Duomenų struktūros ir algoritmai

11 paskaita

2020-04-22

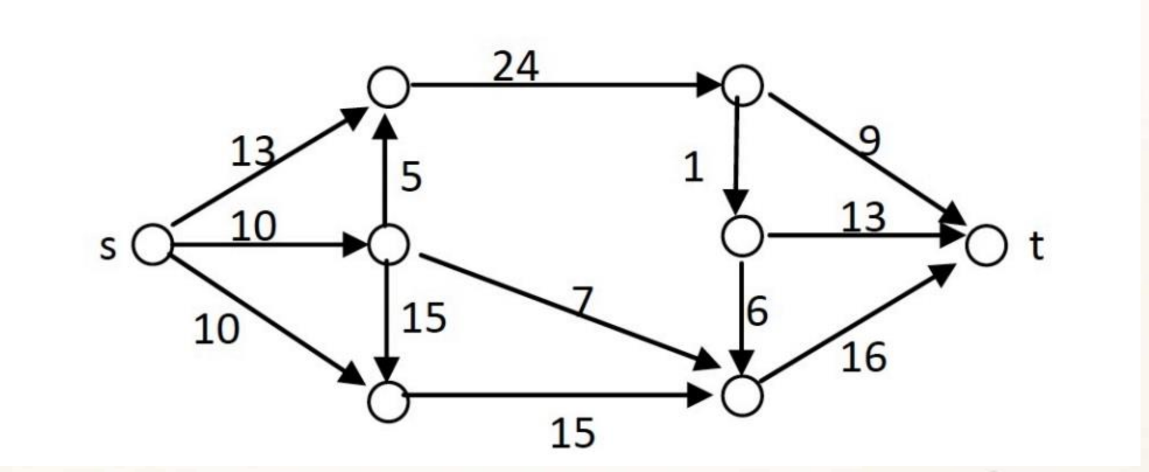
11 paskaitos tikslas

Susipažinti su maksimalaus srauto paieškos algoritmais:

- Fordo ir Fulkersono metodas,
- Edmondso–Karpo algoritmas,
- Priešsraučio stūmimo algoritmas,
- Maksimalaus srauto paieškos taikymai:
  - Maksimalus dvidalis suporavimas,
  - Ištrūkimo uždavinys (*angl. escape problem*).

Srautai tinkluose

- Kas yra **srautas** ir kas yra **tinklas**?
- Tarkime, turime jungųjį digrafą G = (V, E), kuriame išskirtos šaltinio s ∈ V ir tikslo viršūnės t ∈ V:



- Jei tokiame digrafe apibrėžta talpos funkcija $c : E \to R^+$ arba jos apibrėžimo sritis išplėsta $V \times V$, kai $c(uv) = 0$, jei $uv \notin E$, tai toks digrafas dar vadinamas *tinklu*.

Srautai tinkluose

- **Apibrėžimas.** Srautu tinkle $G = (V, E)$ vadinama funkcija

$f : V \times V \to R$, jei tenkinamos tokios sąlygos:

1) $f(uv) \le c(uv)$,
2) $f(uv) = -f(vu)$,
3) kiekvienai $u \in V \setminus \{s, t\}$ teisinga sąlyga

$$\sum_{v \in V} f(uv) = 0.$$

- 3 sąlyga dar vadinama *Kirchhofo* aksioma.
- Srauto didumu vadinamas dydis

$$|f| = \sum_{v \in V} f(sv) = \sum_{v \in V} f(vt).$$

Maksimalaus srauto uždavinys

- Tinkle G = (V, E), kuriame išskirtos šaltinio s ir tikslo viršūnės t, rasti srautą f, kurio dydis būtų maksimalus.

Apibendrintas maksimalaus srauto uždavinys

- Tinkle G = (V, E), kuriame išskirtos šaltinio s_1, ..., s_k ir tikslo viršūnės t_1, ..., t_r, rasti srautą f, kurio dydis būtų maksimalus.
- Tokiu atveju, įvedus papildomą šaltinį s ir tikslo viršūnę t ir briaunas ss_i, t_jt bei apibrėžus $c(ss_i) = \infty$ ir $c(t_jt) = \infty$, užtenka spęsti pirmąjį uždavinį.

