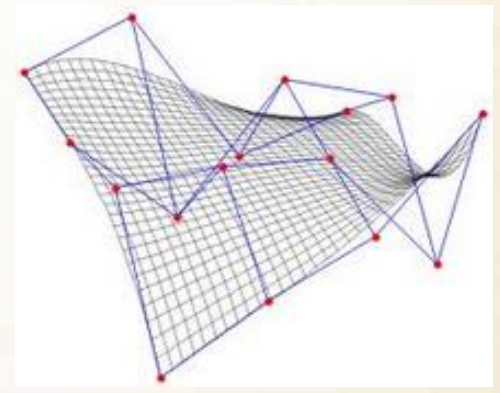
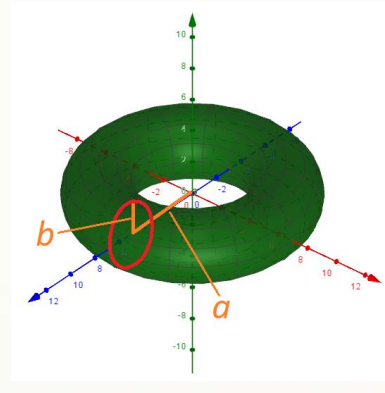
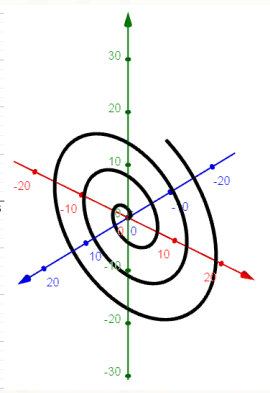
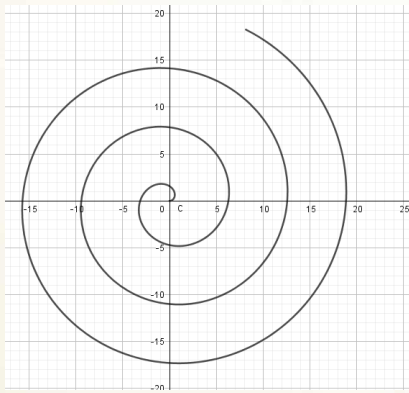


Parametrinės kreivės ir parametriniai paviršiai



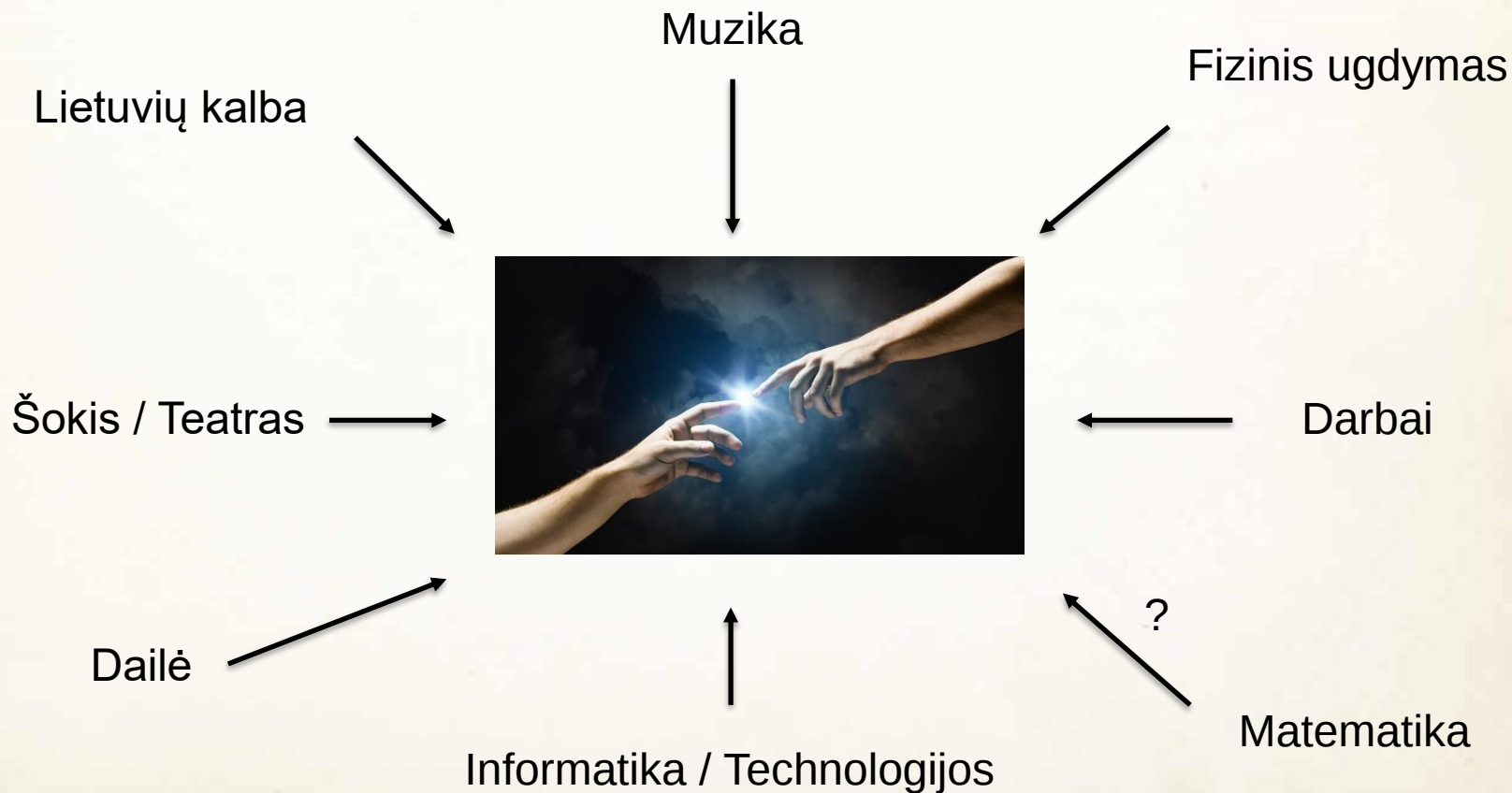
2025-05-06

Paskaitos (diskusijos) tikslas

- Matematinė kūryba, kaip ją atrasti?
- Mokyklinės matematikos žinios ir jų pritaikymas.
- **Funkcijos apibendrinimas: parametrinė kreivė.**
- Parametrinės kreivės pasukimas.
- Parametrinių kreivių kompozicijos.
- Trimatė parametrinė kreivė, pavyzdžiai.
- Parametrinis paviršius, pavyzdžiai.
- Parametrinių kreivių ir paviršių taikymas:
 - Bezjė kreivės,
 - Bezjė paviršiai.
- **Panaudoti GeoGebra, Meshlab, Sketchfab įrankius vizualizacijai.**

Kur matematinė kūryba?

Ar matematika yra „sausas mokslas“?



Atskirieji ir apibendrintieji atvejai

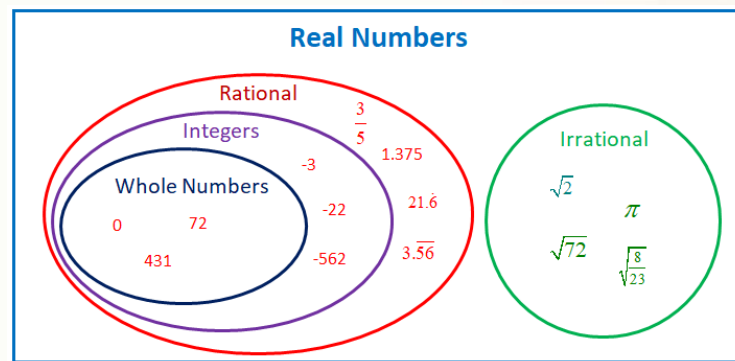
Bendrumai ir atskirumai

Realus gyvenimas



Gėrimas → Arbata → Juoda arbata → Juoda arbata be cukraus

Matematika

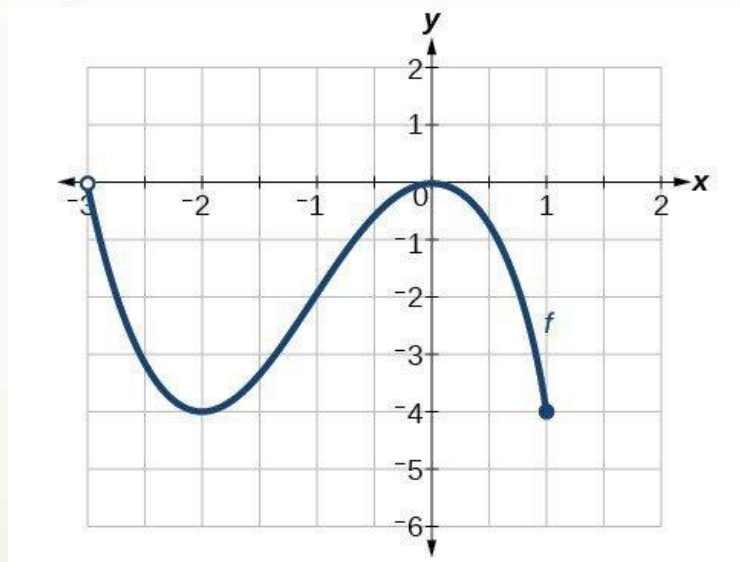


Realusis skaičius →
Racionalusis skaičius →
Sveikasis skaičius →
Natūralusis skaičius →
Teigiamas lyginis skaičius → 72

Kaip abstrakcijos (apibendrintieji atvejai) praverčia gyvenime?

Kas yra funkcija?

Funkcija – tai taisyklė, pagal kurią kiekvienai jos apibrėžimo srities reikšmei priskiriama vienintelė reikšmė: $f(x) = y$.



Funkcija ir jos apibendrinimas

$f(x) = y$, pažymėkime:

$$x = t,$$

$$y = f(t).$$

Bendruoju atveju:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

$$t \in [a, b].$$

$t = \text{time}$

Parametrinės kreivės sąvoka

- 2D parametrinės kreivės užrašymas:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t).$$

- 3D parametrinės kreivės užrašymas:

