

Algoritmai ir duomenų struktūros

3 paskaita

2026-02-24

Atnaujinta informacija

- ADS paskaitos bus transliuojamos „MS Teams“ aplinkoje antradieniais iš 101 auditorijos (MIF-Didl.), po jų bus galima gyvai atsiskaityti programavimo užduotis **316 kab. (MIF-Didl.)**.

Antradienis:

- 12:00 - 13:30 „Algoritmų ir duomenų struktūrų“ teorijos paskaita 101 (MIF-Didl.) + transliacija
- 14:00 - 15:30 „Algoritmų ir duomenų struktūrų“ pratybų paskaita 101 (MIF-Didl.) + transliacija
- 16:00 - 17:30 „Algoritmų ir duomenų struktūrų“ pratybos **316 (MIF-Didl.)** (tiems studentams, kurie gyvai nori atsiskaityti programavimo užduotis)

Penktadienis:

- konsultacijos ir užduočių atsiskaitymai nuotoliu (bet susisiekti galima ir kitą dieną sutarus laiką).

3 paskaitos tikslas

- *Papildomas programavimo uždavinys v/Slems!*
- Euklido algoritmo įrodymas.
- Algoritmų sudėtingumo klasės.
- Tiesinio sąrašo realizacija, modifikacijos, C++ ir *Python* bibliotekos.
- Tiesinių duomenų struktūrų privalumai ir trūkumai.
- Abstraktus duomenų tipas:
 - Dinaminė aibė,
 - Medžiai,
 - Dvejainiai medžiai,
 - Dvejainis paieškos medis,
 - Duomenų struktūra heap,
 - Prioritetinė eilutė, galimos operacijos ir pavyzdžiai
 - Dėstymo lentelė.

Programavimo uždavinys (1)

ACM International Collegiate Programming Contest 2013/14
XVI NEERC Western Subregional Contest, October 23, 2013

Problem C. Card Game

Input file: `cards.in`
Output file: `cards.out`
Time limit: 2 seconds
Memory limit: 1024 megabytes

Surely you know that in most card games (such as preference, for example) the probability of winning depends not only on the skills of the player, but also on the way the cards are dealt. The combination of the strength of the hand of a player and his skills is called the player's *standing*.

There's a card game played by N players in several rounds where the cards are dealt afresh in each round. The standing of the i^{th} player ($1 \leq i \leq N$) is a random real value drawn uniformly from the range $[a_i, b_i]$. The player with the strongest standing (as determined by the random value) wins the round. If the maximal standing in a round is shared by several players, the round ends in a draw.

Determine the probability of winning a round for each of the given players.

Programavimo uždavinys (2)

Input

The first line of input contains the integer N ($2 \leq N \leq 300$). Each of the following N lines contains two integers a_i and b_i ($0 \leq a_i < b_i \leq 1,000,000,000$) defining the range from which the standing of the player i is drawn.

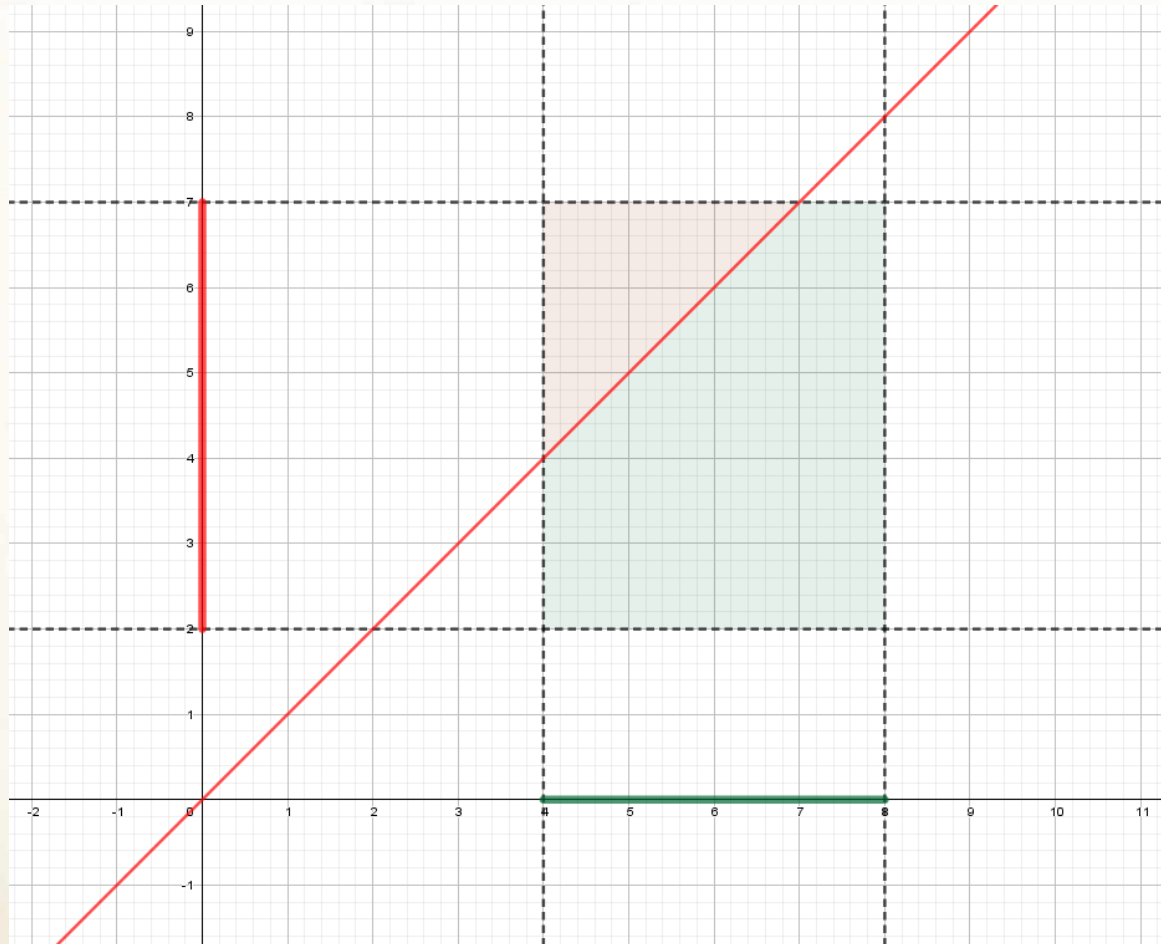
Output

Output N lines, where the i^{th} line contains one real value: the probability that the i^{th} player will win the round. The values may not differ from the correct ones by more than 10^{-9} .

Examples

cards.in	cards.out
2	0.500000000000
2 3	0.500000000000
1 4	
2	0.250000000000
0 1	0.750000000000
0 2	
5	0.069722222222
0 5	0.088472222222
1 5	0.121111111111
2 5	0.192638888889
3 5	0.528055555556
4 5	

Pavyzdys $N=2$ atveju



Input:

2

4 8

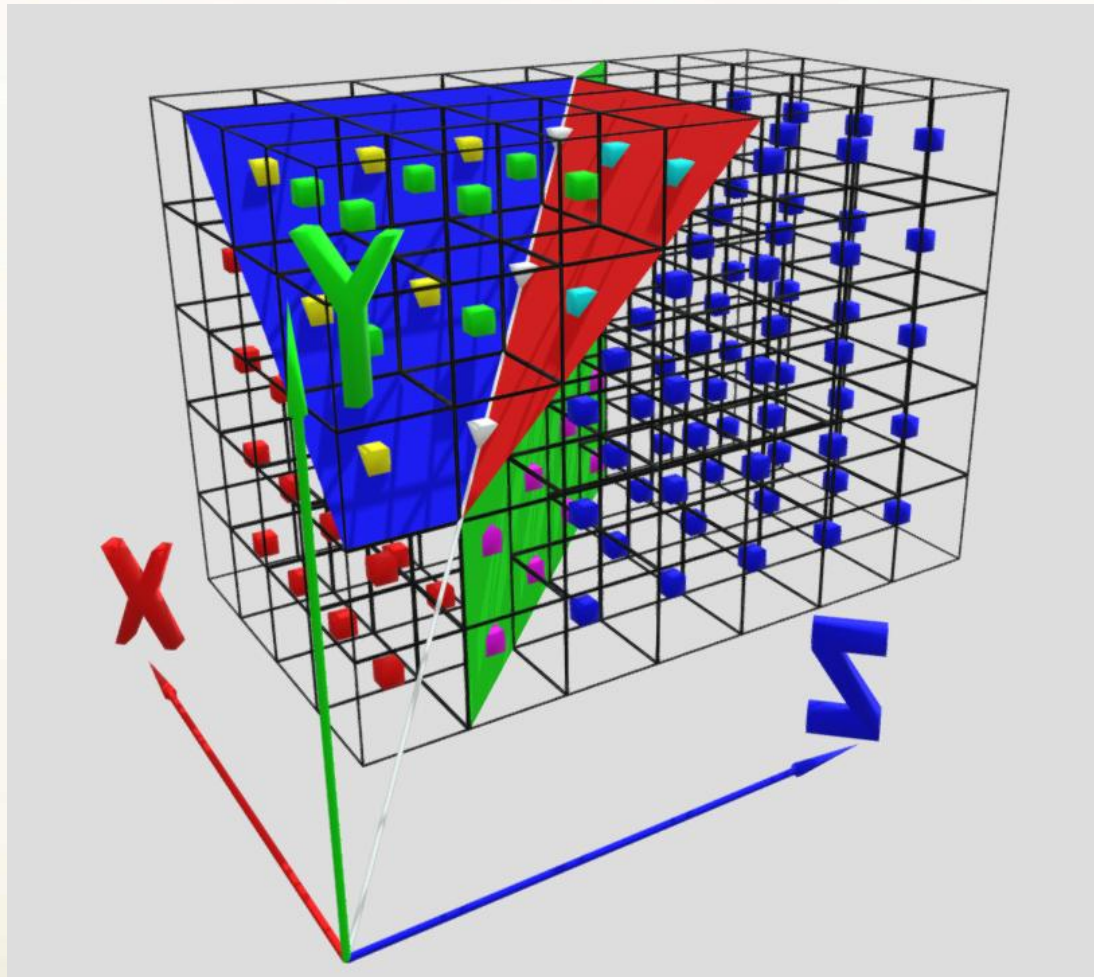
2 7

Output:

0.7750000000

0.2250000000

Pavyzdys $N=3$ atveju



Input:

3

4 8

2 7

3 10

Output:

0.3642857143

0.0964285714

0.5392857143

Pasitikrinimui (Monte Karlo metodos)

```
import random
```

```
def c(input, experiments):
```

```
    n = len(input)
```

```
    hits = [0 for i in range(n)]
```

```
    for i in range(experiments):
```

```
        best = 0
```

```
        idx = 0
```

```
        for j in range(n):
```

```
            shoot = random.uniform(input[j][0], input[j][1])
```

```
            if shoot > best:
```

```
                best = shoot
```

```
                idx = j
```

```
        hits[idx] += 1
```

```
    for i in range(n):
```

```
        hits[i] /= experiments
```

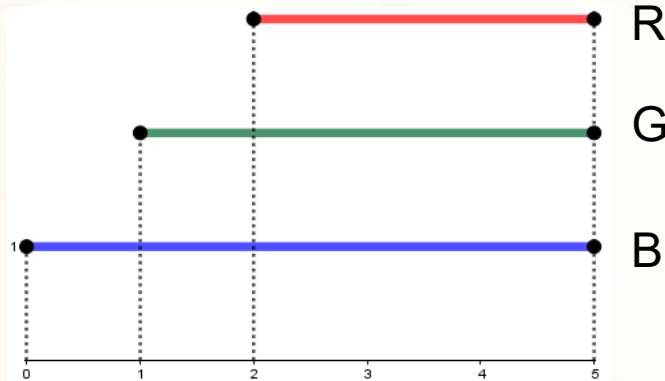
```
    return(print(hits))
```

```
c([[4,8],[2,7],[3,10]],10**7)
```

```
[0.3641746, 0.0963742, 0.5394512]
```

```
[Finished in 7.0s]
```

Integravimo pritaikymas



Input:

3

2 5

1 5

0 5

Output:

0.4750000000

0.3000000000

0.2250000000

$$R : \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^3 \int_0^{x+1} \int_0^{x+2} 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{60} \int_0^3 (x+1)(x+2) \, dx = \frac{19}{40}$$

$$G : \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^3 \int_0^x \int_0^{x+2} 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{60} \int_0^3 x(x+2) \, dx = \frac{3}{10}$$

$$B : \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^3 \int_0^x \int_0^{x+1} 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{60} \int_0^3 x(x+1) \, dx = \frac{9}{40}$$

Euklido algoritmo įrodymas (1)

- Teorema. Realizavus algoritmą **Euklidas**(a, b), gaunamas rezultatas yra skaičių a ir b didžiausias bendras daliklis.

```
Euklidas(a, b)
  while b > 0
    c ← b
    b ← a % b
    a ← c
  return(a)
```

$$\begin{aligned}a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\dots \\ r_{n-3} &= r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + 0\end{aligned}$$

tada $r_{n-1} = \text{DBD}(a, b)$.

Euklido algoritmo įrodymas (2)

• Įrodymas.

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

...

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 0$$

Pvz.: 9 yra dalus iš 3.

1. Kadangi seka $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ yra mažėjanti ir jos nariai priklauso neneigiamų sveikųjų skaičių aibei, todėl $r_n = 0$.

2. $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 0$ iš čia seka, kad r_{n-2} yra dalus iš r_{n-1} ; $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ iš čia seka, kad r_{n-3} yra dalus iš r_{n-1} ; kylant aukštyr įrodyme, kad a yra dalus iš r_{n-1} ir b yra dalus iš r_{n-1} , t. y. r_{n-1} yra skaičių a ir b bendras daliklis.

3. Įrodysime, kad jis r_{n-1} yra didžiausias bendras skaičių a ir b daliklis. Tarkime priešingai, kad egzistuoja toks skaičius $R = \text{DBD}(a, b) > r_{n-1}$. $a = bq_1 + r_1$ iš čia seka, kad r_1 yra dalus iš R , $b = r_1q_2 + r_2$ iš čia seka, kad r_2 yra dalus iš R , Leidžiantis į apačią įrodome, kad r_{n-1} yra dalus iš R , bet tai yra priešara teiginiui $R > r_{n-1}$.

Išvada: $r_{n-1} = R = \text{DBD}(a, b)$.

Algoritmų sudėtingumo klasės

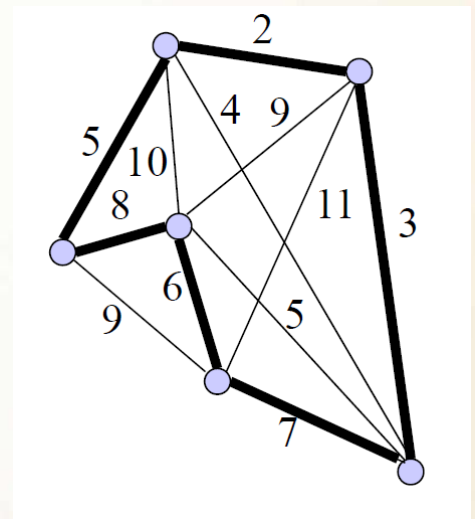
- P (polynomial time complexity)
- NP (non-polynomial time complexity)
- NP-Hard
- NP-Complete

Iki šiol susidūrėme

- Su algoritmais įvairioms užduotims spręsti.
 - Vykdymo laikai: $O(n^2)$, $O(n)$, $O(1)$ ir t. t.
 - T. y., max polinominiai $O(n^k)$, kurie priklauso nuo duomenų įvesties dydžio n .
- Ar galime išspręsti visas programavimo užduotis per polinominį laiką $O(n^k)$?
 - Deja negalime...

Sudėtingos užduoties pavyzdys

- Keliaujančio pirklio uždavinys.
 - Įvestis: svorinis grafas.
 - Išvestis: trumpiausias takas, kuriuo apeinamos grafo viršūnės po vieną kartą ir grįžtama į pradinę viršūnę.
- Geriausias žinomas algoritmas: $O(n^2)$ sudėtingumo.