Fordo ir Fulkersono metodas (1956)

- Šio metodo idėja – nuolat ieškoti galimo srauto nuo šaltinio iki tikslo viršūnės, kiek galima didinti srautą.
- Pradedant $f = 0$ ir radus taką $p : s \Rightarrow t$, tiesioginėse tako briaunose srautas didinamas, o priešingų krypčių (netiesioginėse) briaunose srautas mažinamas.
- Tokį srautą take p galima padidinti *talpa* $c(p)$:

$$c(p) := \min\{c(uv) : uv \in p\}.$$

- Kai $c(p) > 0$, takas p vadinamas auginančiu srautą.

Diskusijai:

- Kuo skiriasi algoritmas nuo metodo?

Fordo ir Fulkersono metodas (1956)

- G – jungusis svorinis digrafas (tinklas), s – šaltinio viršūnė, t – tikslo viršūnė.
- Algoritme daug kartų iškviečiama procedūra F–F (G, s, t).

  F–F (G, s, t):

  1. f ← 0
  2. **while** egzistuoja srautą auginantis takas p
  3. **do** „augink f take p"
  4. **return** f

- Realizuojant šią idėją paranku naudotis likutiniais tinklais $G_f = (V, E_f)$, $E_f = \{uv \in V \times V : c_f(uv) > 0\}$, kur $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$ yra likutinė talpa.

Maksimalaus srauto ir minimalaus pjūvio savybės

- Jei f yra srautas tinkle $G = (V, E)$ su šaltiniu s ir tikslo viršūne t, tai šie 3 teiginiai yra ekvivalentūs:

1) f yra maksimalus srautas,
2) likutinis tinklas G_f neturi srautą auginančių takų,
3) kažkokiam pjūviui (S, T) turime $|f| = c(S, T)$,

čia $V = S \cup T$ su savybe $s \in S$ ir $t \in T$, $c(S, T)$ – pjūvio talpa, o $f(S, T)$ – srautas, tekantis iš S į T.

- Taip pat teisinga savybė, kad bet kokiam pjūviui $V = S \cup T$ turime $|f| = f(S, T)$.