$$x = x(t),$$

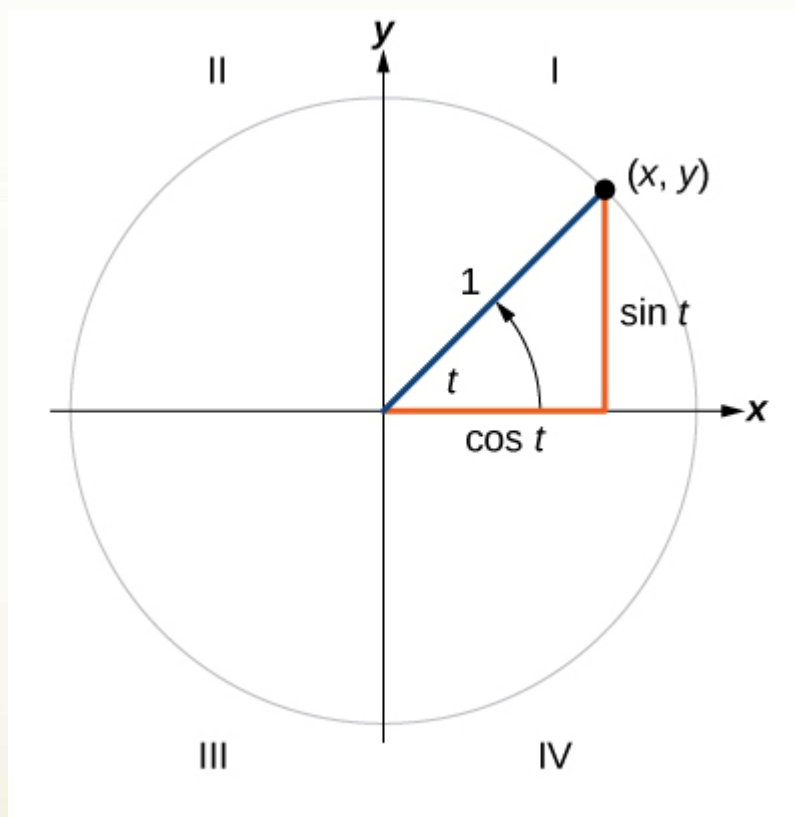
$$y = y(t),$$

$$z = z(t).$$

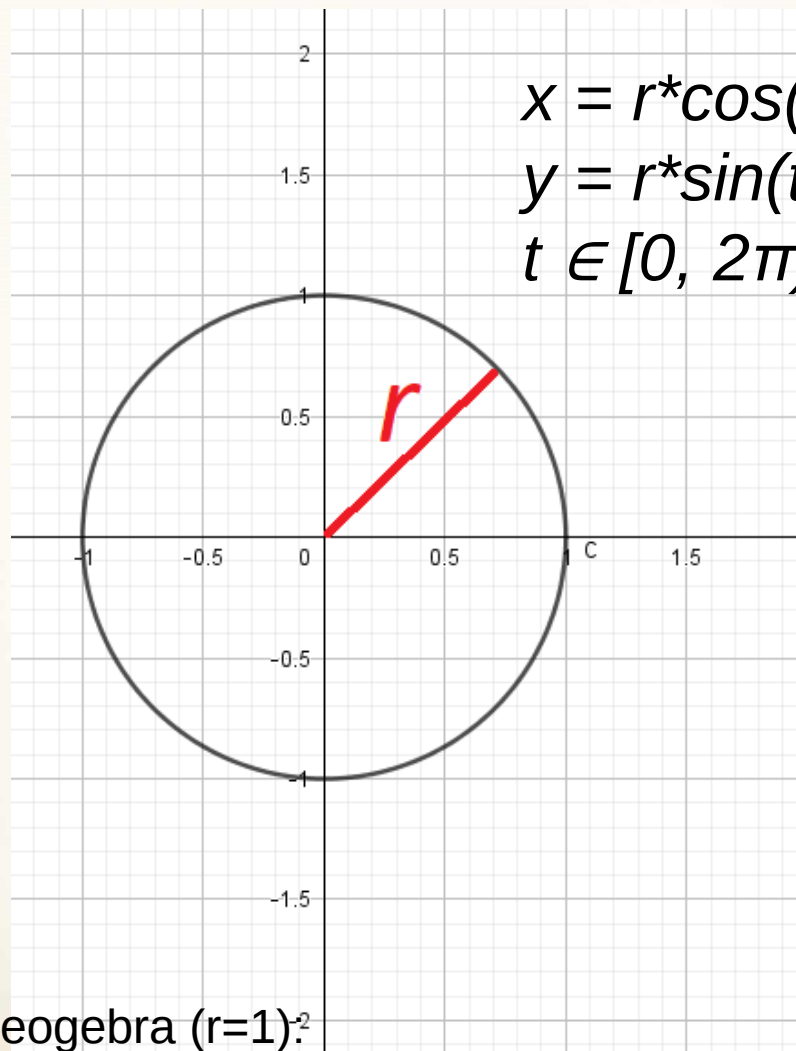
t – parametras, priklausantis intervalui $[t_{min}, t_{max}]$.

Sinuso ir kosinuso apibrėžimai

Parametrinės kreivės užuominos mokykloje

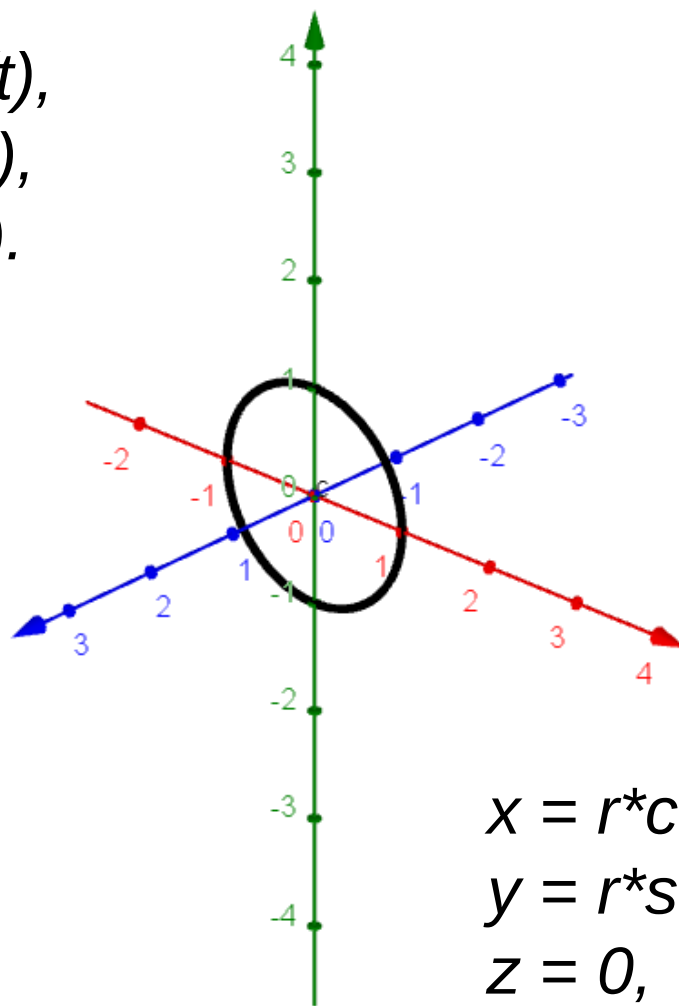


Apskritimo lygtis XY plokštumoje



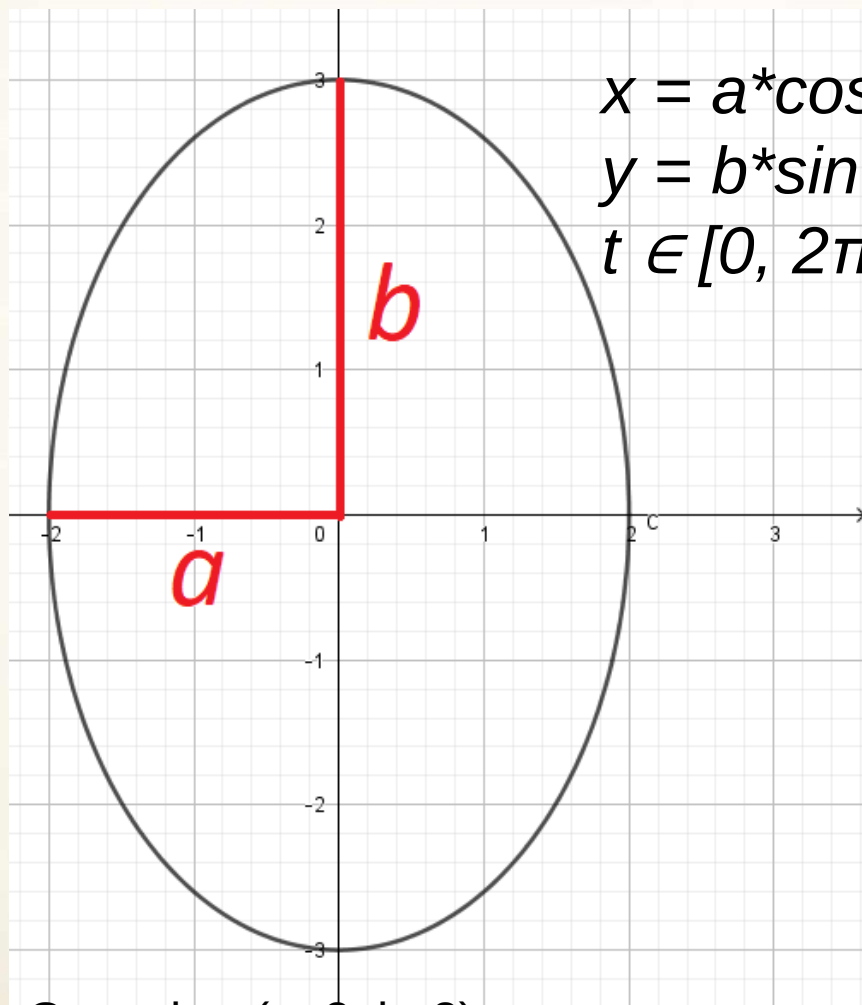
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(t), \\ y &= r \cdot \sin(t), \\ t &\in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Geogebra (r=1):
Curve(cos(t), sin(t), t, 0, 2π)



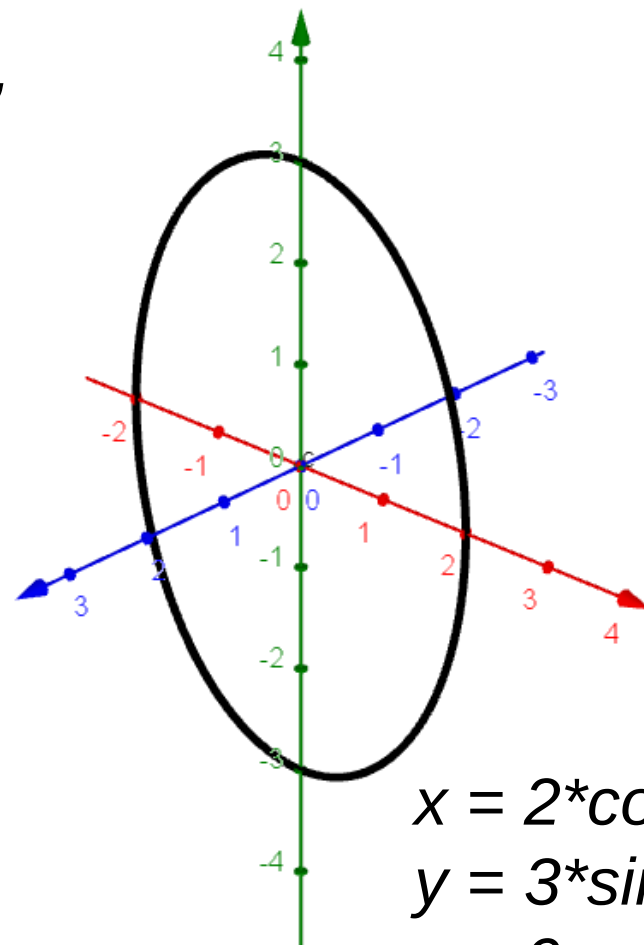
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(t), \\ y &= r \cdot \sin(t), \\ z &= 0, \\ t &\in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Elipses lygtis XY plokštumoje



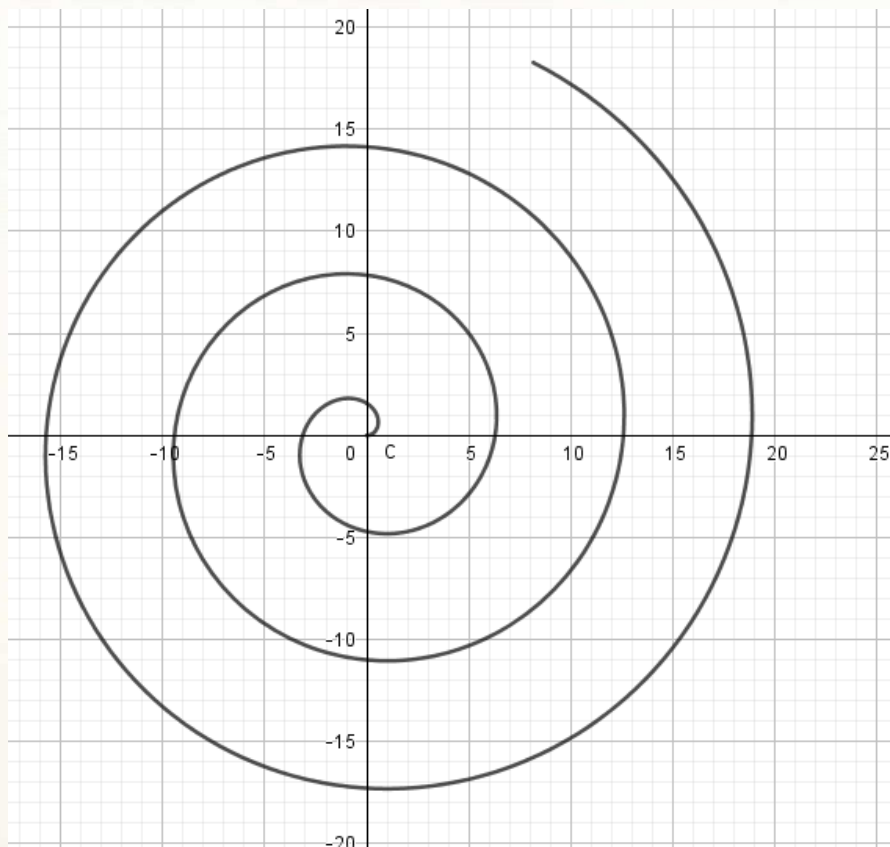
$$\begin{aligned}x &= a \cdot \cos(t), \\y &= b \cdot \sin(t), \\t &\in [0, 2\pi).\end{aligned}$$