Algoritmų sudėtingumo klasė P

- Apima užduotis, kurios išsprendžiamos $O(n^k)$ sudėtingumo algoritmu.
- Pavyzdžiai:
 - Dvejetainė paieška $O(\log n)$;
 - Euklido algoritmas $O(\log \min(a, b))$;
 - Rikiavimo algoritmai $O(n \log n)$;
 - Matricų daugyba $O(n^3)$;
 - Dijkstros algoritmas $O(|E| + |V| \log |V|)$.

Algoritmų sudėtingumo klasė NP

- Apima užduotis, kurios gali būti neišsprendžiamos $O(n^k)$ sudėtingumo algoritmu, tačiau gautas atsakymas patikrinamas per polinominį $O(n^k)$ laiką.
- Pavyzdžiai:
 - **Hamiltono uždavinys** (reikia nustatyti, ar grafe egzistuoja takas, kuriuo aplankoma kiekviena viršūnė po vieną kartą);
 - **Grafo viršūnių spalvinimo uždavinys** (naudojant k skirtingų spalvų, reikia nustatyti, ar galima priskirti grafo viršūnėms spalvas taip, kad gretimos viršūnės būtų nuspaltintos skirtinga spalva).

Algoritmų sudėtingumo klasė NP-Hard

- Apima užduotis, kurios neišsprendžiamos $O(n^k)$ sudėtingumo algoritmu ir gautas atsakymas nėra patikrinamas per polinominį $O(n^k)$ laiką.
- Pavyzdžiai:
 - **Keliaujančio pirklio uždavinys** (turint miestų rinkinį ir atstumus tarp jų, reikia rasti trumpiausią maršrutą, kuriuo aplankomas kiekvienas miestas lygiai po kartą ir grįžtama į pradinį miestą);
 - **3D pakavimo uždavinys** (reikia supakuoti n daiktų į kuo mažesnę dėžių skaičių taip, kad visi daiktai tilptų atsižvelgiant į jų dydžius).

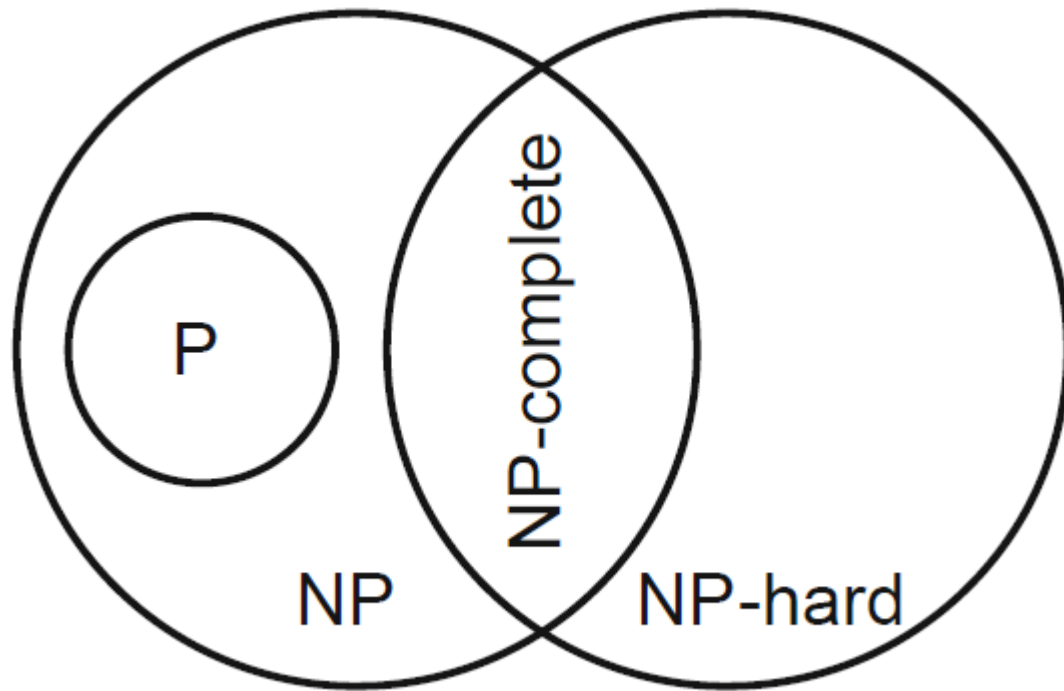


Algoritmų sudėtingumo klasė

NP-Complete

- Apima užduotis, kurios neišsprendžiamos $O(n^k)$ sudėtingumo algoritmu, tačiau gautas atsakymas patikrinamas per polinominį $O(n^k)$ laiką.
- Pavyzdžiai:
 - **Kuprinės (vagies) uždavinys** (duotoms prekėms su tam tikra verte ir svoriu bei ribotu svoriu kuprinėje, reikia nustatyti, ar egzistuoja prekių rinkinys, kurio bendra vertė viršija tam tikrą vertę, neviršijant svorio.);
 - **SAT (Boolean Satisfiability Problem) uždavinys** (ar egzistuoja tokios Būlio kintamųjų reikšmės, su kuriomis visos duotos Būlio formulės teisingos).

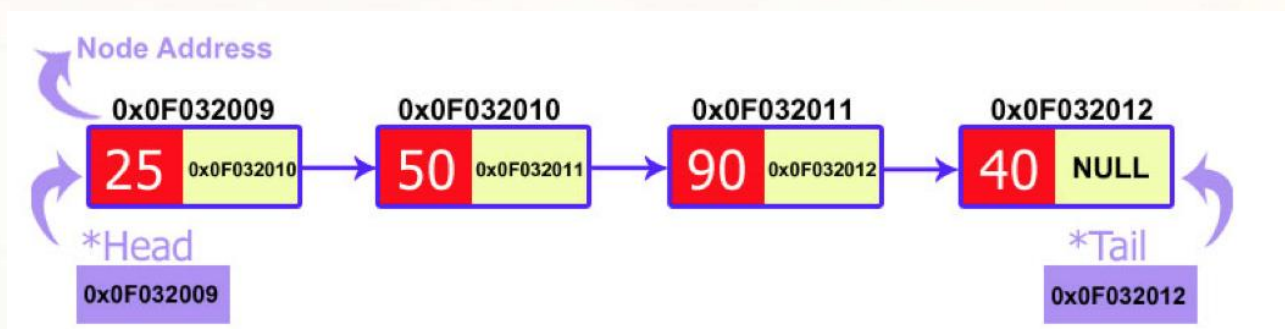
Algoritmų sudėtingumo klasės



P = NP problema

- Ar kiekvienas uždavinys kurio sprendinį galima patikrinti per polinominį laiką (NP klasėje), taip pat gali būti išspręstas per polinominį laiką (P klasėje)?
- Jei $P = NP$, tai reiškia, kad visi NP uždaviniai taip pat priklauso P klasei, ir mes galėtume sukurti greitus algoritmus visiems NP uždaviniams spręsti.
- Jei $P \neq NP$, tai reiškia, kad yra uždavinių, kurių sprendinius galime tik patikrinti greitai, tačiau negalime šių uždavinių išspręsti greitai.
- **P = NP problema** yra vienas iš **Tūkstantmečio premijos uždavinių**, už kurį teikiama **1 milijono dolerių premija** tiems, kurie sugebės įrodyti arba paneigti, jog **P = NP**.