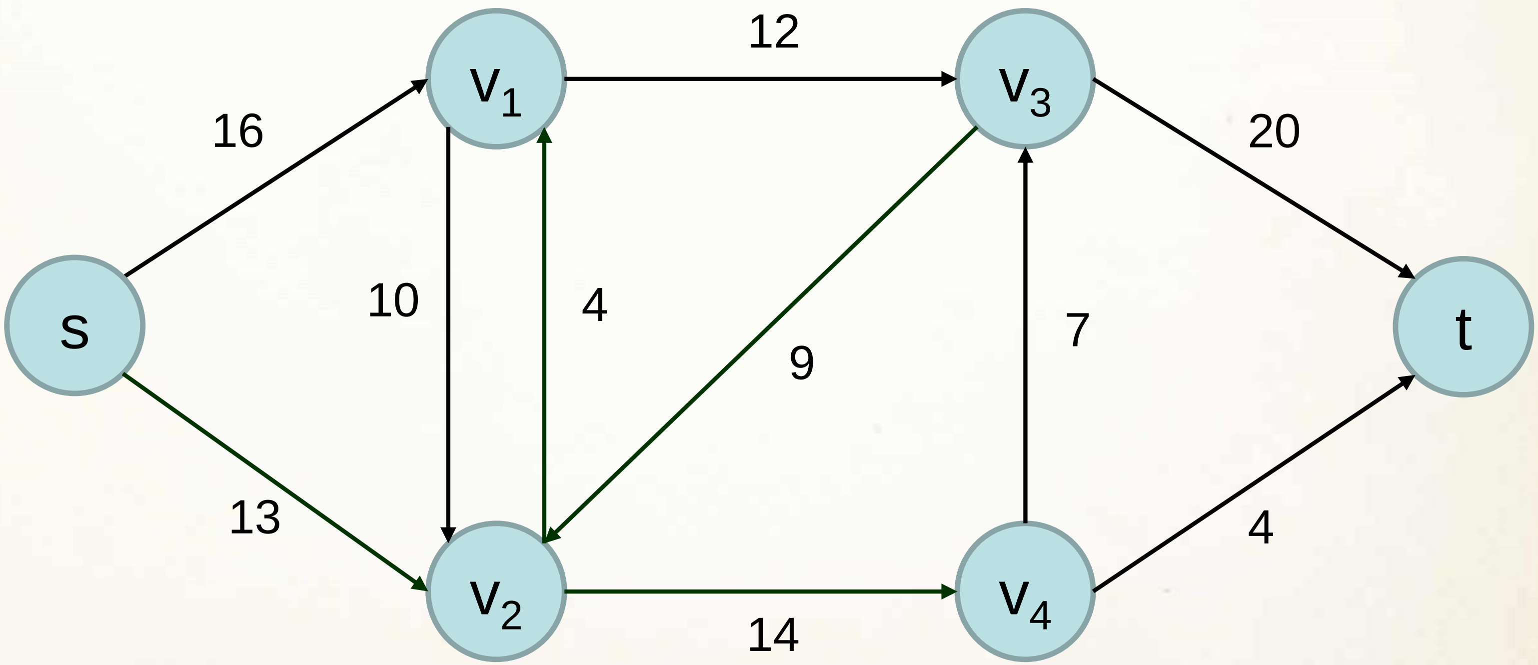
Edmondso–Karpo algoritmas

- Šis algoritmas realizuoja Fordo ir Fulkersono maksimalaus srauto paieškos idėją (metodą).

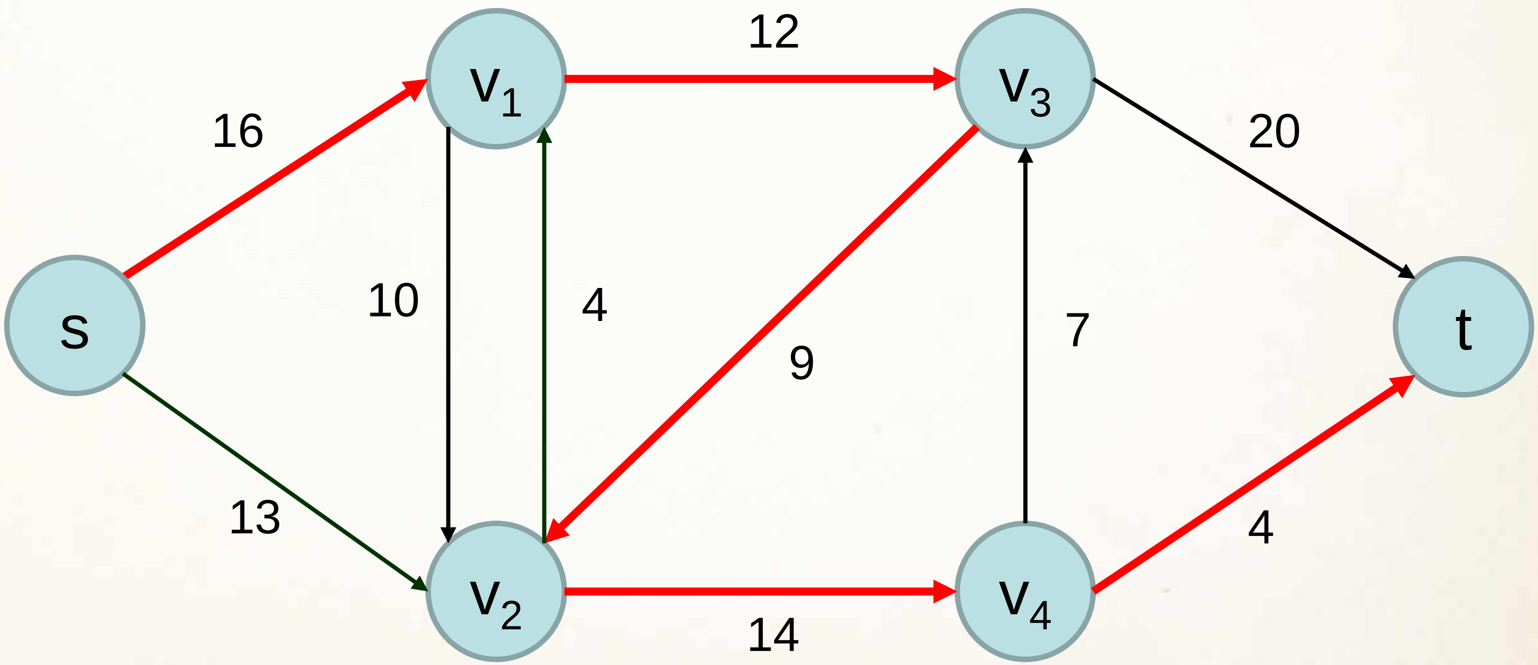
```
F-F-met (G, s, t):
1. for  ∀ uv ∈ E
2.        do  f[uv] ← 0
3.            f[vu] ← 0
4. while egzistuoja auginantis takas p
5.        do c_f(p) ← min{c_f(uv) :  uv ∈ p}
6.            for ∀ uv ∈ p
7.                    do f[uv] ← f[uv] + c_f(p)
8.                        f[vu] ← −f[uv]
END
```

- Algoritmo sudėtingumas $O(|f^*||E|)$, kur f^* – maksimalus srautas.