Geogebra ($a=2$, $b=3$):
`Curve(2 cos(t), 3 sin(t), t, 0, 2π)`



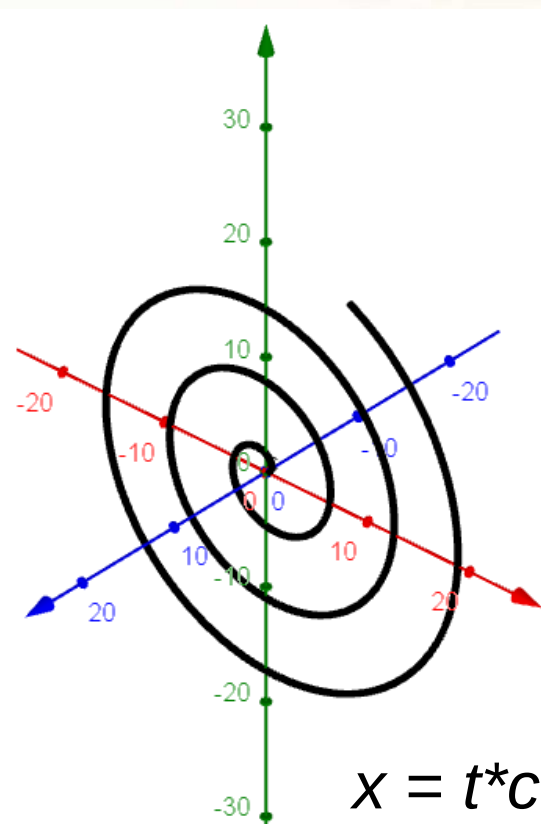
$$\begin{aligned}x &= 2 \cdot \cos(t), \\y &= 3 \cdot \sin(t), \\z &= 0, \\t &\in [0, 2\pi).\end{aligned}$$

Kitų parametrinių kreivių pavyzdžiai



Geogebra:

Curve(t cos(t), t sin(t), t, 0, 20)

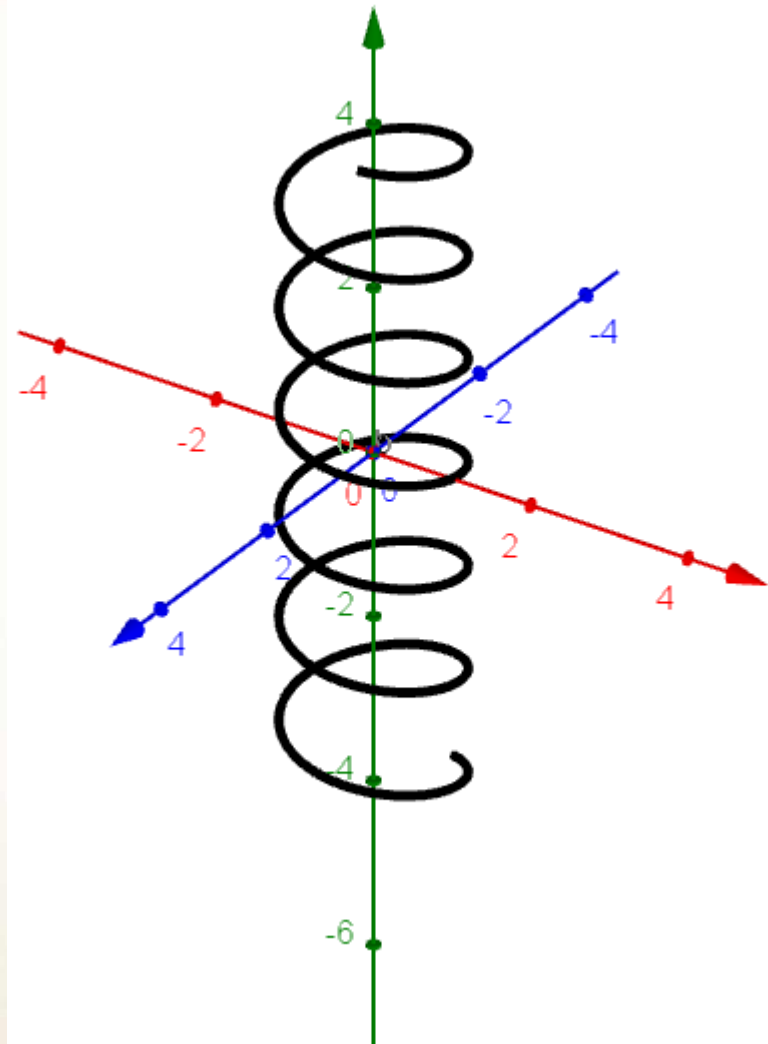


$$\begin{aligned}x &= t \cdot \cos(t), \\y &= t \cdot \sin(t), \\z &= 0, \\t &\in [0, 20].\end{aligned}$$

Kitų parametrinių kreivių pavyzdžiai

$$\begin{aligned}x &= \cos(t), \\y &= t / 5, \\z &= \sin(t), \\t &\in [-20, 20].\end{aligned}$$

Geogebra:
`Curve(cos(t), t / 5, sin(t), t, -20, 20)`

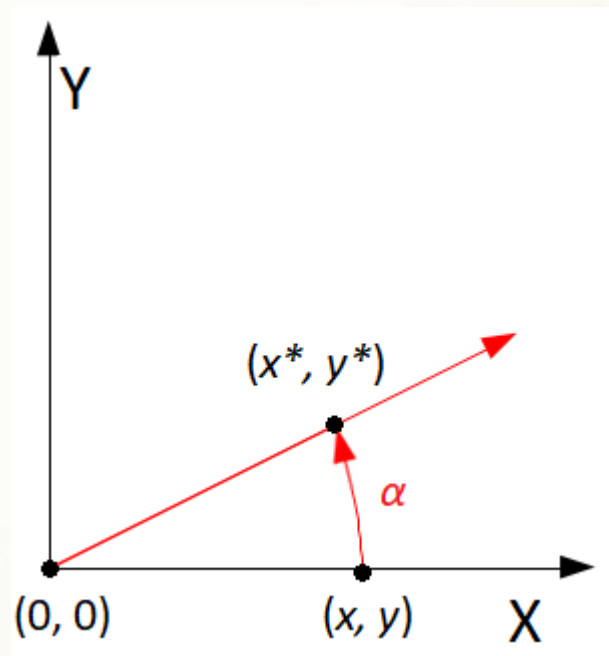


Koordinačių sistemos pasukimas

Taško (x, y) naujos koordinatės (x^*, y^*) po posūkio kampu α :

$$x^* = x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha)$$

$$y^* = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)$$



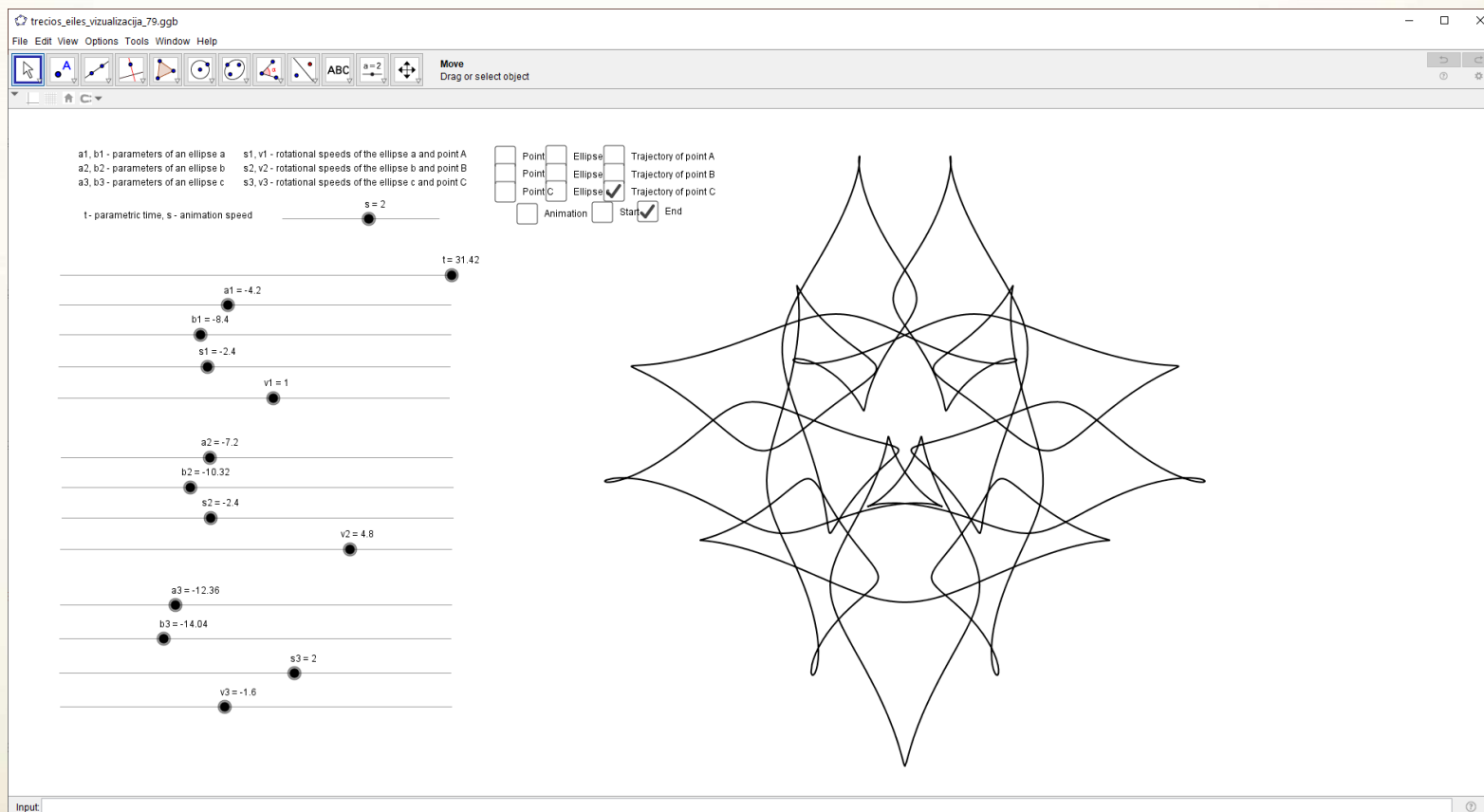
Užduotis: išveskime funkcijos $f(x) = x^2$ parametrinę kreivę ir pasukime ją kampu α . Pasitikrinkime gautą rezultatą su GeoGebra programa.

Elipsinés parametrinés 2D kreivės

$$x(t) = \sin(s_1 t) b_1 \cos(v_1 t) + \cos(s_1 t) a_1 \sin(v_1 t) + \sin(s_2 t) b_2 \cos(v_2 t) + \cos(s_2 t) a_2 \sin(v_2 t) + \sin(s_3 t) b_3 \cos(v_3 t) + \cos(s_3 t) a_3 \sin(v_3 t)$$

$$y(t) = -a_1 \sin(v_1 t) \sin(s_1 t) + b_1 \cos(v_1 t) \cos(s_1 t) - a_2 \sin(v_2 t) \sin(s_2 t) + b_2 \cos(v_2 t) \cos(s_2 t) - a_3 \sin(v_3 t) \sin(s_3 t) + b_3 \cos(v_3 t) \cos(s_3 t)$$