Tiesinio sąrašo realizacija (1)



Sąrašo elemento struktūros aprašymas

//C++:

```
#include<iostream>
using namespace std;
struct node
{
    int data;
    node *next;
};
```

#Python:

```
class Node:
    def __init__(self, data):
        self.data = data
        self.next = None
```

Tiesinio sąrašo realizacija (2)

Sąrašo funkcijų aprašymas

//C++:

```
class list
{
    private:
        node *head, *tail;
    public:
        list()
        {
            head=NULL;
            tail=NULL;
        }
        //void append(int value)
        //void push(int value)
        //void insertAfter(int pos, int value)
        //void delete_first()
        //void delete_last()
        //void deleteNode (int pos)
        //void display()
};
```

#Python:

```
class LinkedList:
    def __init__(self):
        self.head = None
    #def append(self, new_data):
    #def push(self, new_data):
    #def insertAfter(self, prev_node, new_data):
    #def deleteNode(self, key):
    #def display(self):
```

Tiesinio sarašo realizacija (3)

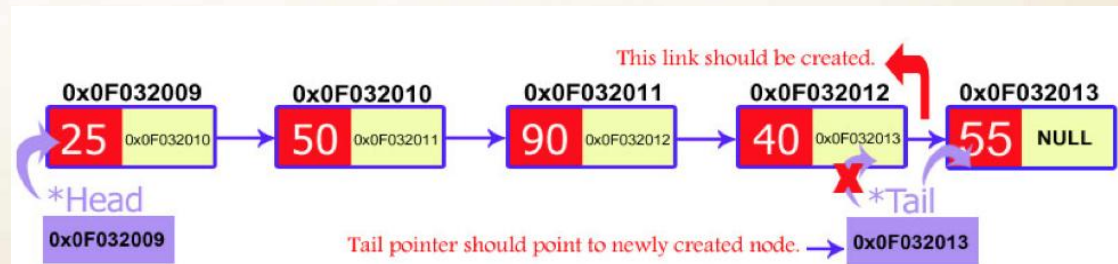
Elemento pridėjimas sarašo gale

//C++:

```
void append(int value)
{
    node *temp=new node;
    temp->data=value;
    temp->next=NULL;
    if(head==NULL)
    {
        head=temp;
        tail=temp;
        temp=NULL;
    }
    else
    {
        tail->next=temp;
        tail=temp;
    }
}
```

#Python:

```
def append(self, new_data):
    new_node = Node(new_data)
    if self.head is None:
        self.head = new_node
        return
    last = self.head
    while (last.next):
        last = last.next
    last.next = new_node
```



Tiesinio sąrašo realizacija (4)

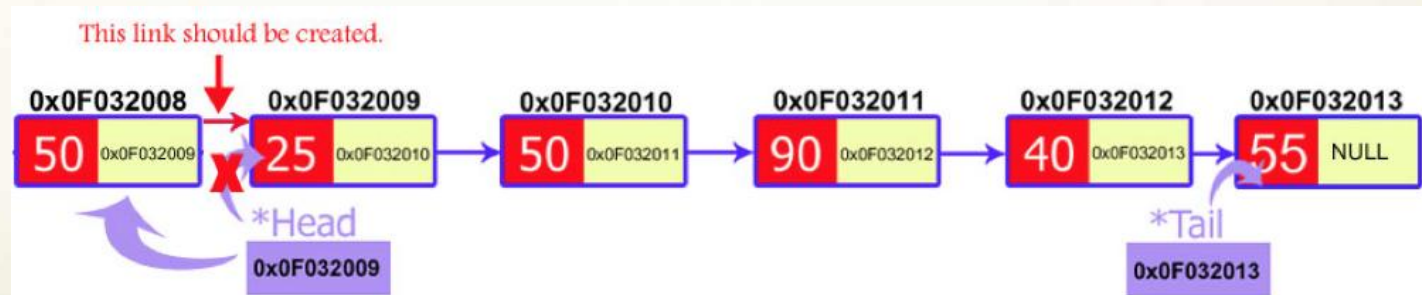
Elemento pridėjimas sąrašo priekyje

//C++:

```
void push(int value)
{
    node *temp=new node;
    temp->data=value;
    temp->next=head;
    head=temp;
}
```

#Python:

```
def push(self, new_data):
    new_node = Node(new_data)
    new_node.next = self.head
    self.head = new_node
```



Tiesinio sąrašo realizacija (5)

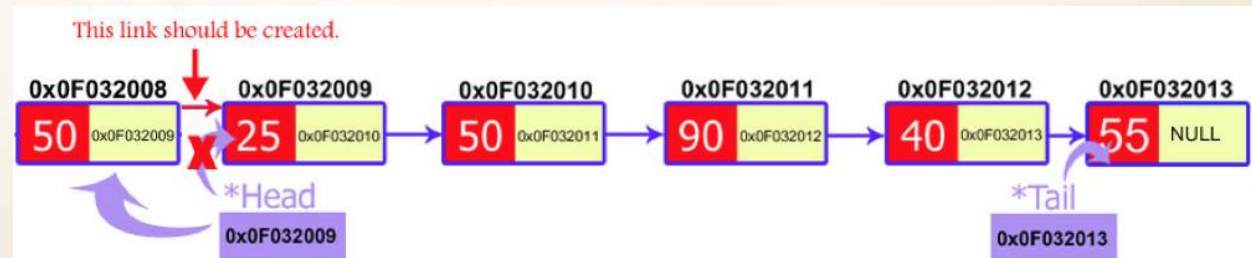
Elemento pridėjimas sąrašo viduryje

//C++:

```
void insertAfter(int pos, int value)
{
    node *pre=new node;
    node *cur=new node;
    node *temp=new node;
    cur=head;
    for(int i=1;i<=pos;i++)
    {
        pre=cur;
        cur=cur->next;
    }
    temp->data=value;
    pre->next=temp;
    temp->next=cur;
}
```

#Python:

```
def insertAfter(self, prev_node, new_data):
    if prev_node is None:
        print ("The given previous node must in LinkedList.")
        return
    new_node = Node(new_data)
    new_node.next = prev_node.next
    prev_node.next = new_node
```



Tiesinio sąrašo realizacija (6)

Elemento šalinimas sąrašo viduryje

//C++:

```
void delete_position(int pos)
{
    node *current=new node;
    node *previous=new node;
    current=head;
    for(int i=1;i<pos;i++)
    {
        previous=current;
        current=current->next;
    }
    previous->next=current->next;
}
```

#Python:

```
def deleteNode(self, position):
```

```
    if self.head == None:
```

```
        return
```

```
    temp = self.head
```

```
    if position == 0:
```

```
        self.head = temp.next
```

```
        temp = None
```

```
        return
```

```
    for i in range(position - 1 ):
```

```
        temp = temp.next
```

```
    if temp is None:
```

```
        break
```

```
    if temp is None:
```

```
        return
```

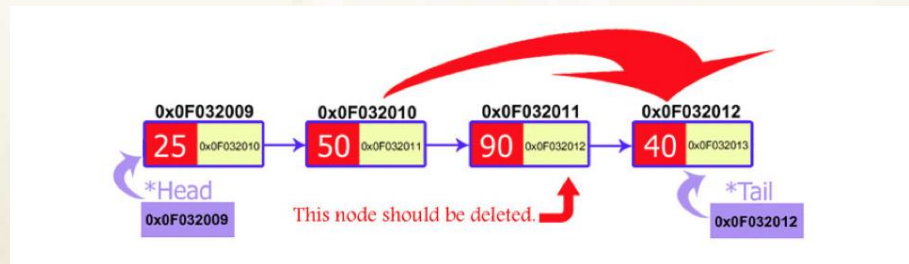
```
    if temp.next is None:
```

```
        return
```

```
    next = temp.next.next
```

```
    temp.next = None
```

```
    temp.next = next
```



Tiesinio sąrašo realizacija (7)

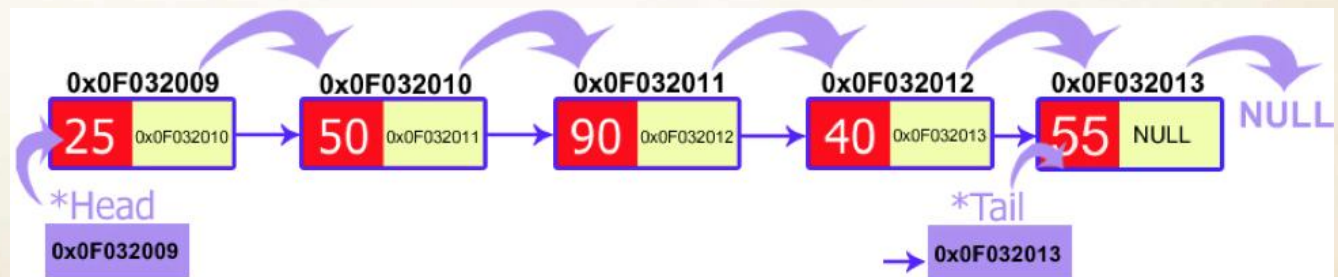
Sąrašo elementų spausdinimas

//C++:

```
void display()
{
    node *temp=new node;
    temp=head;
    while(temp!=NULL)
    {
        cout<<temp->data<<"\t";
        temp=temp->next;
    }
}
```

#Python:

```
def display(self):
    temp = self.head
    while(temp):
        print (" %d" %(temp.data)),
        temp = temp.next
```