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (1)

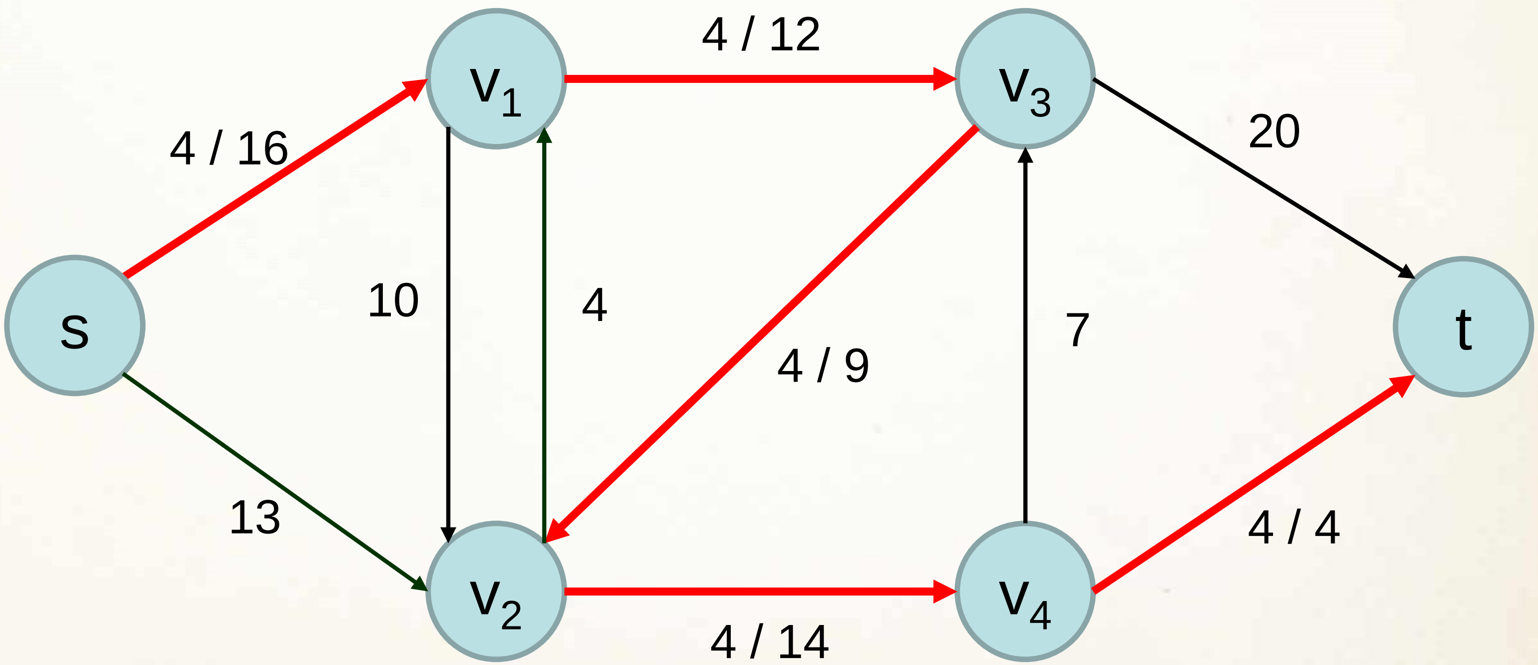


Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (2)