$$t \in [0, 10\pi]$$



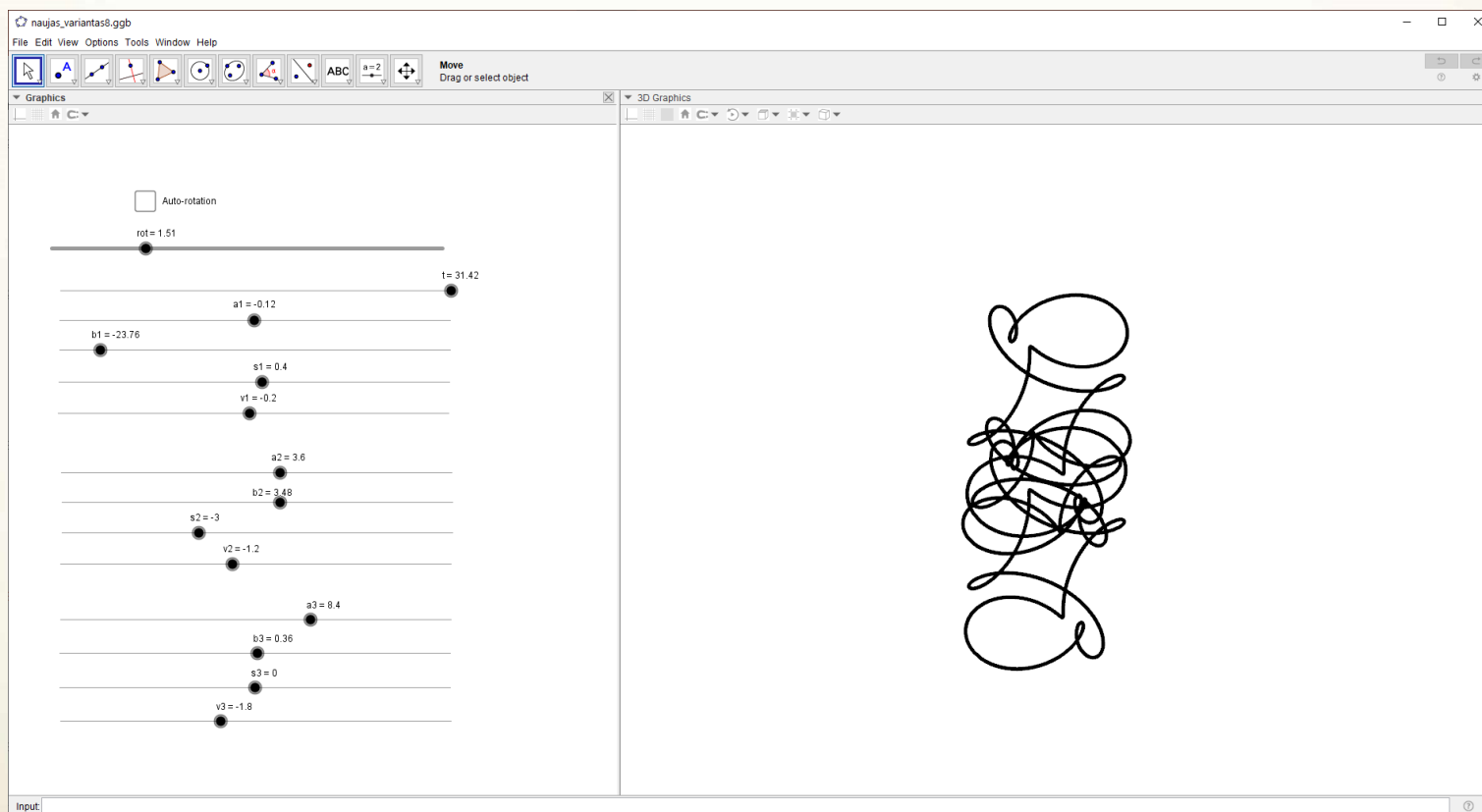
Elipsinés parametrinés 3D kreivės

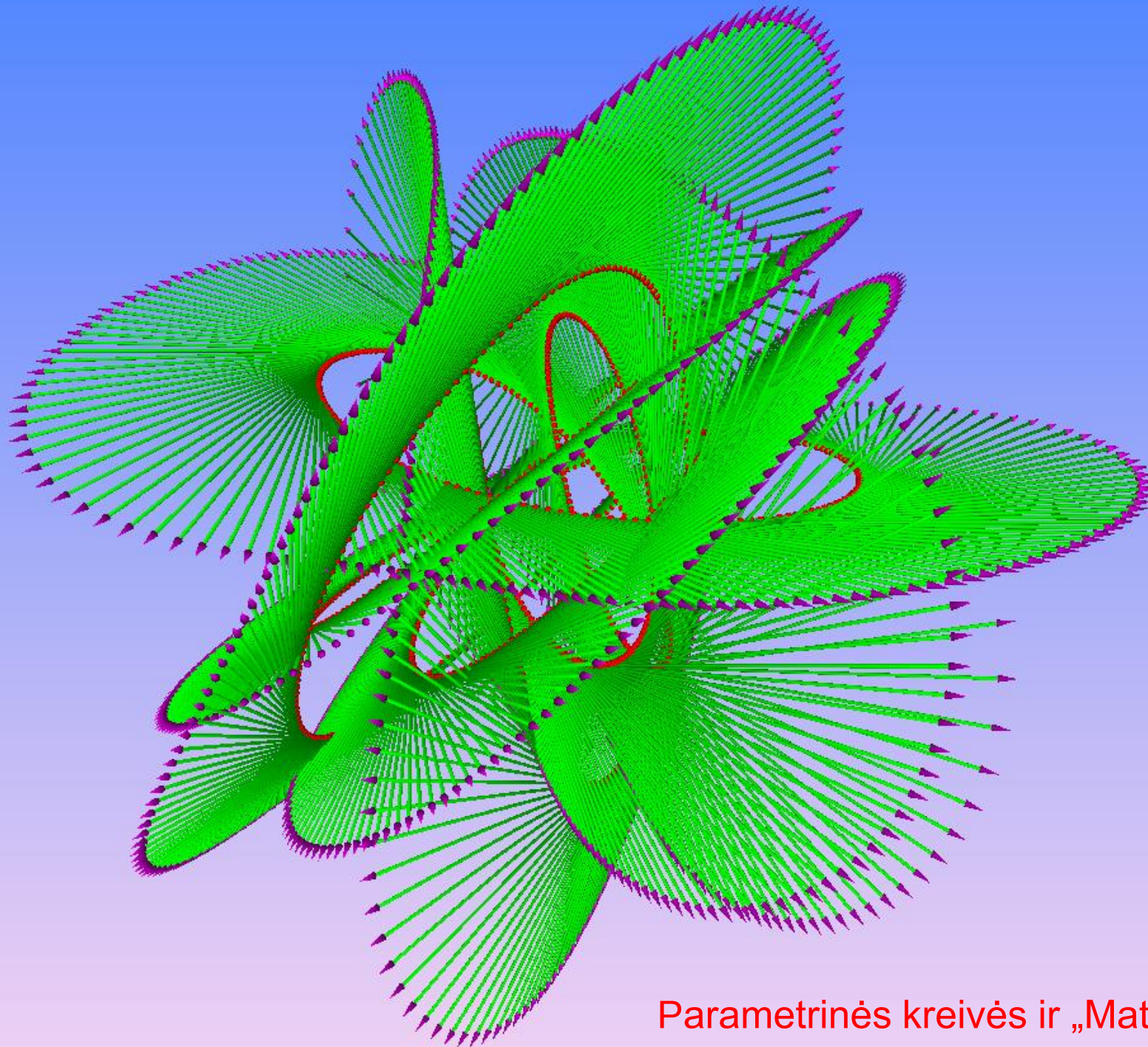
$$x(t) = \sin(s_3 t) b_3 \cos(v_3 t) + \cos(s_3 t) a_3 \sin(v_3 t) - a_2 \sin(v_2 t) \sin(s_2 t) + b_2 \cos(v_2 t) \cos(s_2 t)$$

$$y(t) = \sin(s_1 t) b_1 \cos(v_1 t) + \cos(s_1 t) a_1 \sin(v_1 t) - a_3 \sin(v_3 t) \sin(s_3 t) + b_3 \cos(v_3 t) \cos(s_3 t)$$

$$z(t) = \sin(s_2 t) b_2 \cos(v_2 t) + \cos(s_2 t) a_2 \sin(v_2 t) - a_1 \sin(v_1 t) \sin(s_1 t) + b_1 \cos(v_1 t) \cos(s_1 t)$$

$$t \in [0, 10\pi]$$



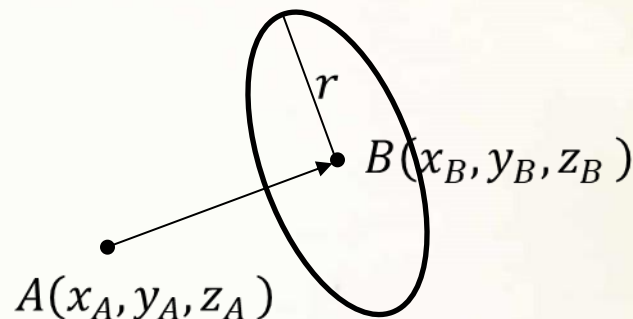


Parametrinēs kreivės ir „Math art“

Apskritimo lygtis erdvėje

<http://demonstrations.wolfram.com/ParametricEquationOfACircleIn3D/>

Apskritimo (kurio spindulys r ir centrinis taškas B), ortogonalaus vektoriui AB , parametrinė lygtis:



$$x(t) = x_B - \frac{r \cos(t)(y_B - y_A)\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} + r \sin(t)(x_B - x_A)(z_B - z_A)}{\sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}}$$

$$y(t) = y_B + \frac{r \cos(t)(x_B - x_A)\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} - r \sin(t)(z_B - z_A)(y_B - y_A)}{\sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}}$$

$$z(t) = z_B + \frac{r \sin(t)\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_B - \frac{r\sqrt{2}}{2} (\text{sgn}(z_B - z_A)\sin(t) + \cos(t))$$

$$y(t) = y_B - \frac{r\sqrt{2}}{2} (\text{sgn}(z_B - z_A)\sin(t) - \cos(t))$$

$$z(t) = z_B, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Jei $x_A = x_B$ ir $y_A = y_B$, tai:

Parametriniai paviršiai

- Parametrinio paviršiaus užrašymas:

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

$$z = z(u, v).$$

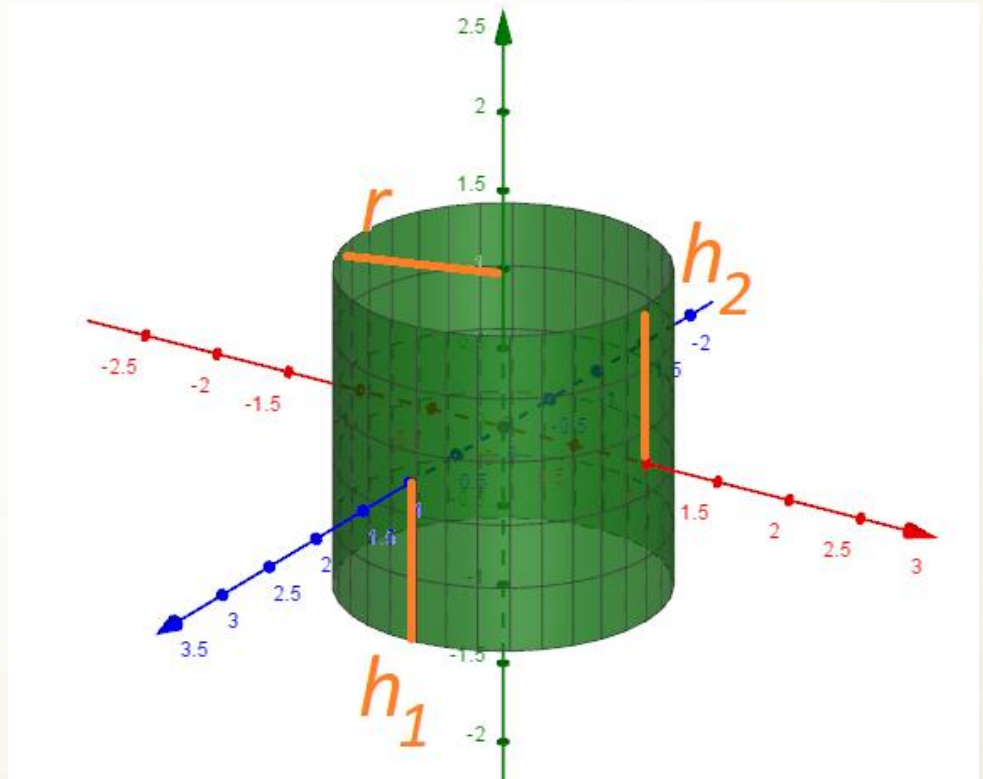
u – parametras, priklausantis intervalui $[u_{min}, u_{max}]$,

v – parametras, priklausantis intervalui $[v_{min}, v_{max}]$.

Cilindras

Parametrinis
cilindro paviršius:
 $x=r*\cos(u)$,
 $y=v$,
 $z=r*\sin(u)$,
 $u\in[0,2\pi), v\in[h_1, h_2]$.