Tiesinio sąrašo realizacija (8)

Programos testavimas

//C++:

```
int main()
{
    list obj;
    obj.append(6);
    obj.push(7);
    obj.push(1);
    obj.append(4);
    obj.insertAfter(2,8);
    obj.display();
    system("pause");
    return 0;
}
```

#Python:

```
llist = LinkedList()
llist.append(6)
llist.push(7);
llist.push(1);
llist.append(4)
llist.insertAfter(llist.head.next, 8)
print ("Created linked list is:"),
llist.display()
```

Rezultatas: 1 7 8 6 4

Informacija paimta iš

C++:

https://www.codementor.io/@codementorteam/a-comprehensive-guide-to-implementation-of-singly-linked-list-using-c_plus_plus-on9lm5azr

Python:

<https://www.geeksforgeeks.org/data-structures/linked-list/>

Naudingos pamokos:

<https://www.youtube.com/watch?v=o5wJkJJpKtM>

Buvo teoriškai, dabar praktiškai...

```
// C++ stack::push/pop
#include <iostream>      // std::cout
#include <stack>          // std::stack

int main ()
{
    std::stack<int> mystack;

    for (int i=0; i<5; ++i) mystack.push(i);

    std::cout << "Popping out elements...";
    while (!mystack.empty())
    {
        std::cout << ' ' << mystack.top();
        mystack.pop();
    }
    std::cout << "\n";

    return 0;
}
```

// Paimta iš: <http://www.cplusplus.com/reference/stack/stack/push/>

Buvo teoriškai, dabar praktiškai...

```
# Python
stack = [3, 4, 5]
stack.append(6)
stack.append(7)
stack
[3, 4, 5, 6, 7]
stack.pop()
# 7
stack
# [3, 4, 5, 6]
stack.pop()
# 6
stack.pop()
# 5
stack
# [3, 4]
```

Paimta iš: <https://docs.python.org/2/tutorial/datastructures.html>

C++ duomenų tipai

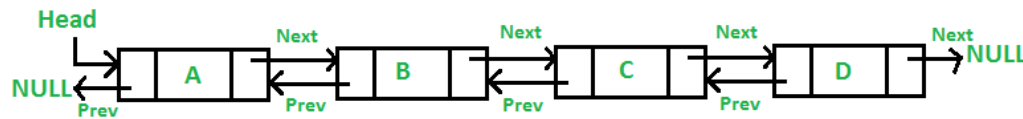
Type	Typical Bit Width	Typical Range
char	1byte	-127 to 127 or 0 to 255
unsigned char	1byte	0 to 255
signed char	1byte	-127 to 127
int	4bytes	-2147483648 to 2147483647
unsigned int	4bytes	0 to 4294967295
signed int	4bytes	-2147483648 to 2147483647
short int	2bytes	-32768 to 32767
unsigned short int	Range	0 to 65,535
signed short int	Range	-32768 to 32767
long int	4bytes	-2,147,483,648 to 2,147,483,647
signed long int	4bytes	same as long int
unsigned long int	4bytes	0 to 4,294,967,295
float	4bytes	+/- 3.4e +/- 38 (~7 digits)
double	8bytes	+/- 1.7e +/- 308 (~15 digits)
long double	8bytes	+/- 1.7e +/- 308 (~15 digits)
wchar_t	2 or 4 bytes	1 wide character

Python duomenų tipai

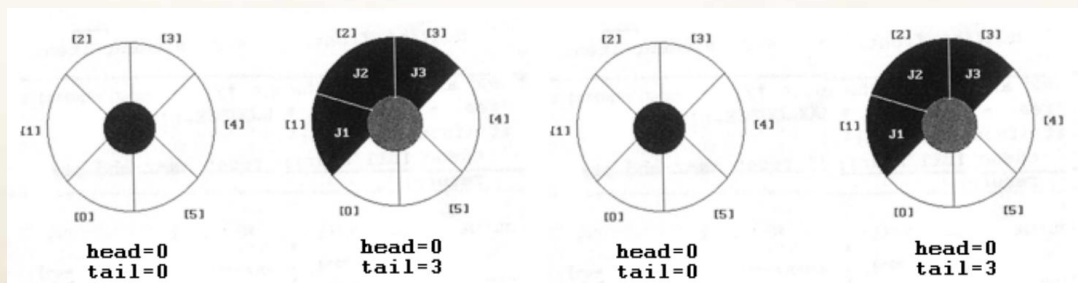
Class	Description
bool	Boolean value
int	integer (arbitrary magnitude)
float	floating-point number
list	mutable sequence of objects
tuple	immutable sequence of objects
str	character string
set	unordered set of distinct objects
frozenset	immutable form of set class
dict	associative mapping (aka dictionary)

Tiesinio sąrašo modifikacijos

- Dėklas (arba stekas, angl. *stack*)
- Eilutė (arba eilė, angl. *queue*)
- Abipusis dėklas (arba dekas, angl. *dequeue*)
- Dvipusis tiesinis sąrašas (doubly linked list)



- Ciklinis sąrašas (vienpusis arba dvipusis) – sąrašas, kuriame po paskutiniojo elemento seka pirmasis.
- Eilutė „suklijuotame“ masyve ir t. t.



Tiesinių duomenų struktūrų privalumai ir trūkumai

Jei realizuota panaudojant masyvą.

Privalumai:

- paprasta struktūra;
- paprasta operacijų realizacija;
- laikomi tik patys duomenys (nereikia naudoti rodyklių).

Trūkumai:

- masyvo (tiesinio sąrašo ar jo modifikacijos) dydis turi būti nusakytas iš anksto, todėl gali būti arba naudojama tik nedidelė jo dalis, arba pritrūkti vietos.
- elemento įterpimo/naikinimo operacijos tiesinių duomenų struktūrų atveju efektyvios.

Jei realizuota panaudojant rodykles.

Privalumai:

- atmintis naudojama tik egzistuojantiems steko elementams, t.y. nerezervuojama
- vieta potencialiems elementams.

Trūkumai:

- operacijų realizacija sudėtingesnė (reikia mokėti dirbti su rodyklėmis);
- reikia daugiau atminties, nes saugomi ne tik duomenys, bet ir nuorodos (rodyklės).

ADT matricos operacijos

- *Inicializuoti matricą (M)* – kompiuterio atmintyje išskiria matricai M vietą,
- *Surasti elementą (i, j, M)* – surasti elementą matricos M i -toje eilutėje ir j -ame stulpelyje,
- *Priskirti elementą (i, j, x, M)* – matricos M i -tos eilutės ir j -ojo stulpelio elementui priskiria reikšmę x ,
- *Priskirti ($M1, M2$)* – priskiria matricos $M1$ elementus matricos $M2$ elementams, loginė sąlyga: matricų $M1$ ir $M2$ matavimai turi sutapti,
- *Sudėtis ($M1, M2$)* – matricų $M1$ ir $M2$ atitinkamų elementų sudėtis, loginė sąlyga: matricų $M1$ ir $M2$ matavimai turi sutapti,
- *Neigimas (M)* – skaičiuoja matricos M neigiamą reikšmę,
- *Atimtis ($M1, M2$)* – iš matricos $M2$ atimama matrica $M1$, loginė sąlyga: matricų $M1$ ir $M2$ matavimai turi sutapti,
- *Daugyba iš skaliaro (s, M)* – matrica M padauginama iš skaliaro s ,
- *Daugyba ($M1, M2$)* – sudaugina matricas $M1$ ir $M2$, loginė sąlyga: matricos $M1$ stulpelių skaičius turi būti lygus matricos $M2$ eilučių skaičiui, gautoji matrica turi tiek eilučių kiek $M1$ ir tiek stulpelių kiek $M2$,
- *Transponuoti (M)* – transponuoja matricą M ,
- *Determinantas (M)* – skaičiuoja matricos M determinantą,
- *Atvirkštinė (M)* – skaičiuoja matricos M atvirkštinę matricą (jei ši egzistuoja) arba apibendrintą atvirkštinę (jei matricos determinantas lygus 0),
- *Ištrinti (M)* – palaisvina atmintį, kurią buvo užėmusi matrica M .