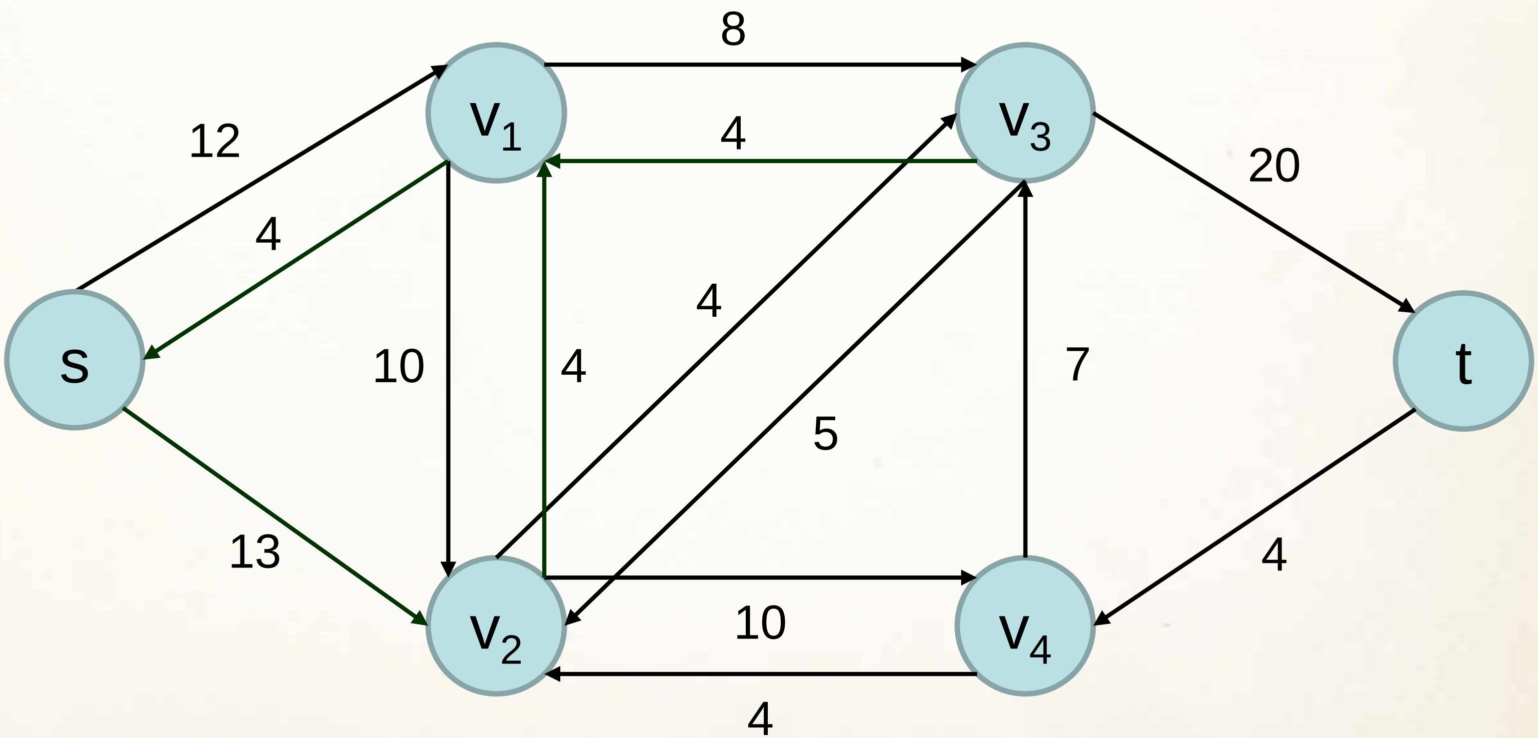
Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (3)

Ženklas „/“ atskiria srautą ir talpą, t. y. f(u, v) / c(u, v).



