*
4. *Kiekvienas takas nuo viršūnės iki jos lapų turi vienodai juodų viršūnių.*
5. *Medžio lapai yra juodi (kartais žymimi NIL).*
6. *Joks takas negali turėti 2 iš eilės einančių raudonų viršūnių.*

Raudono–juodo medžio pavyzdžiai (1)





Raudono–juodo medžio pavyzdžiai (2)

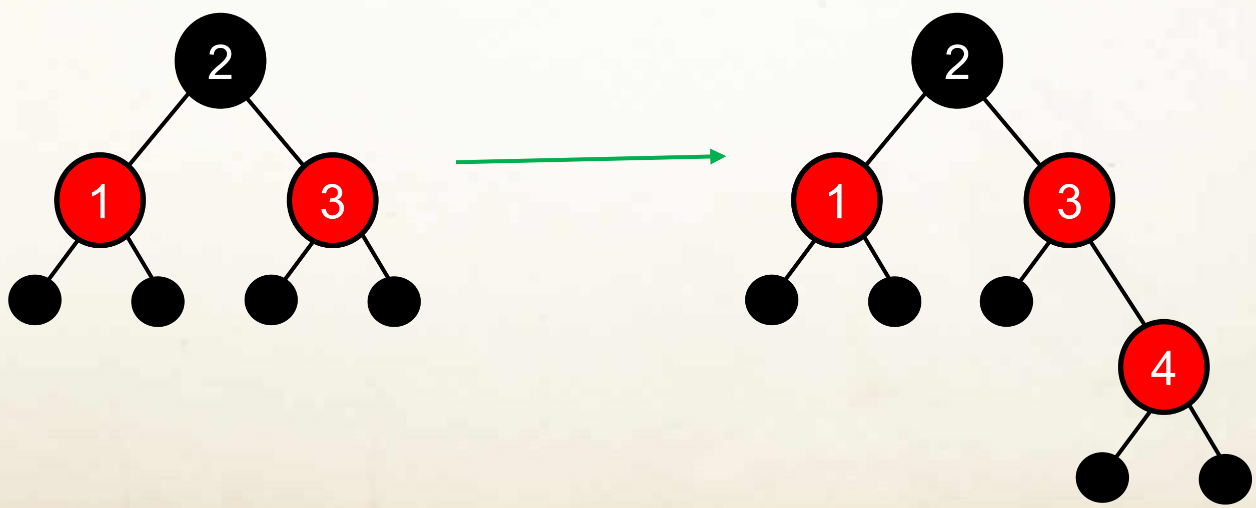


Operacijos su raudonais–juodais medžiais

- Elemento įterpimas
- Elemento šalinimas
- Medžio koregavimas:
  - Viršūnių spalvų keitimas.
  - Pomedžio sukimas į dešinę pusę.
  - Pomedžio sukimas į kairę pusę.

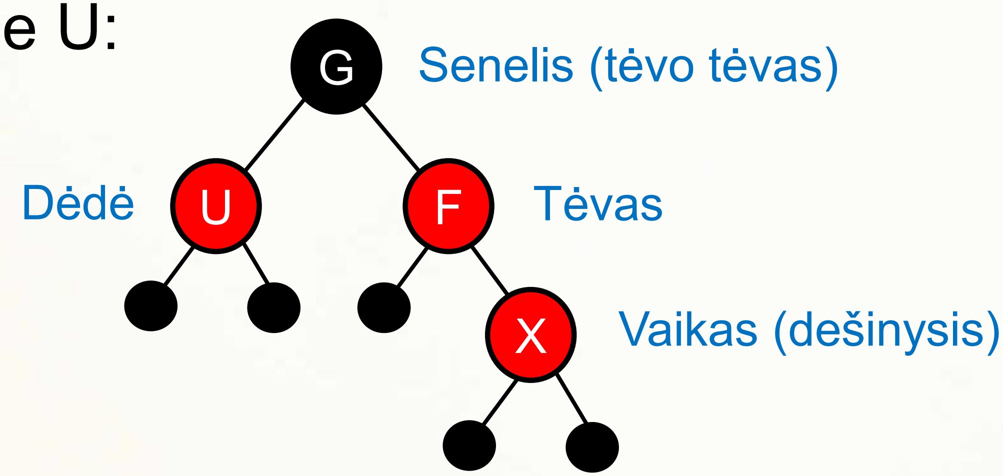
Elemento (viršūnės) įterpimas

- Įterpiamai viršūnei priskiriamas raudonos spalvos atributas.
- Jei po viršūnės įterpimo medis nebetenkina raudono–juodo medžio apibrėžimo, reikalinga medžio korekcija, pavyzdžiui:



Elemento (viršūnės) įterpimas: 3 atvejai

Pažymėkime įterpiamo elemento X dėdę (*angl.* uncle) raide U:



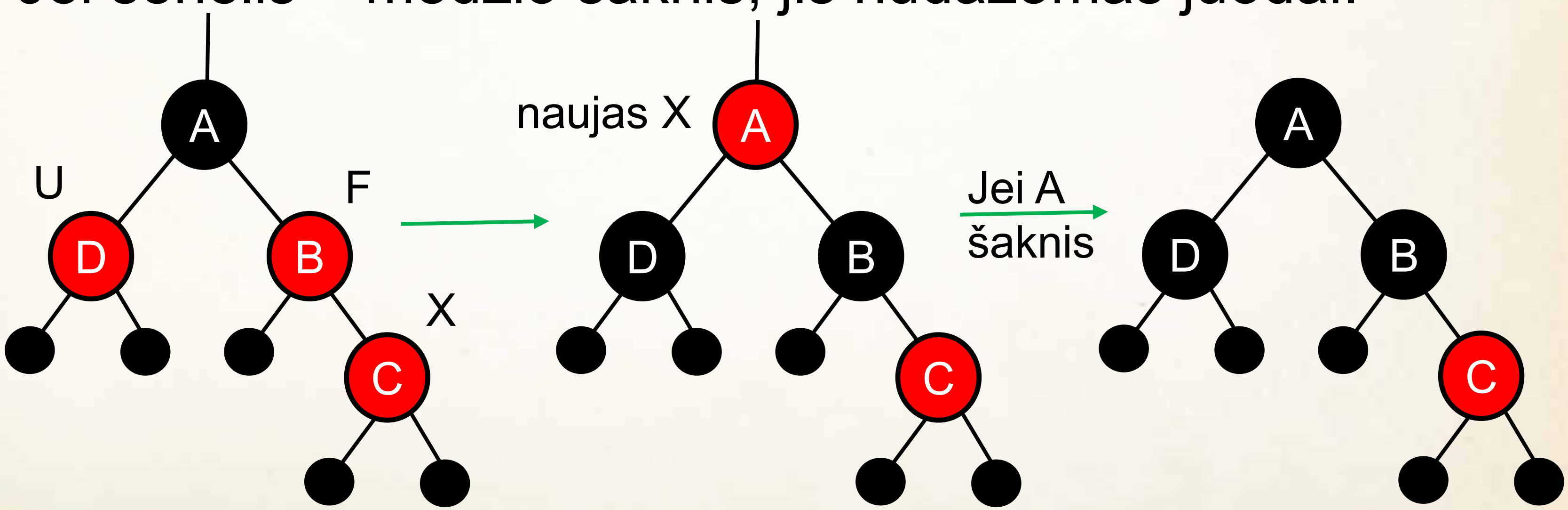
Galimos 3 situacijos:

1) F – raudonas ir U – raudonas
2) F – raudonas, U – juodas ir X – dešinysis vaikas
3) F – raudonas, U – juodas ir X – kairysis vaikas

1-oji situacija

F – raudonas ir U – raudonas:

- X tėvas ir U nudažomi juodai,
- X senelis nudažomas raudonai,
- X senelis tampa X,
- Jei senelis – medžio šaknis, jis nudažomas juodai.