Geogebra ($r=1$, $h_1=-1$, $h_2=1$):
`Surface(cos(u), v, sin(u), u, 0,`
`2π, v, -1, 1)`



Sfera

*Parametrinis sferos
paviršius:*

$$x=r*\cos(u)*\sin(v),$$

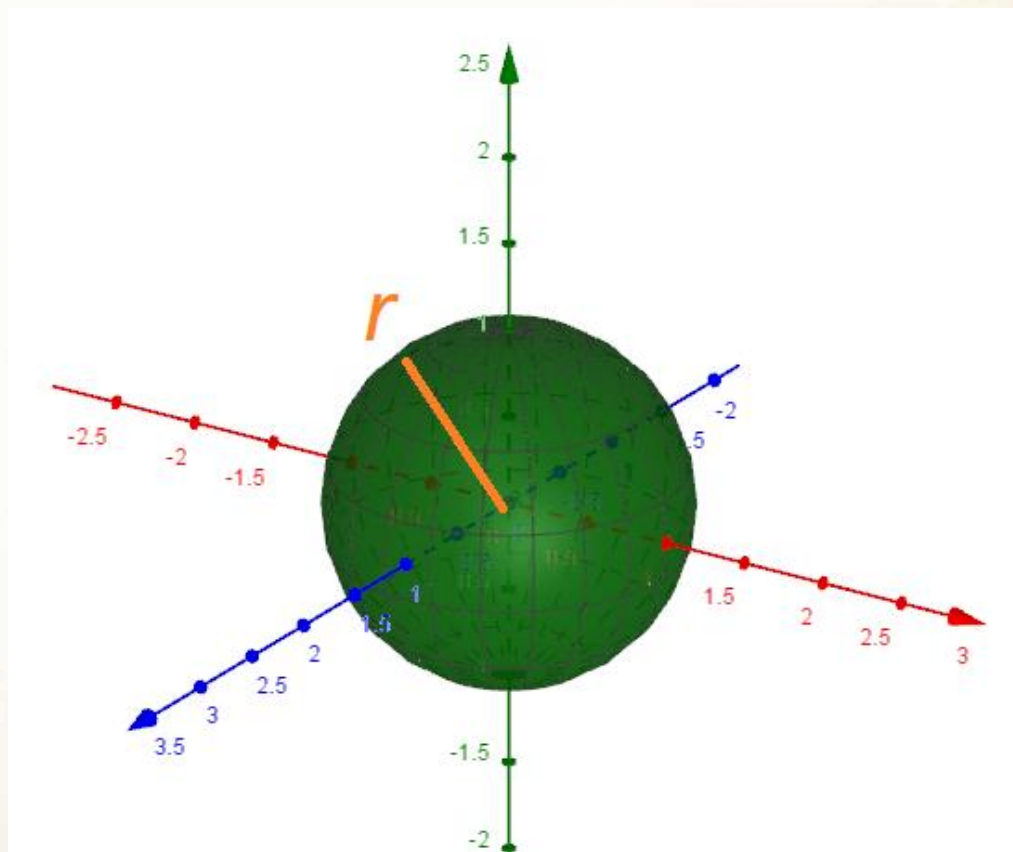
$$y=r*\cos(v),$$

$$z=r*\sin(u)*\sin(v),$$

$$u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi].$$

Geogebra (r=1):

Surface(cos(u) sin(v), cos(v),
sin(u) sin(v), u, 0, 2π, v, 0, π)



Toras

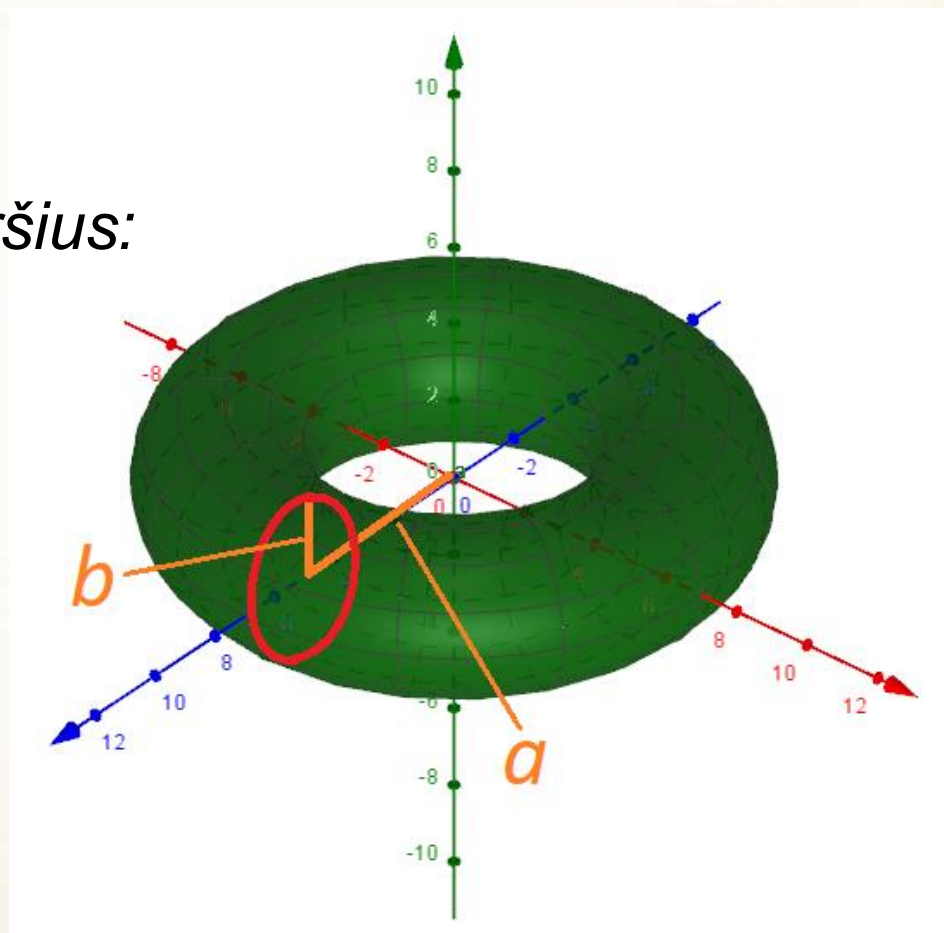
Parametrinis toro paviršius:

$$x=(a+b*\cos(u))*\cos(v),$$

$$y=b*\sin(u),$$

$$z=(a+b*\cos(u))*\sin(v),$$

$$u \in [0, 2\pi), v \in [0, 2\pi).$$



Geogebra (a=5, b=2):

Surface((5 + 2cos(u)) cos(v),
2sin(u), (5 + 2cos(u)) sin(v),
u, 0, 2π, v, 0, 2π)

Sukinys

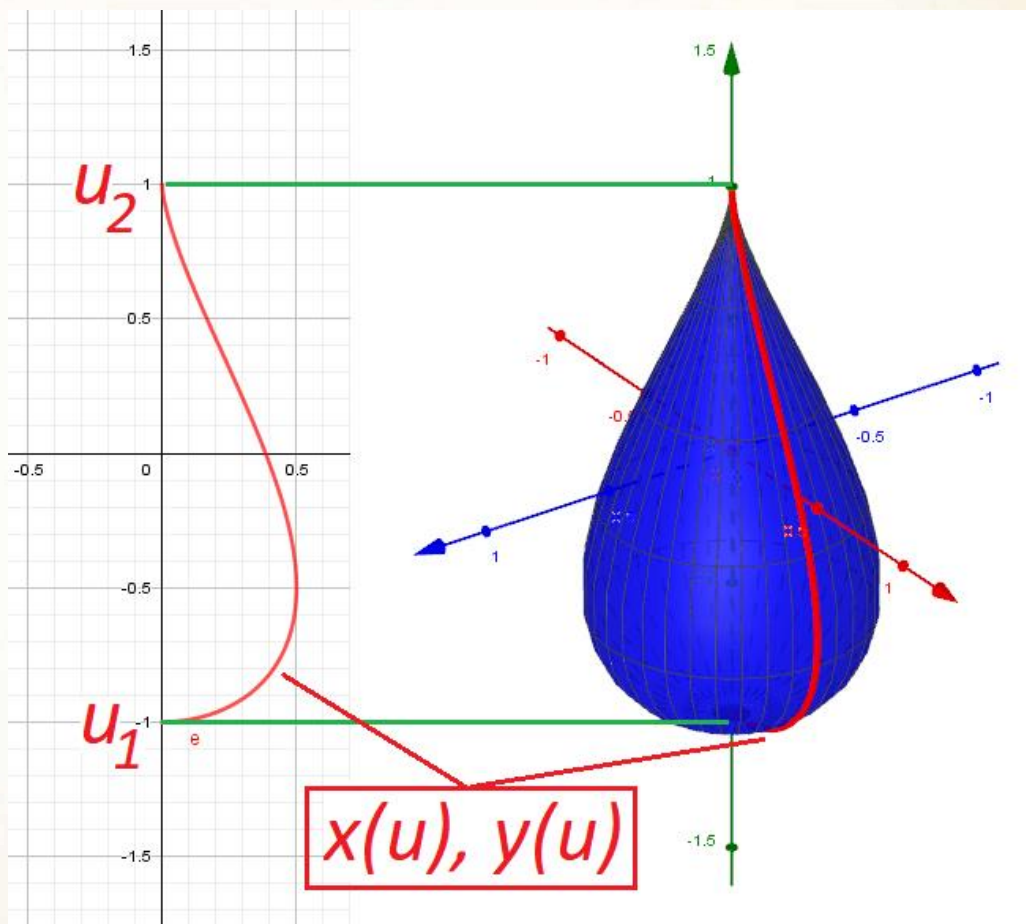
Parametrinis sukinio paviršius:

$$x = x(u) \cdot \cos(v),$$

$$y = y(u),$$

$$z = x(u) \cdot \sin(v),$$

$$u \in [u_1, u_2], v \in [0, 2\pi).$$



Geogebra ($x(u) = \sqrt{1 - u^2} (1 - u) / (3 / 2 \sqrt{3})$, $y(u) = u$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$):

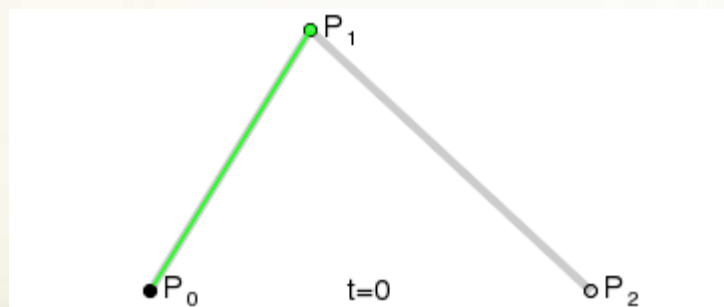
Surface($\sqrt{1 - u^2} (1 - u) / (3 / 2 \sqrt{3}) \cos(v)$, u , $\sqrt{1 - u^2} (1 - u) / (3 / 2 \sqrt{3}) \sin(v)$, u , $-1, 1$, v , $0, 2\pi$), Curve($\sqrt{1 - u^2} (1 - u) / (3 / 2 \sqrt{3})$, u , u , $-1, 1$)

Bezjė kreivės

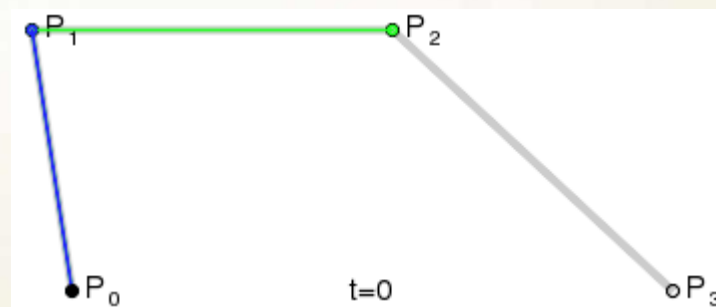
$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

$\mathbf{P}_i$ – kontroliniai taškai, n – kreivės eilė.

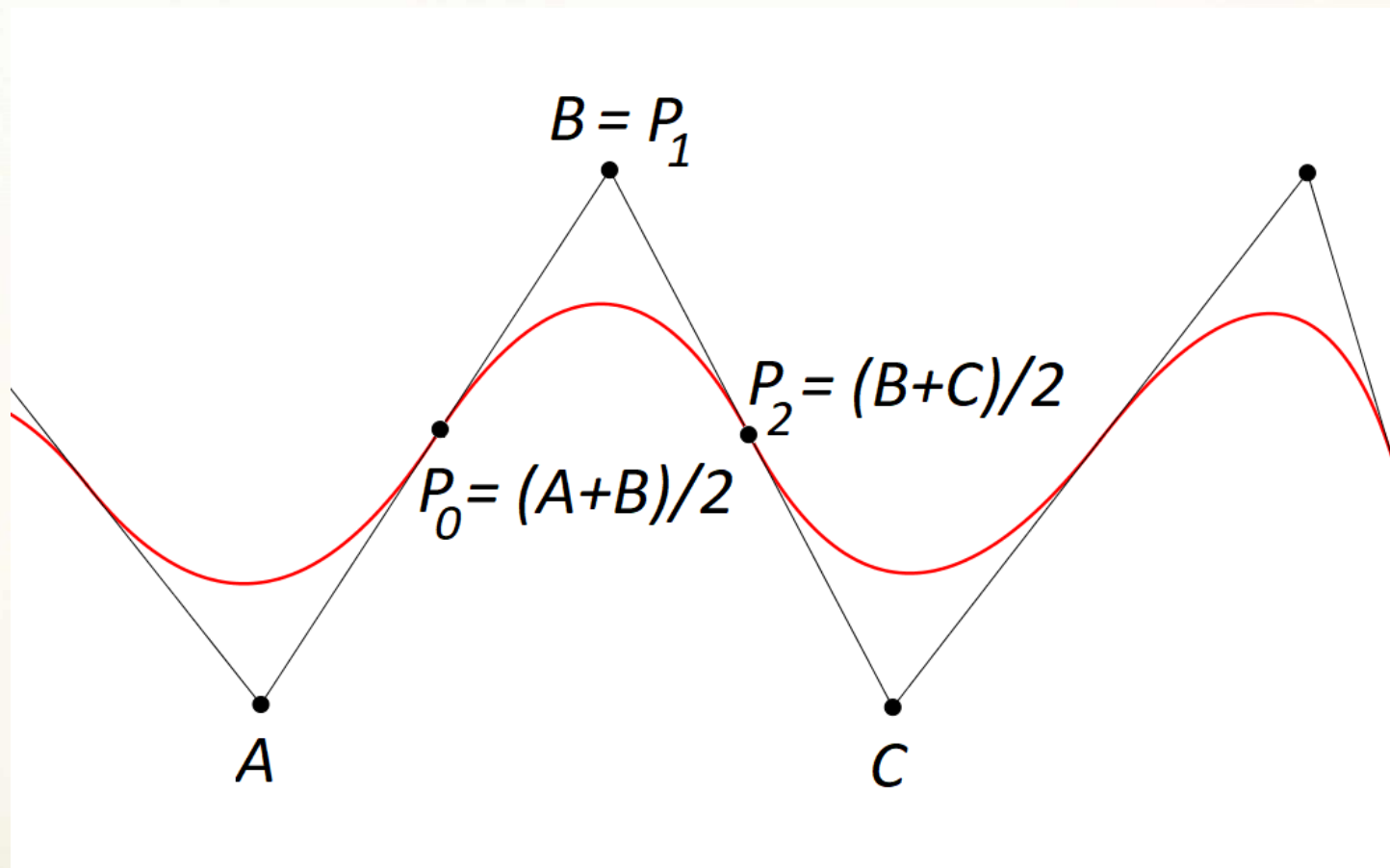
$n = 2$:



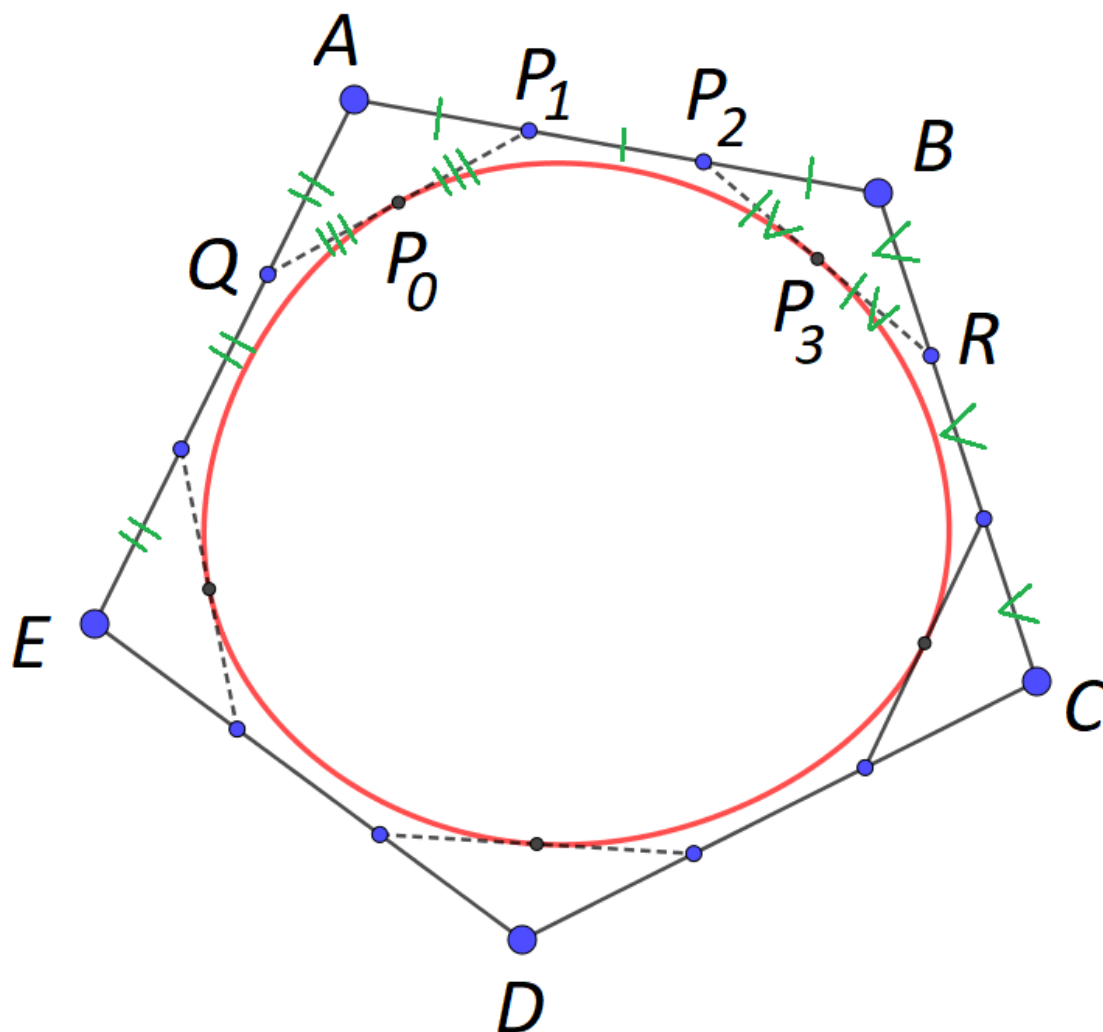
$n = 3$:



2 eilės Bežjė kreivių kontūras

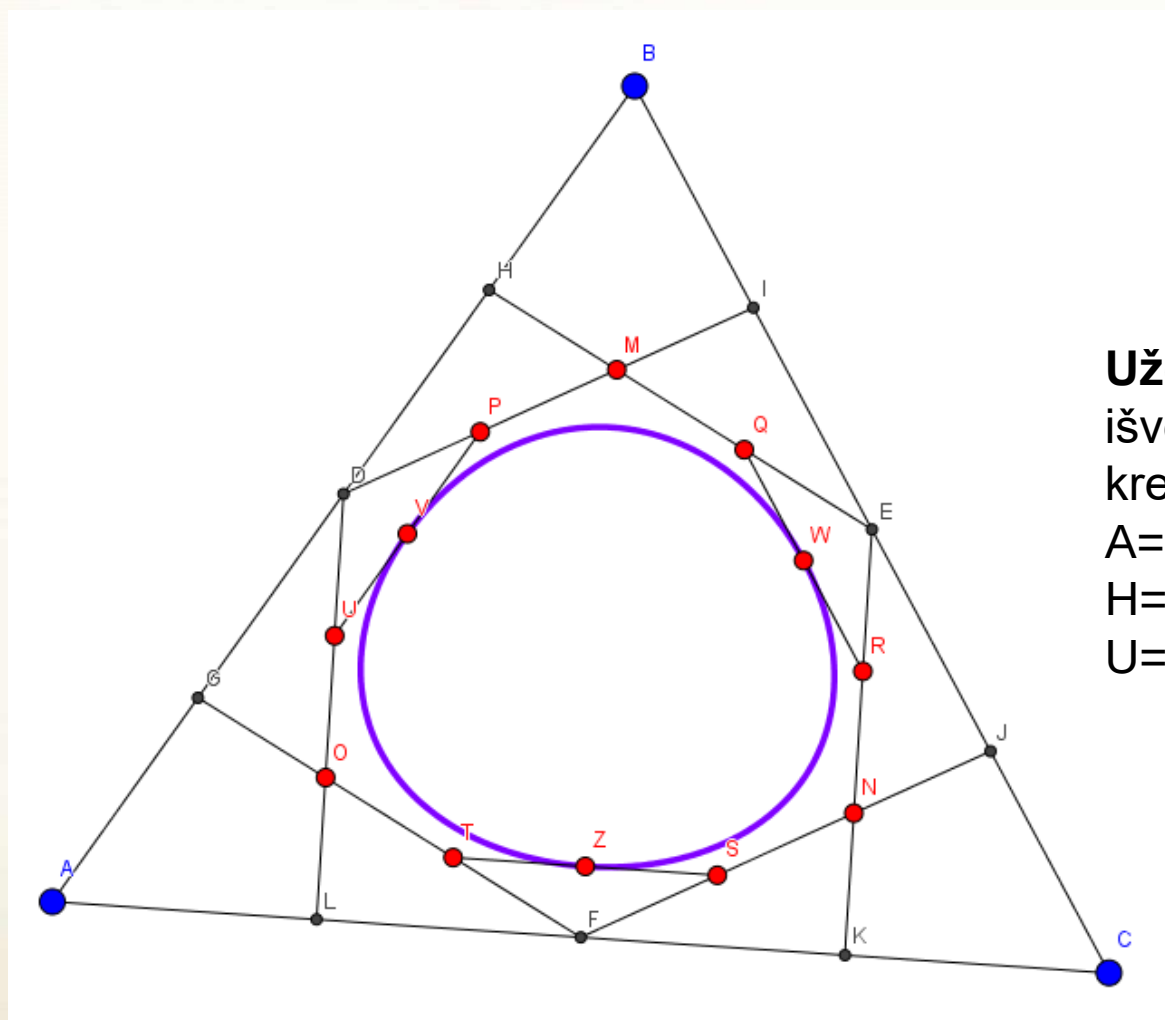


3 eilēs Bezjē kreivju kontūras



$$\begin{aligned} P_1 &= 2/3 \cdot A + 1/3 \cdot B, \\ P_2 &= 1/3 \cdot A + 2/3 \cdot B, \\ P_0 &= (Q + P_1)/2, \\ P_3 &= (P_2 + R)/2. \end{aligned}$$

4 eilės Bežjē kreivju kontūras



Užduotis: pagal brėžinį
išvesti 4 eilės Bežjē
kreivju lygtis, kai
 $A=G$, $G=D$, $D=H$,
 $H=B$, $D=P$, $P=M$,
 $U=V$, $V=P$ ir t. t.

Bezjė paviršiai

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j} K_{i,j}$$

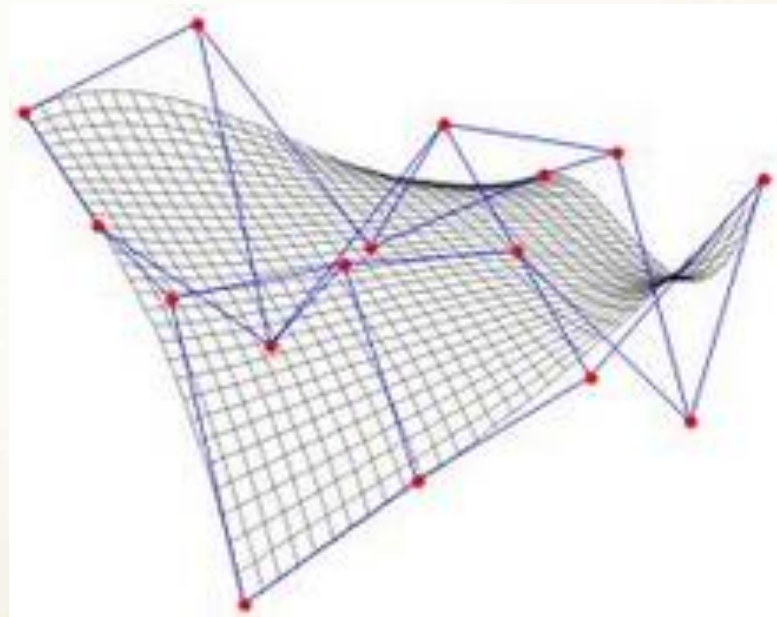
$$u, v \in [0, 1]$$

Pavyzdys, kai $n=m=3$.

Raudona spalva pažymėti kontroliniai taškai.

Mėlyna spalva pažymėtas kontrolinis tinklas.

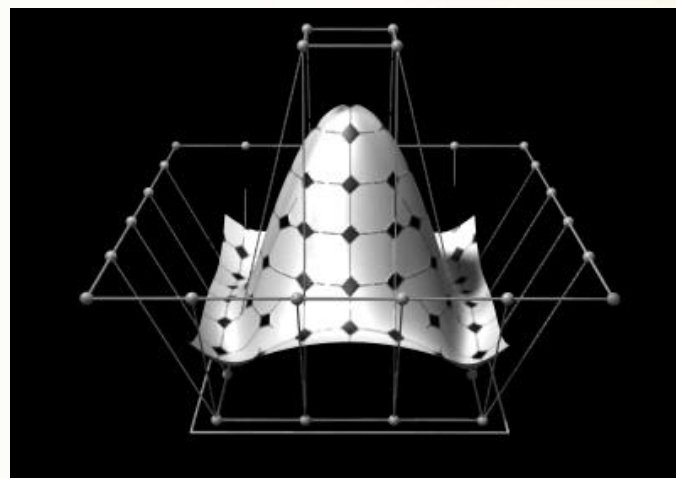
Juoda spalva pažymėta Bezjė paviršiaus aproksimacija.