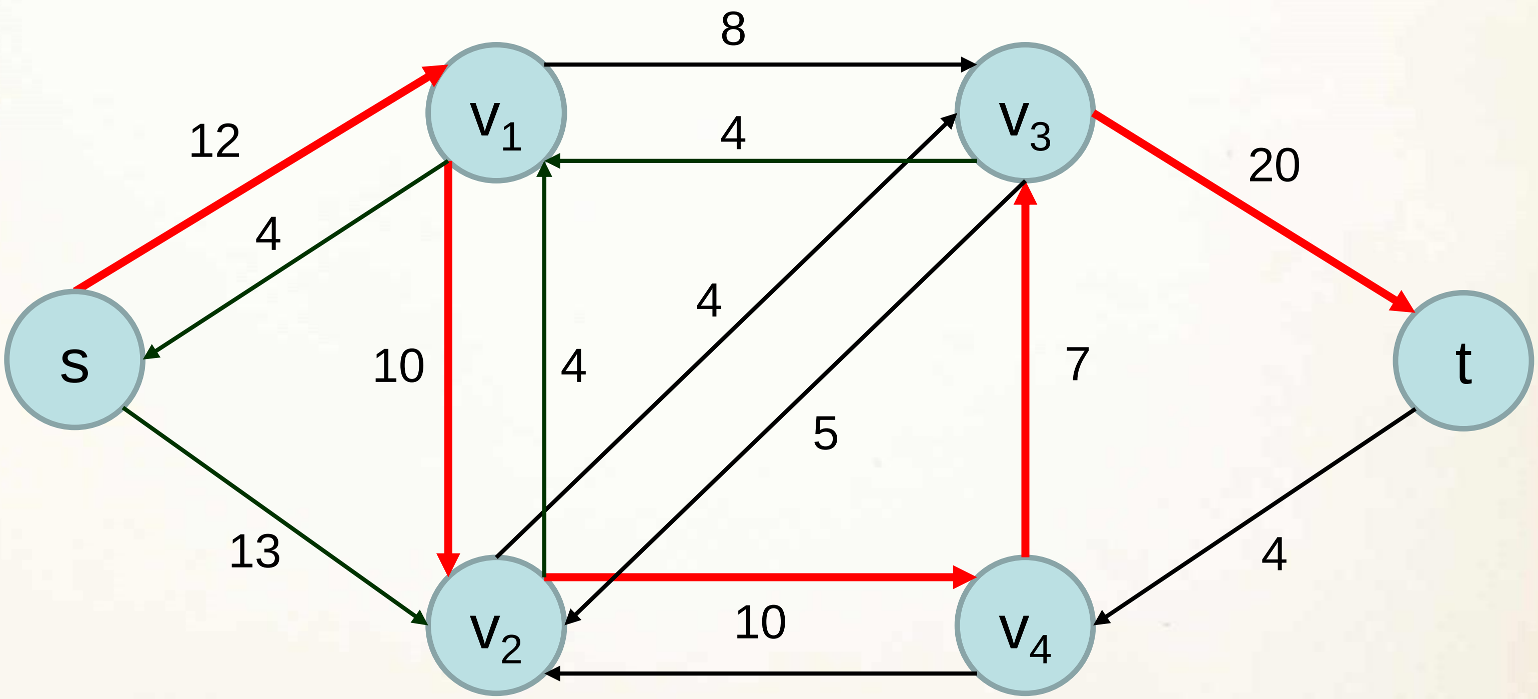
|f| = 4 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (4)



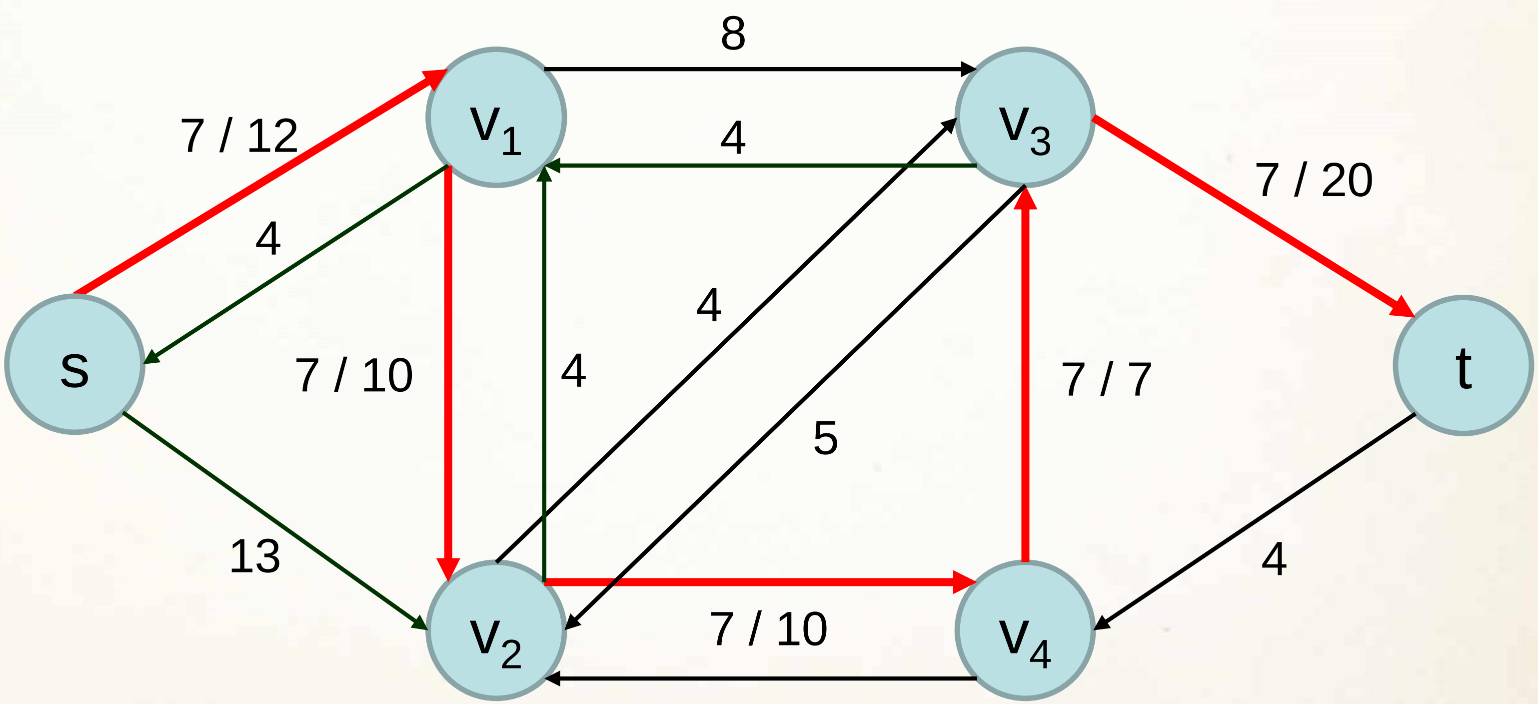
|f| = 4 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (5)