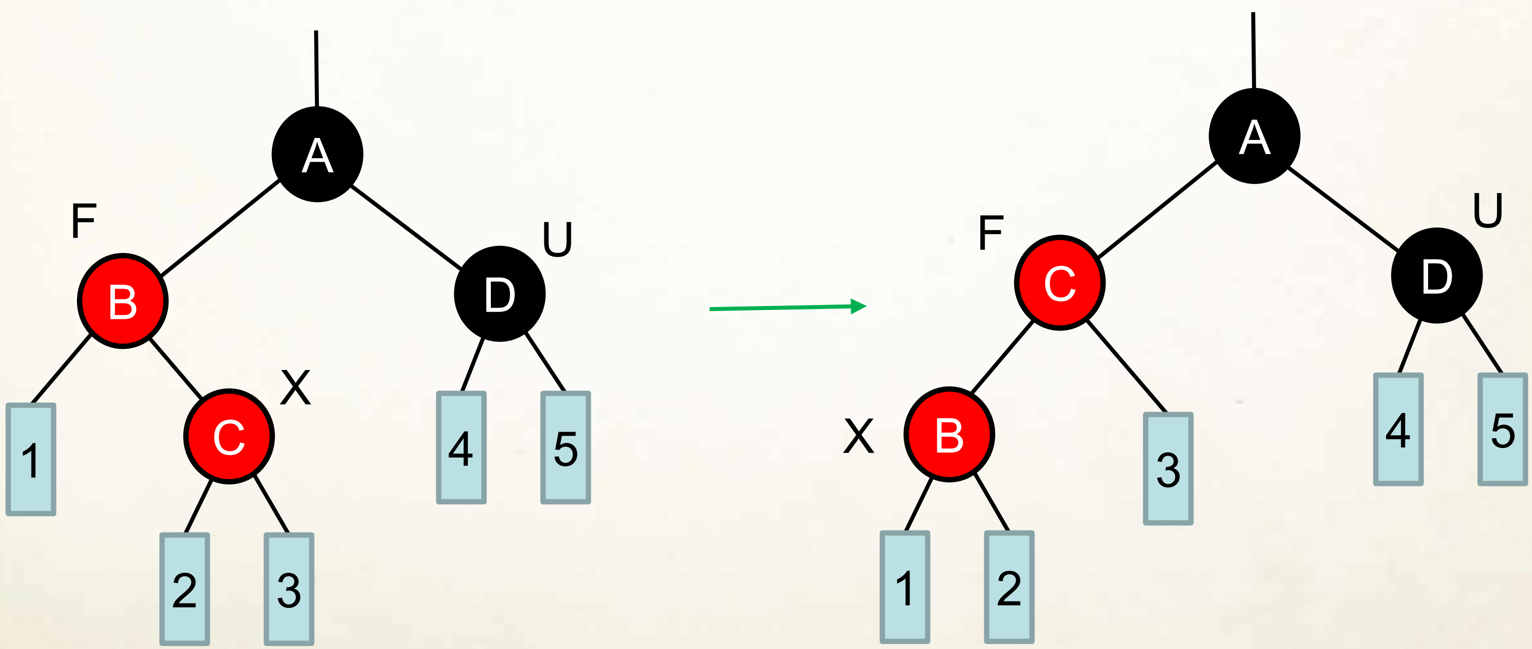


Pastaba: visi pateikti lapai gali būti ir pomedžiai.

2-oji situacija

F – raudonas, U – juodas ir X – dešinysis vaikas:

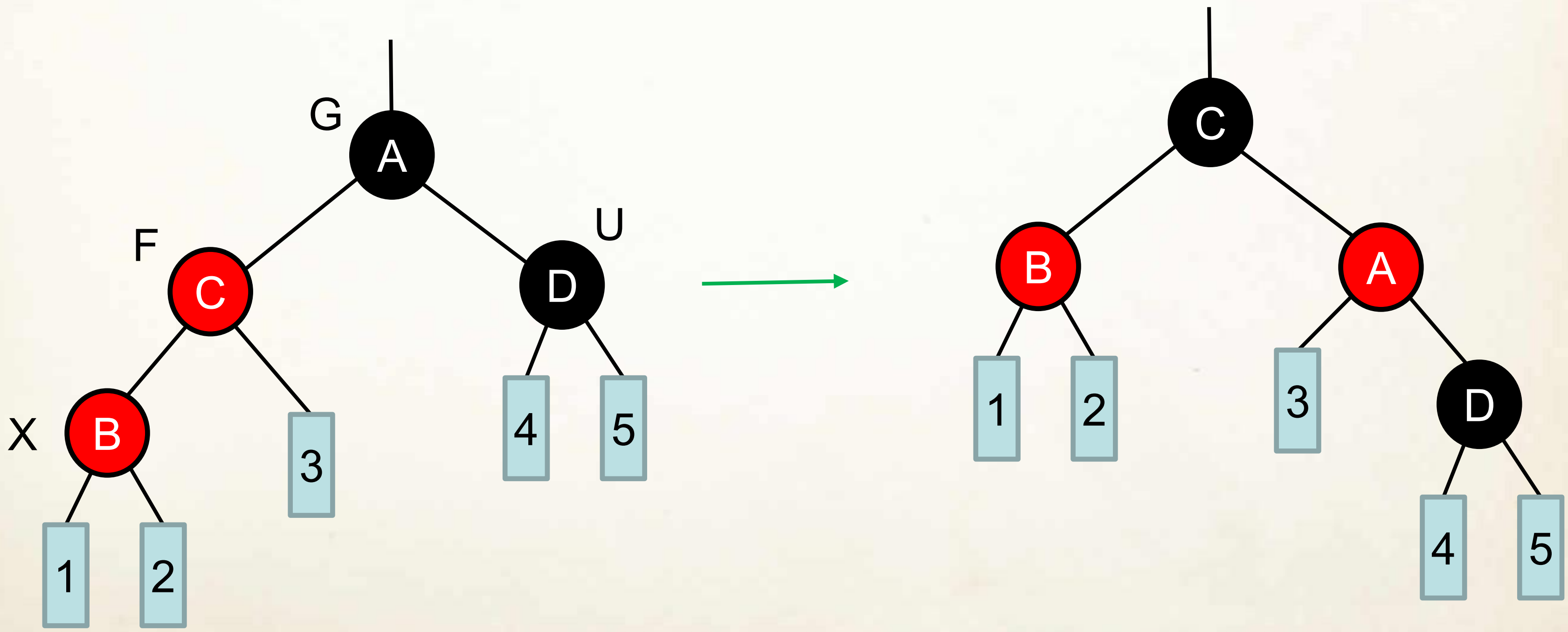
- X tėvas tampa X,
- Atliekamas sukimas į kairę apie X viršūnę (po šio sukimo visada seka 3 situacija).