C2 paviršius

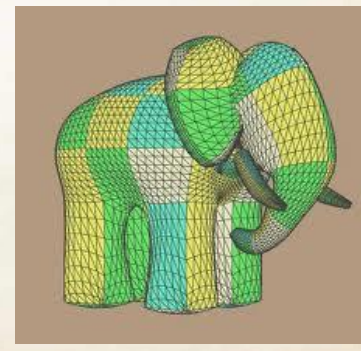
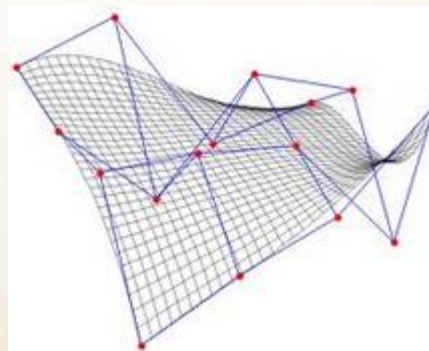
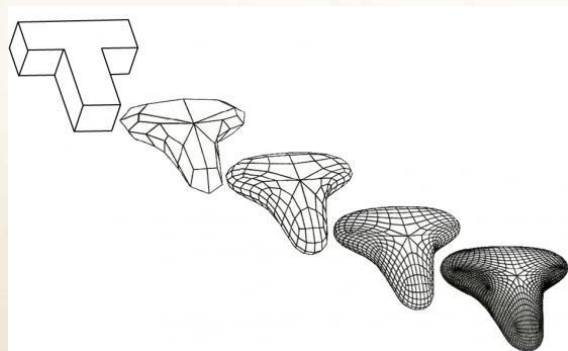
Glodus paviršius, sudarytas iš atskirų mažesnių paviršių, kurių sandūroje sutampa antros eilės išvestinės (kreivumas κ) kiekvieno tokio paviršiaus atžvilgiu:

$$\kappa = \frac{|x' y'' - y' x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



C2 paviršiaus konstravimo metodai:

Catmullo ir Clarko algoritmas **Aproksimavimo Bežjė paviršiais metodas**



C2 paviršiaus konstravimas iš Bezjė paviršių (1)

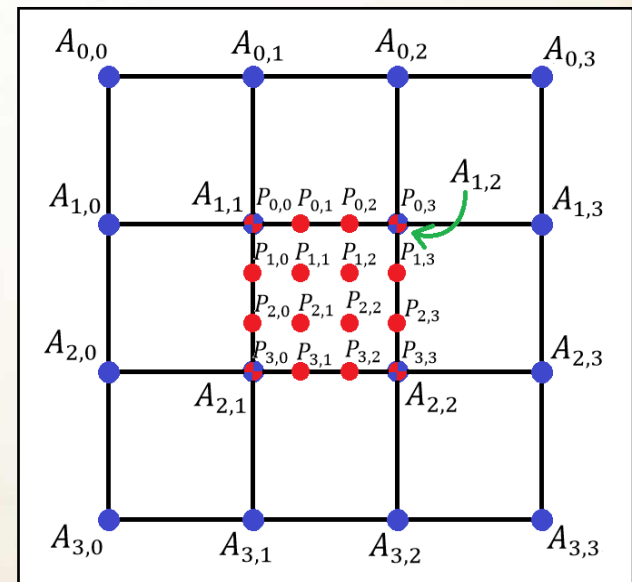
Trečios eilės Bezjė kreivių tenzorinės sandaugos koeficientai (kaukės):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

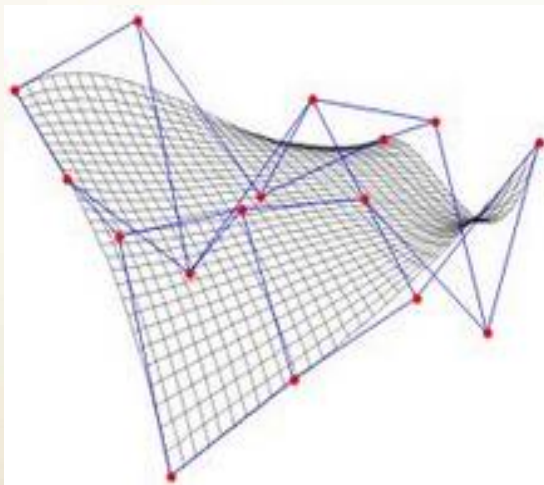
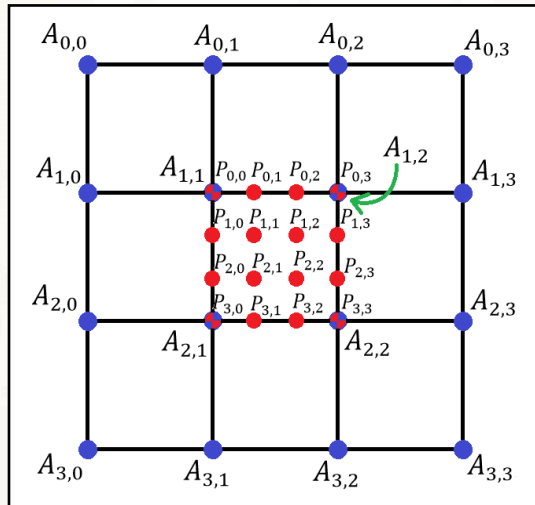
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Pagal šias kaukes apskaičiuojami Bezjė paviršiaus kontroliniai taškai.



Kontrolinių Bežjė paviršiaus taškų apskaičiavimas



$$P_{0,0} = \frac{1}{36} A_{0,0} + \frac{1}{36} A_{0,2} + \frac{1}{36} A_{2,0} + \frac{1}{36} A_{2,2} + \frac{1}{9} A_{0,1} + \frac{1}{9} A_{1,0} + \frac{1}{9} A_{1,2} + \frac{1}{9} A_{2,1} + \frac{4}{9} A_{1,1},$$

$$P_{0,1} = \frac{1}{18} A_{0,2} + \frac{1}{18} A_{2,2} + \frac{1}{9} A_{0,1} + \frac{1}{9} A_{2,1} + \frac{2}{9} A_{1,2} + \frac{4}{9} A_{1,1},$$

$$P_{0,2} = \frac{1}{18} A_{0,1} + \frac{1}{18} A_{2,1} + \frac{1}{9} A_{0,2} + \frac{1}{9} A_{2,2} + \frac{2}{9} A_{1,1} + \frac{4}{9} A_{1,2},$$

$$P_{0,3} = \frac{1}{36} A_{0,1} + \frac{1}{36} A_{0,3} + \frac{1}{36} A_{2,1} + \frac{1}{36} A_{2,3} + \frac{1}{9} A_{0,2} + \frac{1}{9} A_{1,1} + \frac{1}{9} A_{1,3} + \frac{1}{9} A_{2,2} + \frac{4}{9} A_{1,2},$$

$$P_{1,0} = \frac{1}{18} A_{2,0} + \frac{1}{18} A_{2,2} + \frac{1}{9} A_{1,0} + \frac{1}{9} A_{1,2} + \frac{2}{9} A_{2,1} + \frac{4}{9} A_{1,1},$$

$$P_{1,1} = \frac{1}{9} A_{2,2} + \frac{2}{9} A_{1,2} + \frac{2}{9} A_{2,1} + \frac{4}{9} A_{1,1},$$

$$P_{1,2} = \frac{1}{9} A_{2,1} + \frac{2}{9} A_{1,1} + \frac{2}{9} A_{2,2} + \frac{4}{9} A_{1,2},$$

$$P_{1,3} = \frac{1}{18} A_{2,1} + \frac{1}{18} A_{2,3} + \frac{1}{9} A_{1,1} + \frac{1}{9} A_{1,3} + \frac{2}{9} A_{2,2} + \frac{4}{9} A_{1,2},$$

$$P_{2,0} = \frac{1}{18} A_{1,0} + \frac{1}{18} A_{1,2} + \frac{1}{9} A_{2,0} + \frac{1}{9} A_{2,2} + \frac{2}{9} A_{1,1} + \frac{4}{9} A_{2,1},$$

$$P_{2,1} = \frac{1}{9} A_{1,2} + \frac{2}{9} A_{1,1} + \frac{2}{9} A_{2,2} + \frac{4}{9} A_{2,1},$$

$$P_{2,2} = \frac{1}{9} A_{1,1} + \frac{2}{9} A_{1,2} + \frac{2}{9} A_{2,1} + \frac{4}{9} A_{2,2},$$

$$P_{2,3} = \frac{1}{18} A_{1,1} + \frac{1}{18} A_{1,3} + \frac{1}{9} A_{2,1} + \frac{1}{9} A_{2,3} + \frac{2}{9} A_{1,2} + \frac{4}{9} A_{2,2},$$

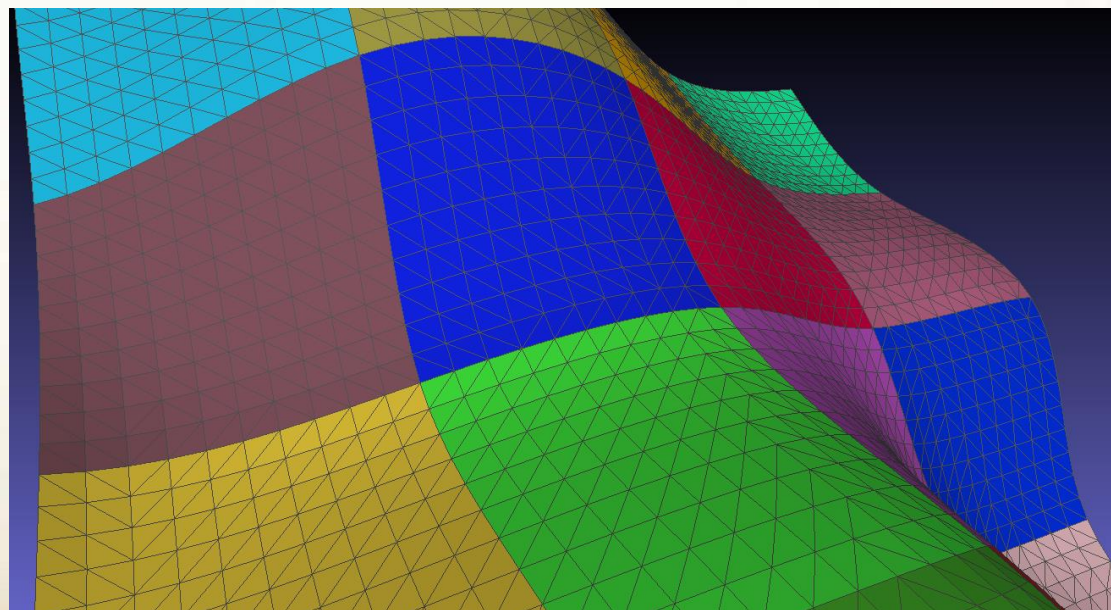
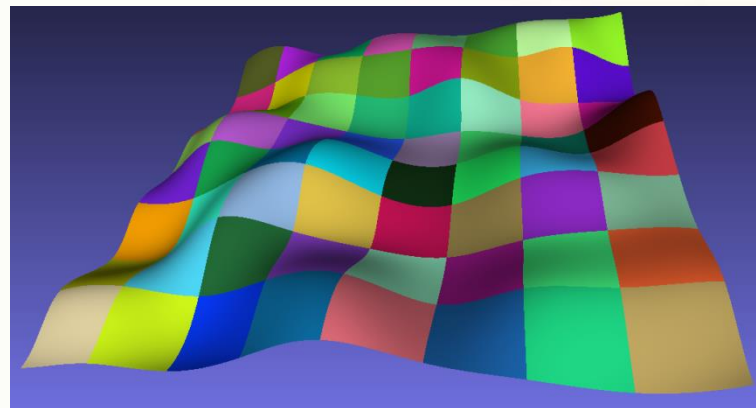
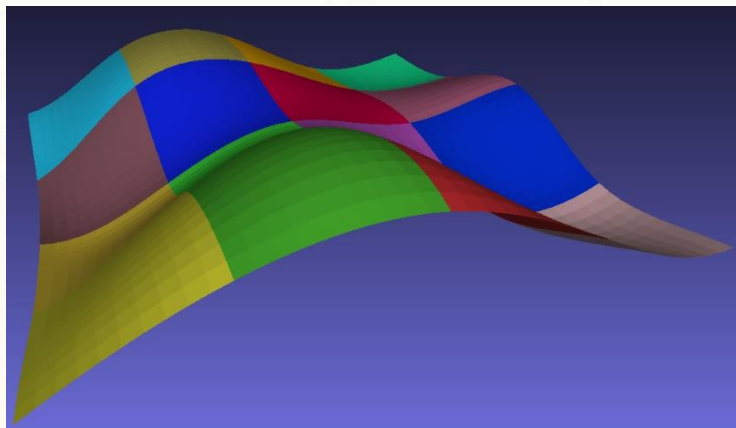
$$P_{3,0} = \frac{1}{36} A_{1,0} + \frac{1}{36} A_{1,2} + \frac{1}{36} A_{3,0} + \frac{1}{36} A_{3,2} + \frac{1}{9} A_{1,1} + \frac{1}{9} A_{2,0} + \frac{1}{9} A_{2,2} + \frac{1}{9} A_{3,1} + \frac{4}{9} A_{2,1},$$

$$P_{3,1} = \frac{1}{18} A_{1,2} + \frac{1}{18} A_{3,2} + \frac{1}{9} A_{1,1} + \frac{1}{9} A_{3,1} + \frac{2}{9} A_{2,2} + \frac{4}{9} A_{2,1},$$