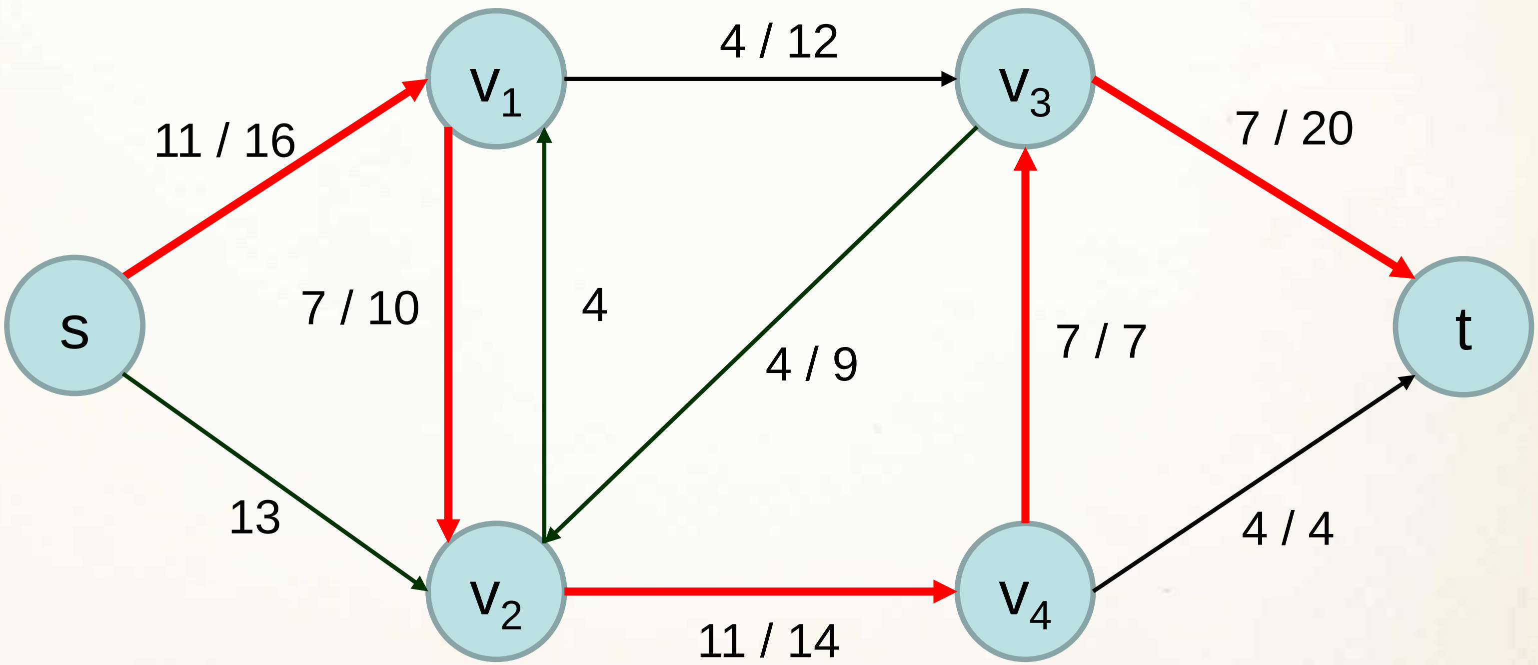
|f| = 4 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (6)