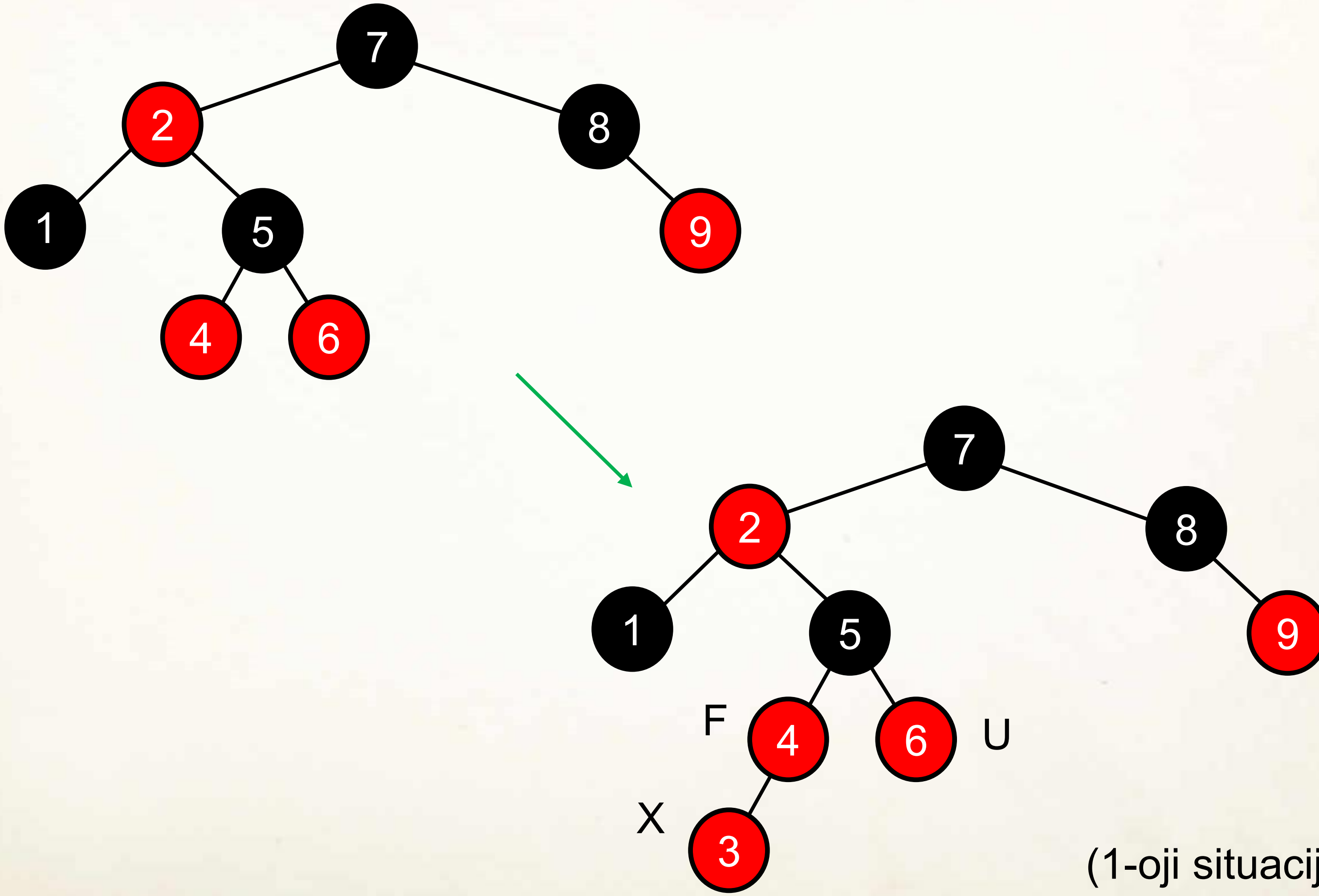
3-oji situacija

F – raudonas, U – juodas ir X – kairysis vaikas:

- X tėvas perdažomas juodai,
- X senelis perdažomas raudonai,
- Atliekamas sukimas į dešinę apie X tėvą.