Aibės duomenų struktūra

Aibės duomenų struktūrai būdingos tokios operacijos:

- *initialize(S)* – inicializuoti aibę S (išskirti vietą atmintyje ir parinkti dėstymo metodą joje),
- *memberof(x, S)* – funkcija, kuri patikrina ar elementas x priklauso aibei S ,
- *insert(x, S)* – įterpti elementą x į aibę S ,
- *delete(x, S)* – pašalinti elementą x iš aibės S ,
- *join(S1, S2, S3)* – sujungti dvi aibes $S1$ ir $S2$ į vieną $S3$,
- *find(x)* - rasti aibę, kurioje yra elementas x ,
- *disjoin(x, S)* – aibę S išskaidyti į dvi aibes, iš kurių vienoje yra visi elementai, mažesni ar lygūs x , o kitoje - didesni už x (paprastai aibė S yra tiesiškai sutvarkyta),
- *min(S)* – rasti minimalų aibės S elementą.

Veiksmai su aibėmis A ir B :

- ar teisybė, kad dvi aibės A ir B yra lygios (arba ne),
- ar teisybė, kad aibė A yra aibės B poaibis (tuščia aibė yra kiekvienos aibės poaibis),
- suformuoti aibių A ir B sąjungą,
- suformuoti aibių A ir B sankirtą,
- suformuoti aibių A ir B skirtumą,
- suformuoti aibių A ir B Dekarto sandaugą.

ADT dinaminė aibė

Dinaminėje aibėje kiekvienas elementas turi savo ID (raktą), kuriems aibė yra visiškai sutvarkyta.
initialize(S) – inicializuoti aibę *S* (išskirti vietą atmintyje ir parinkti dėstymo metodą joje).

- *Search(S,k)* – paieška(*S*, *k*) – grąžina aibės *S* elementą, kurio reikšmė yra *k*, arba nulinę reikšmę jei tokio elemento nėra,
- *Insert(S,x)* – įterpti(*S*, *x*) – įterpia elementą *x* į *S*, jei operacija sėkminga grąžina reikšmę *true*, jei ne – *false*,
- *Delete(S,k)* – ištrinti(*S*, *k*) – iš aibės *S* pašalina elementą, kurio reikšmė *k*, jei operacija sėkminga grąžina reikšmę *true*, jei ne – *false*,
- *Minimum(S)* – *minimumas(S)* – grąžina dinaminės aibės *S* elementą, kurio reikšmė yra mažiausia, arba nulinę reikšmę jei aibė *S* yra tuščia,
- *Maximum(S)* – *maksimumas(S)* – grąžina dinaminės aibės *S* elementą, kurio reikšmė yra didžiausia, arba nulinę reikšmę jei aibė *S* yra tuščia,
- *Predecessor(S,k)* – *pirmtakas(S, k)* – grąžina aibės *S* elementą, kurio reikšmė didžiausia, bet mažesnė už *k* arba nulinę reikšmę, jei tokių elementų nėra,
- *Successor(S,k)* – *įpėdinis (S, k)* – grąžina aibės *S* elementą, kurio reikšmė mažiausia, bet didesnė už *k* arba nulinę reikšmę, jei tokių elementų nėra,
- *Empty(S)* – tikrina ar aibė yra tuščia, grąžina loginę reikšmę *true*, jei dinaminė aibė *S* yra tuščia, arba *false* jei *S* yra netuščia,
- *MakeEmpty(S)* – ištrina visus aibės *S* elementus, todėl *S* tampa tuščia dinamine aibe.

Medžiai

Medis (tree) – tai duomenų aibė, kuriai apibrėžtos duomenų incidentumo ir eiliškumo operacijos:

- medžio (žymime T) elementai yra dvi aibės: viršūnių aibė V ir briaunų aibė E ,
- tarp V ir E apibrėžtas incidentumo santykis: viena briauna (elementas iš E) atitinka dvi ir tik dvi viršūnes (elementų iš V porą, elementų tvarka poroje yra fiksuota),
- viena viršūnė medyje yra išskiriama ir vadinama šaknimi (šakninis medis grafų teorijoje),
- bet kurias dvi viršūnes jungia vienas ir tik vienas kelias (kelias yra briaunų seka, kurioje kiekvienos dvi gretimos briaunos turi bendrą viršūnę).

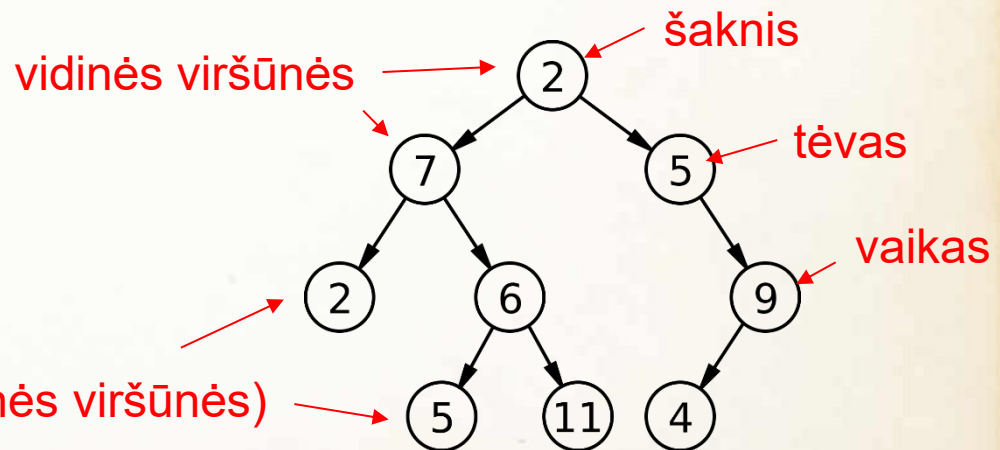
Manipuliavimo su duomenimis operacijos tokios:

- inicializuoti medį (išskirti vietą būsimai medžio struktūrai kompiuterio atmintyje)
- įterpti elementą į medį (įterpti naują viršūnę),
- išmesti elementą iš medžio (pašalinti viršūnę),
- sujungti du medžius,
- išskaidyti medį į du medžius,
- sutvarkyti medį (išdėstyti medžio viršūnes taip, kad pagal tam tikrą viršūnių perrinkimo tvarką, jų reikšmės atitiktų norimas sąlygas),
- panaikinti medį (išlaisvinti medžiui skirtą kompiuterio atmintyje vietą).

Dvejetainiai medžiai

Dvejetainis medis (*binary tree*) – tai toks medis, kurio kiekviena viršūnė turi ne daugiau kaip 2 vaikus, kurie vadinami dešiniu ir kairiu medžio pomedžiu.

Pilnas dvejetainis medis – medis, kurio visos viršūnės arba neturi vaikų, arba jų turi 2.

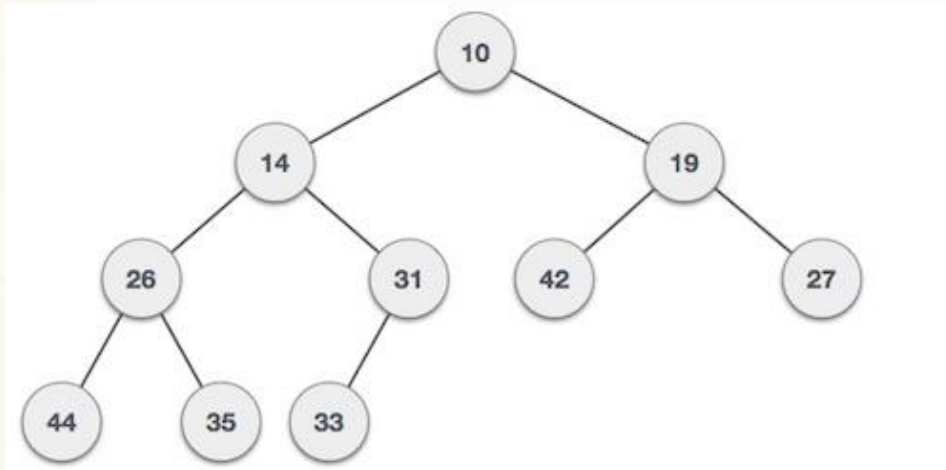


Medžio savybės:

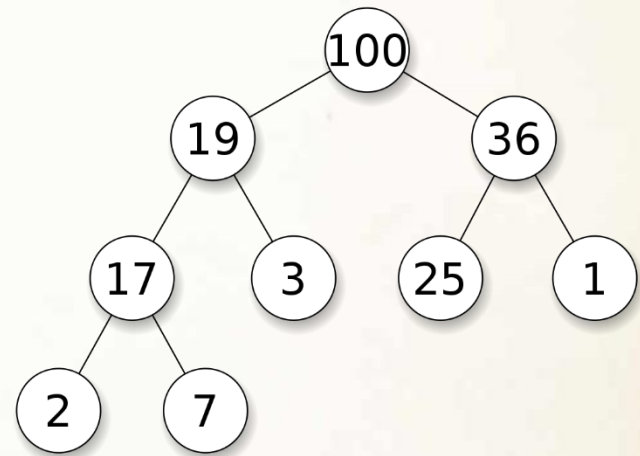
1. Medis su N viršūnių turi $N-1$ briaunų.
2. Pilnas dvejetainis medis su N vidinių viršūnių, turi $N+1$ išorinių viršūnių.
3. Pilno dvejetainio medžio aukštis n su N vidinių viršūnių gali būti įvertinamas skaičiumi $\log_2 N$:

$$2^{n-1} < N + 1 \leq 2^n.$$

Medžių pavyzdžiai



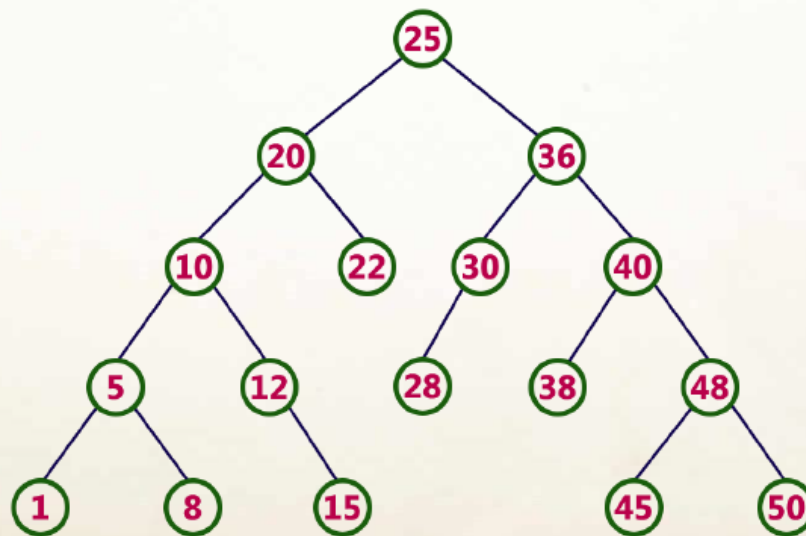
Dvejetainis medis



Pilnas dvejetainis medis

Dvejetainis paieškos medis

- Duomenų struktūra dvejetainis paieškos medis binary search tree tai toks dvejetainis medis , kurio viršūnių reikšmės išdėstytomos pagal šias taisykles:
 - Viršūnės reikšmė yra didesnė už visas reikšmes jos kairiajame pomedyje.
 - Viršūnės reikšmė yra mažesnė už visas reikšmes jos dešiniajame pomedyje.
 - Kairysis ir dešinysis pomedžiai yra dvejetainiai paieškos medžiai
 - Viršūnių reikšmės negali kartotis.



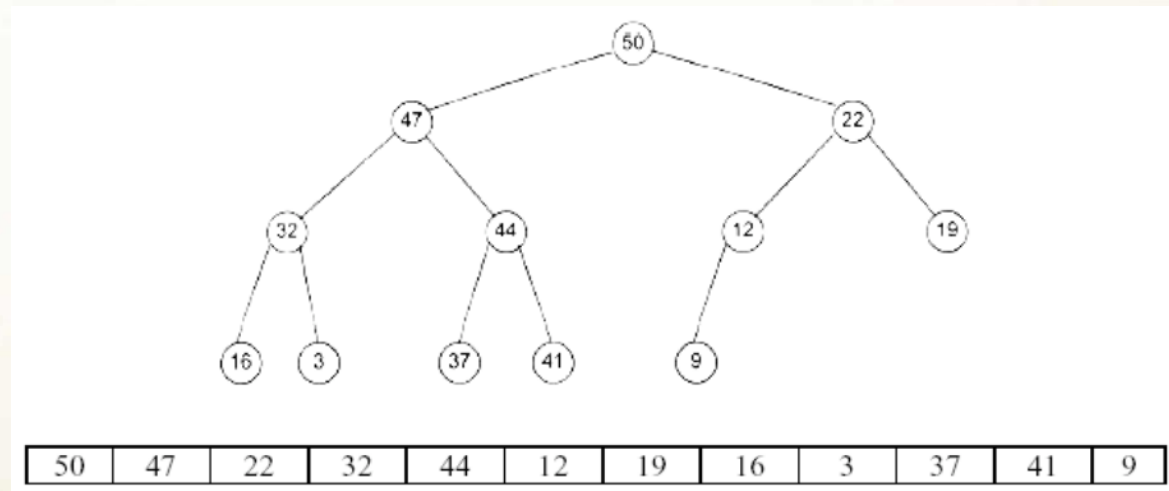
Operacijos dvejetainiame paieškos medyje

- Medžio apėjimas (visų reikšmių išvedimas)
- Reikšmės paieška
- Elemento įterpimas
- Elemento šalinimas

Duomenų struktūra heap

Heap struktūra – tai dvejetainis medis, saugomas vienmačiame masyve, kuriame nuorodos nukreiptos iš tėvo viršūnės į sūnus. Medis turi būti sutvarkytas pagal lygius, o kiekvienai viršūnei patenkinama heap sąlyga:

- **tėvo reikšmės turi būti ne mažesnės (arba ne didesnės) už jo vaikų reikšmes.**



Heap medis ir jį atitinkantis masyvas.

Prioritetinė eilutė

Duomenų struktūra, vadinama prioritetine eilute, pritaikyta operacijoms:

- inicializuoti aibę iš N elementų,
- įterpti naują elementą (insert),
- išmesti didžiausią elementą (remove),
- pakeisti didžiausią elementą nauju, jei šis nėra didžiausias (replace),
- pakeisti elemento prioritetą (change),
- išmesti bet kurį nurodytą elementą (delete),
- sujungti dvi prioritetines eiles į vieną (join).



Operacijų pavyzdžiai

operation	argument	return value	size	contents (unordered)	contents (ordered)
insert	P		1	P	P
insert	Q		2	P Q	P Q
insert	E		3	P Q E	E P Q
remove max		Q	2	P E	E P
insert	X		3	P E X	E P X
insert	A		4	P E X A	A E P X
insert	M		5	P E X A M	A E M P X
remove max		X	4	P E M A	A E M P
insert	P		5	P E M A P	A E M P P
insert	L		6	P E M A P L	A E L M P
insert	E		7	P E M A P L E	A E E L M
remove max		P	6	E E M A P L	A E E L M

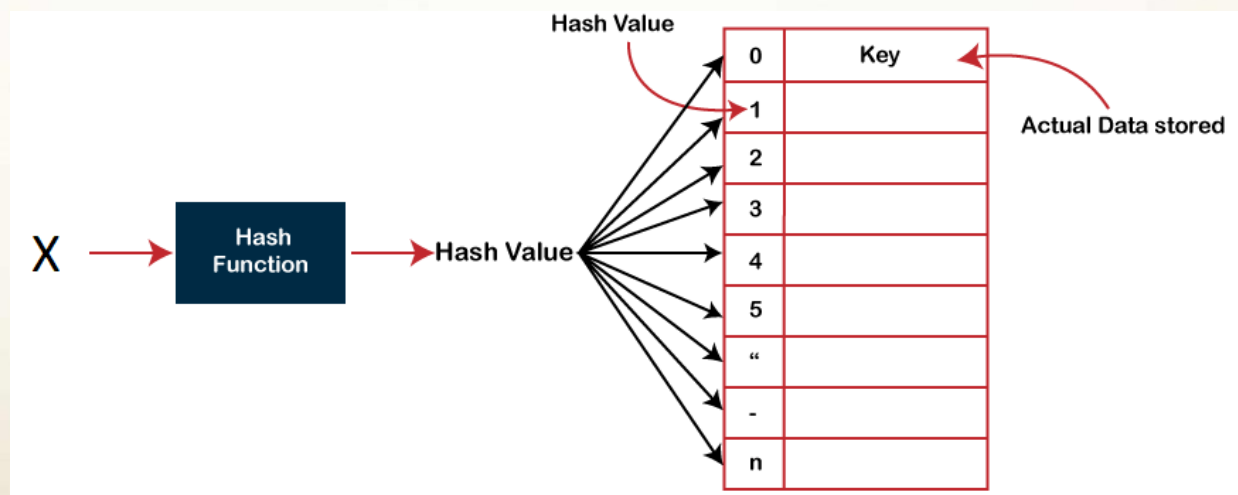
A sequence of operations on a priority queue

Ar egzistuoja ideali duomenų struktūra?