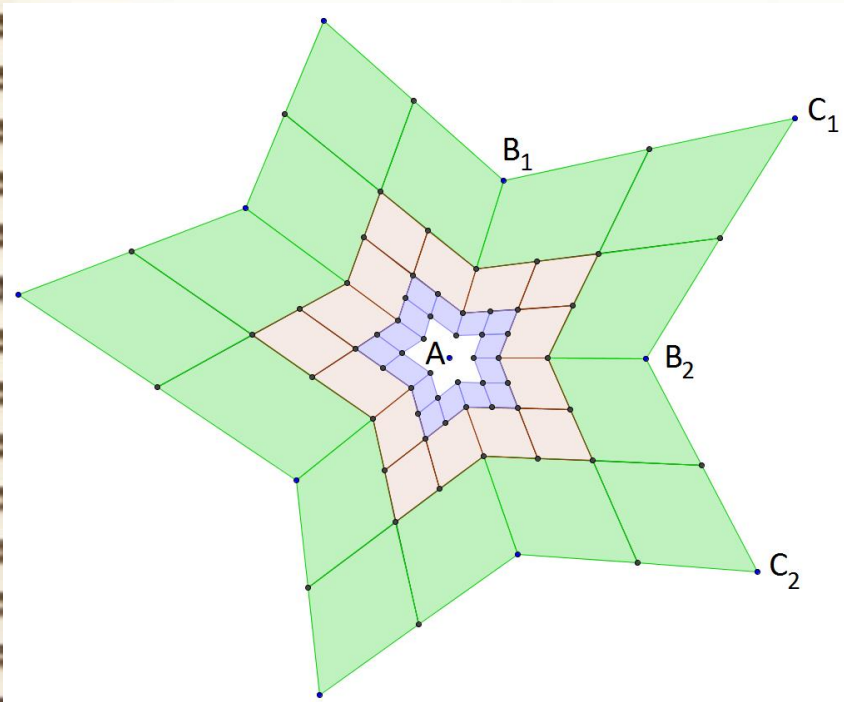
$$P_{3,2} = \frac{1}{18} A_{1,1} + \frac{1}{18} A_{3,1} + \frac{1}{9} A_{1,2} + \frac{1}{9} A_{3,2} + \frac{2}{9} A_{2,1} + \frac{4}{9} A_{2,2},$$

$$P_{3,3} = \frac{1}{36} A_{1,1} + \frac{1}{36} A_{1,3} + \frac{1}{36} A_{3,1} + \frac{1}{36} A_{3,3} + \frac{1}{9} A_{1,2} + \frac{1}{9} A_{2,1} + \frac{1}{9} A_{2,3} + \frac{1}{9} A_{3,2} + \frac{4}{9} A_{2,2}.$$

C2 paviršiaus konstravimas iš Bezjė paviršių. Pavyzdžiai



Bezjė paviršių konstravimas ypatingųjų taškų aplinkoje



Naudojamos šios kaukės paviršių dalinimui.

Naujo taško koordinatės viršūnės vietoje:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Naujo taško koordinatės briaunos vietoje:

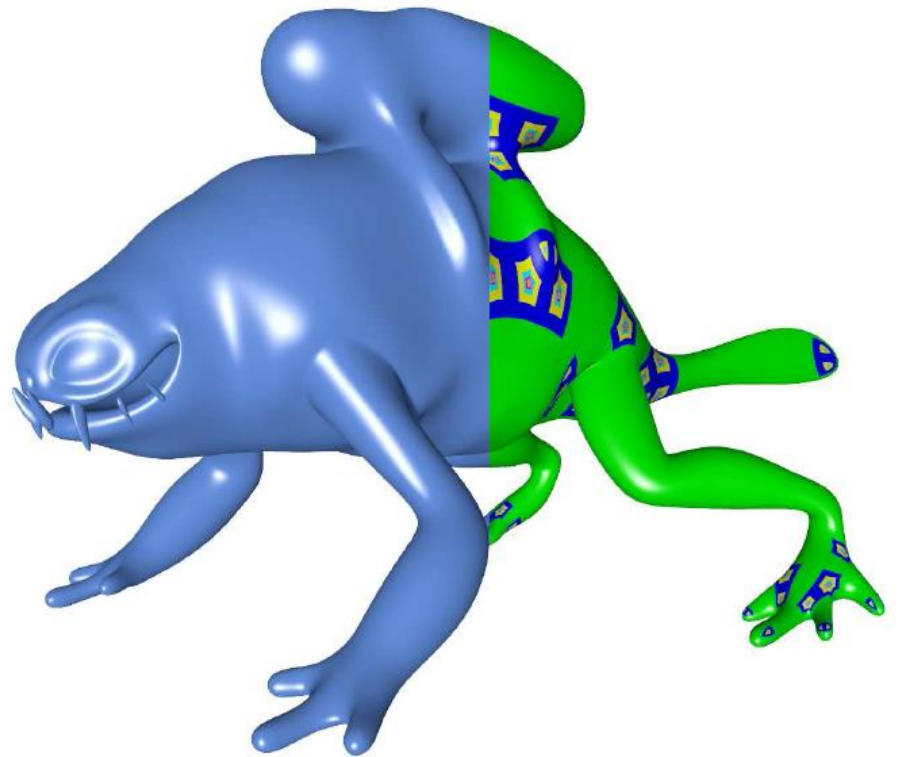
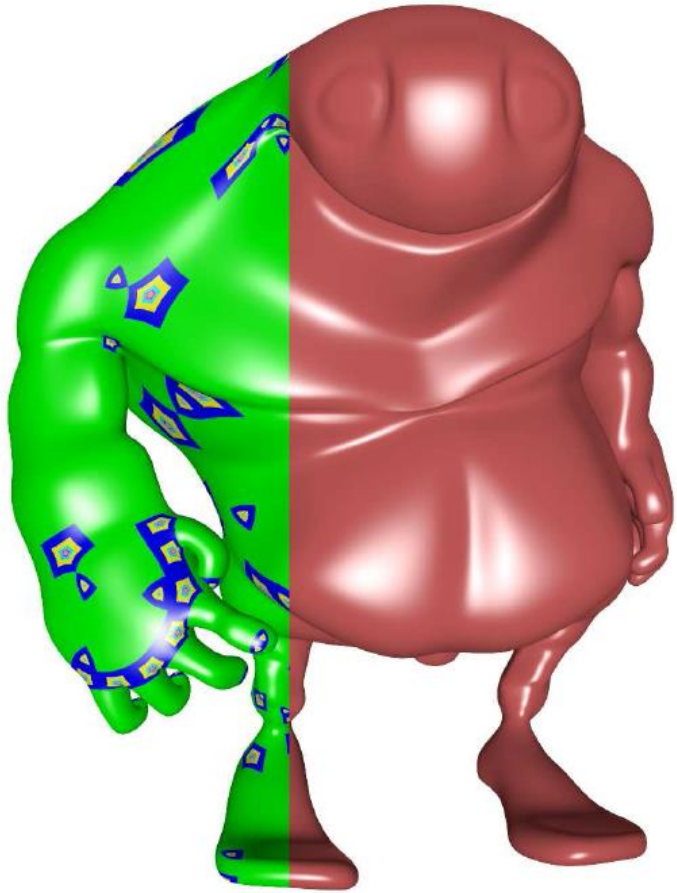
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Naujo taško koordinatės sienos vietoje:

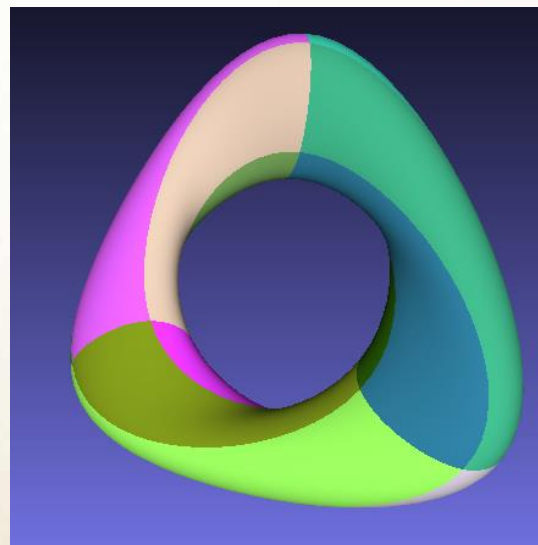
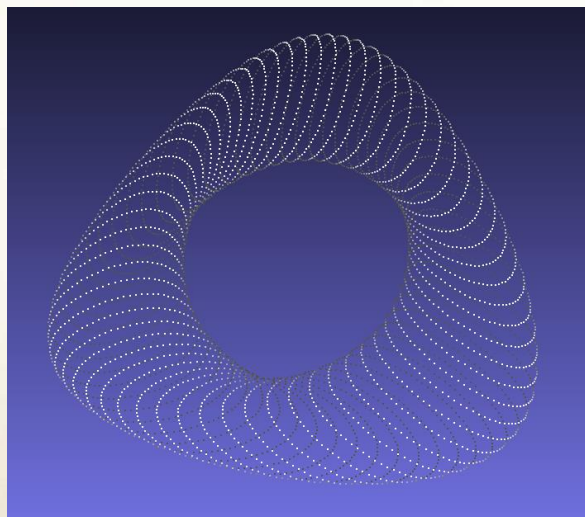
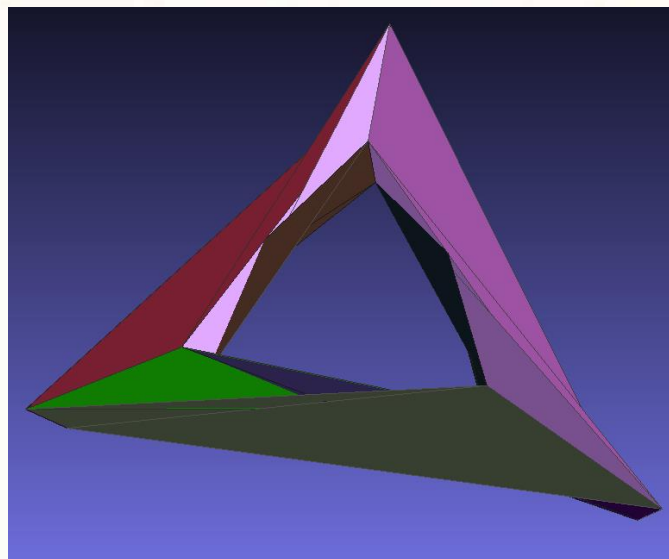
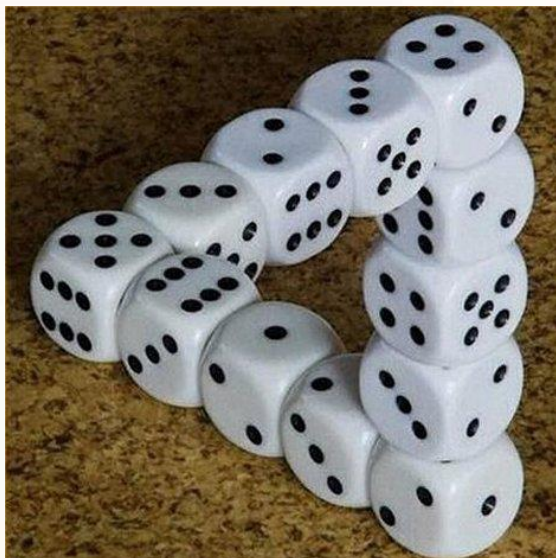
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{64} & \frac{3}{32} & \frac{1}{64} \\ \frac{3}{32} & \frac{9}{16} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{64} & \frac{3}{32} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

$$centras = \frac{n}{n+2}A + \frac{4n}{n(n+5)} \sum_{i=1}^n B_i + \frac{1}{n(n+5)} \sum_{i=1}^n C_i$$

Pavyzdžiai



„Nejmanomas“ trikampis



Ačiū už dėmesį.