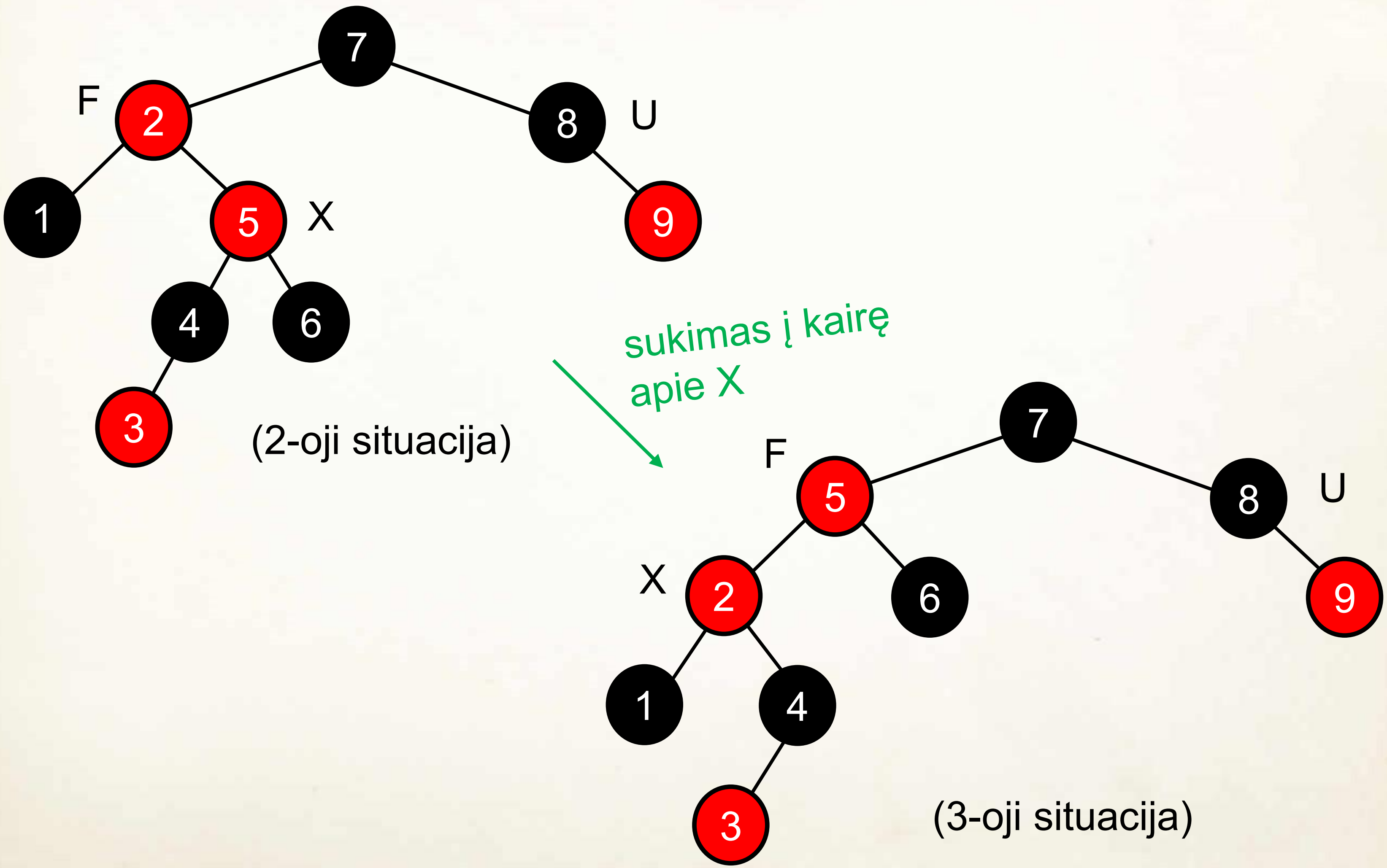


Elemento įterpimo pavyzdys (1)