- Ar galimas toks masyvas, kurio patys elementai apibrėžtų atminties vietą, kurioje saugoma informacija?
- Kaip realizuoti?
- Privalumai?
- Trūkumai?

Sąvokos

- Adresams skaičiuoti reikalinga „Adresų skaičiuoklė“ arba kitaip, maišos funkcija (angl. *hash function*).
- Maišos metodas – būdas, kaip parinkti adresus (angl. *hashing*).
- Dėstymo lentelė – adresų masyvas (angl. *hash table*):



Paieškos greitis

- Tiesinė paieška $O(N)$.
- Dvejtainė paieška $O(\log N)$.
- Dėstymo lentelė:
 - $O(1)$ geriausiu atveju,
 - $O(N)$ blogiausiu atveju.

Maišos funkcijos privalumai

- Greitai ir lengvai apskaičiuojama.
- Raktai paskirstomi tolygiai po visą lentelę.
- Trūkumai:
- Situacija, kai į tą pačią vietą priskiriama du ar daugiau raktų, vadinama ***kolizija*** (*angl. collision*).

Kolizijų sprendimo keliai

- Atskiros eilės (angl. *separate chaining*)
- Tiesinis dėstymas (angl. *linear probing*)
- Kvadratinis dėstymas (angl. *quadratic probing*)
- Atsitiktinis dėstymas (angl. *random probing*)
- Dvigubas dėstymas (angl. *double hashing*)
- Adresų paskirstymas (angl. *buckets*)
- Ir t. t.

Pavyzdžiai (1)

- Maišos funkcija (rezultatas: dalybos iš 10 liekana):

```
int size = 10;  
  
// Simple Hash function  
int hash(int x) {  
    return x % size;  
}
```

Pavyzdžiai (2)

- Kolizija

Įterpiamos reikšmės:
1, 12, 14, 44.

0		
1	1	
2	12	
3		
4	14	← 44
5		
6		
7		
8		
9		

Pavyzdžiai (3)

- Atskiros eilės (angl. *separate chaining*)

Įterpiamos reikšmės

1, 12, 14, 44,
222, 15, 154.

0		
1	1	
2	12	← 222
3		
4	14	← 44 ← 154
5	15	
6		
7		
8		
9		

Pavyzdžiai (4)

- Tiesinis dėstymas (angl. *linear probing*)

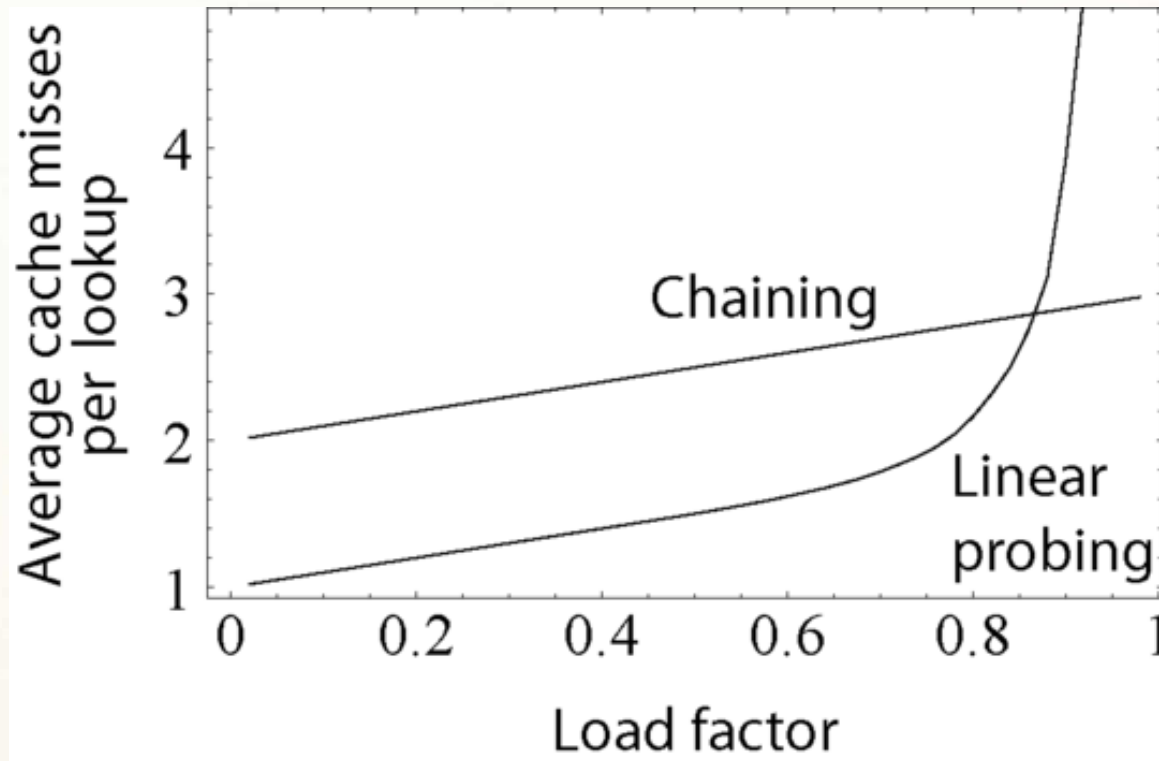
Įterpiamos reikšmės

1, 12, 14, 44,
16, 78, 66, 18.

0	
1	1
2	12
3	
4	14
5	44
6	16
7	66
8	78
9	18

Chaining vs Linear probing

Papildomų kreipinių skaičius.



Apkrovimo koeficientas.

ADT dėstymo lentelė (1)

- `create([int initialCapacity, float loadFactor])`

Sukurti naują (tuščią) dėstymo lentelę. Papildomi parametrai: pradinė talpa bei duotas apkrovimo koeficientas.

- `put(key, object)`

Įdėti naują elementą į lentelę. *Key* – raktas, pagal kurį skaičiuojama *hash* reikšmė. *Object* – duomenų rinkinys.

- `get(key)`

Gražinti reikšmę, kuri atitinka raktą dėstymo lentelėje, arba *Null* reikšmę, jei ieškomas raktas nerastas.

ADT dėstymo lentelė (2)

- `remove(key)`

Išmesti raktą atitinkančią reikšmę iš dėstymo lentelės. Ši funkcija nieko nedaro, jei rakto nėra dėstymo lentelėje.

- `isEmpty()`

Patikrinti, ar dėstymo lentelė yra tuščia.

- `size()`

Grąžinti raktų skaičių dėstymo lentelėje.

- `clear()`

Išvalyti dėstymo lentelę.

ADT dėstymo lentelė (3)

- `search(key)`

Patikrinti, ar duotas raktas yra dėstymo lentelėje.

- `rehash()`

Perkelti dėstymo lentelės turinį į didesnės talpos dėstymo lentelę. Šis metodas yra iškviečiamas automatiškai, jei raktų skaičius dėstymo lentelėje viršija tos lentelės apkrovimo koeficientą einamajai lentelės talpai.

- ...

Kur dar taikomos maišos funkcijos?

- Pasirašyti dokumentą elektroniniu parašu.
- Slaptažodžiams užšifruoti (pavyzdžiui, MD5 ar SHA1 maišos funkcijos):

Use this generator to create an MD5 hash of a string:

labas

Generate →

Your String	labas	
MD5 Hash	2e53d715b9d776b6c45263d31ecd3d87	Copy
SHA1 Hash	6cc9a313fd56dc22960ab21dd9383fe77c6d4a6e	Copy

Ačiū už dėmesį.

Klausimai?