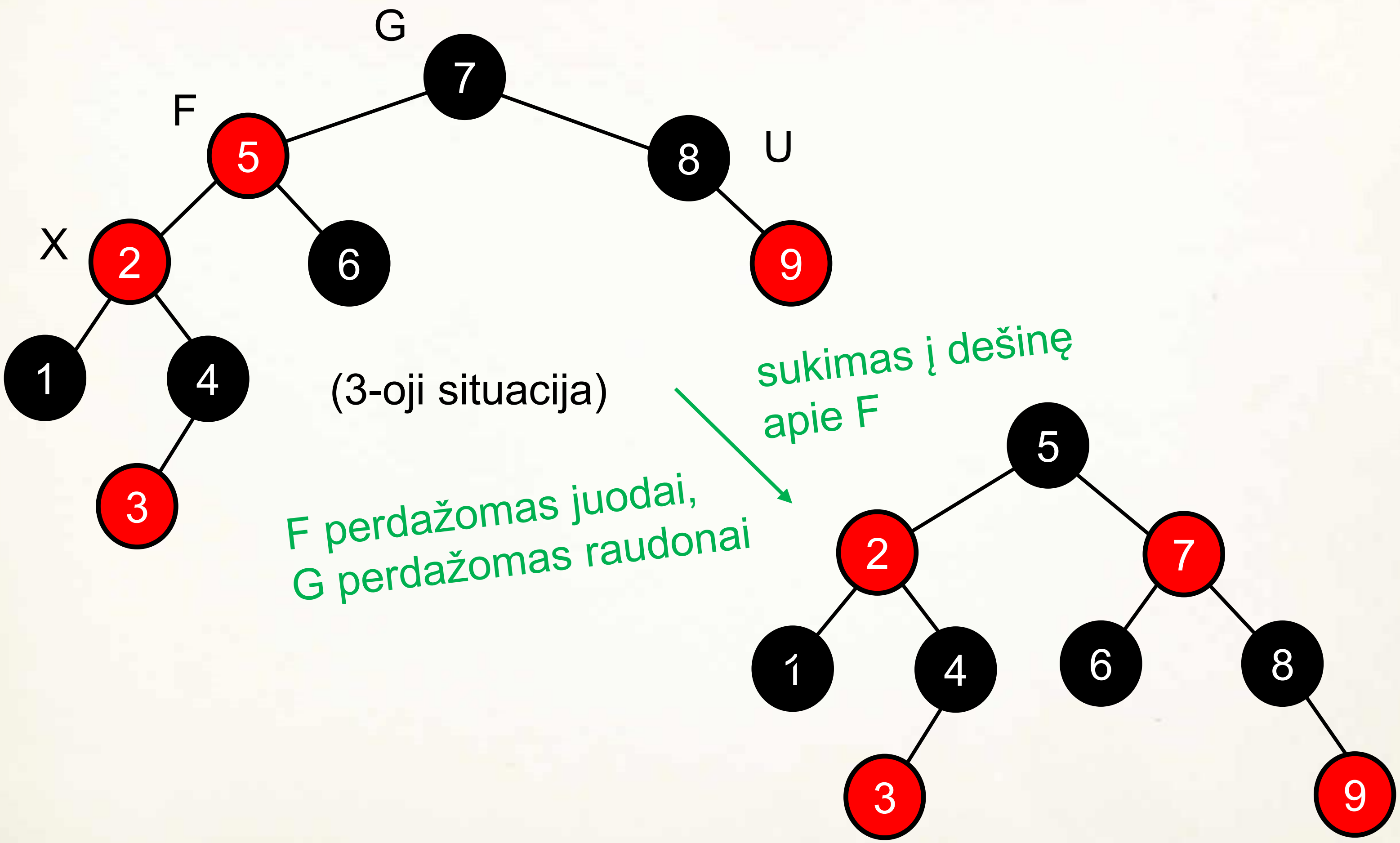


(1-oji situacija)

Elemento įterpimo pavyzdys (2)

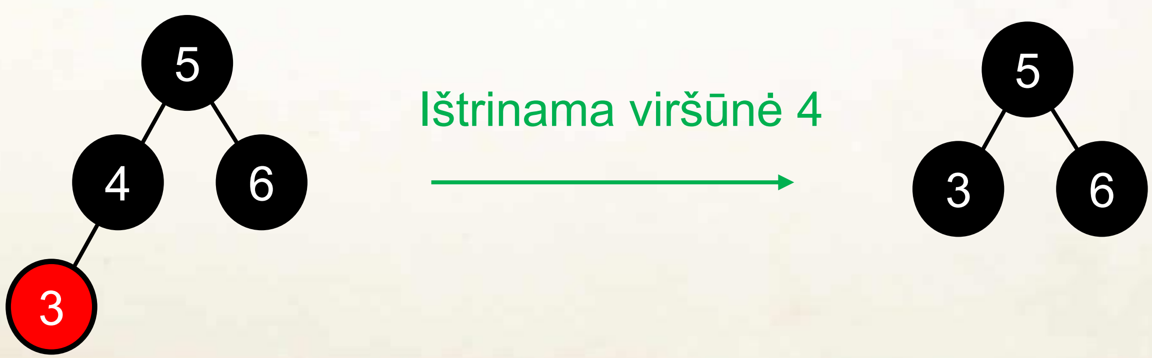


Elemento įterpimo pavyzdys (3)



Elemento (viršūnės) šalinimas

- Viršūnė pašalinama kaip ir įprastame dvejetainiame paieškos medyje (DPM), tačiau jei medis tampa ne raudonai–juodas, reikalinga korekcija:
  - Jei pašalinamas lapas arba raudona viršūnė, nieko koreguoti nereikia (pašalinimas kaip ir įprastame DPM).
  - Jei pašalinama vidinė juoda viršūnė, medis koreguojamas artimiausią raudoną viršūnę perdažant juodai, kuri pakeičia ištrintą viršūnę, pavyzdžiui:



Ačiū už dėmesį.

Klausimai?