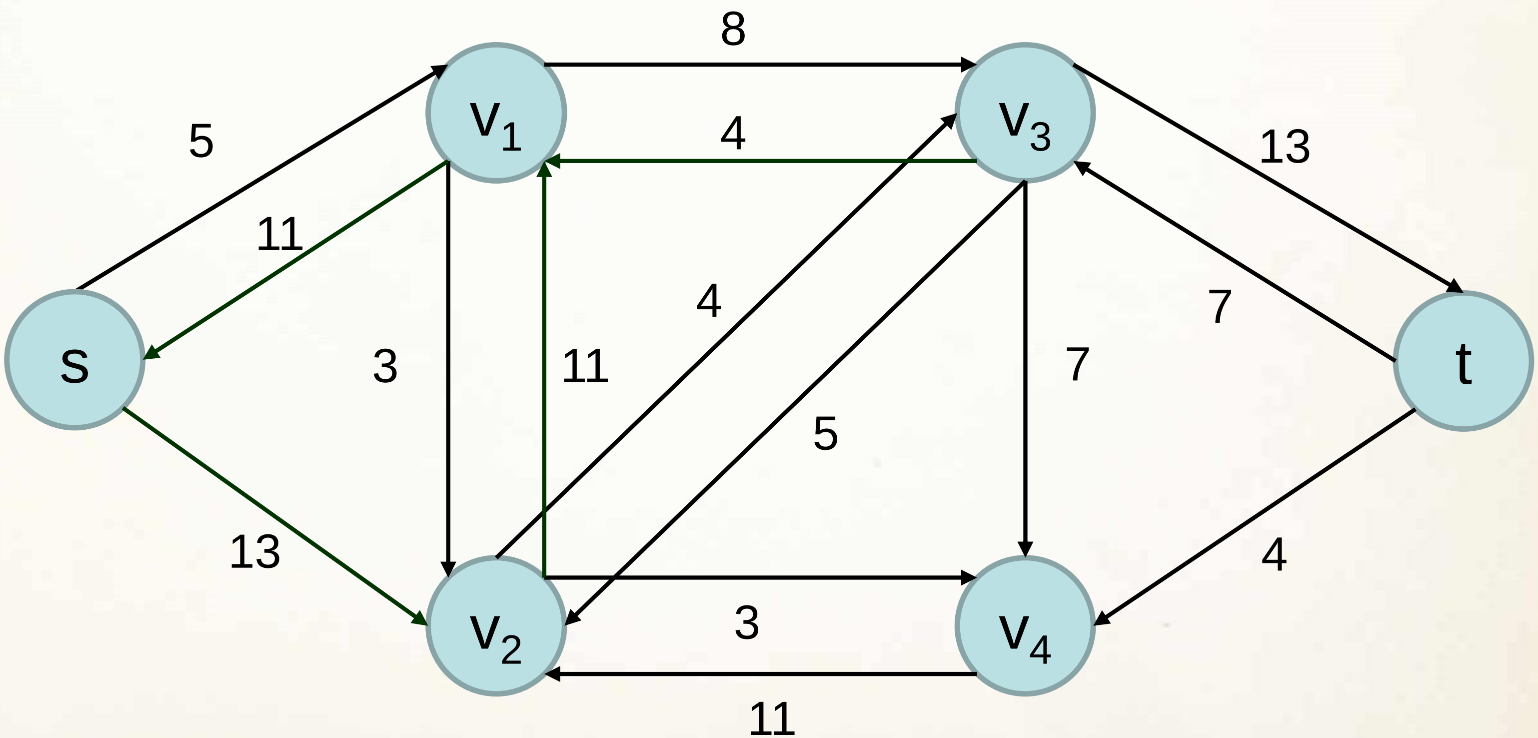
|f| = 4 + 7 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (7)



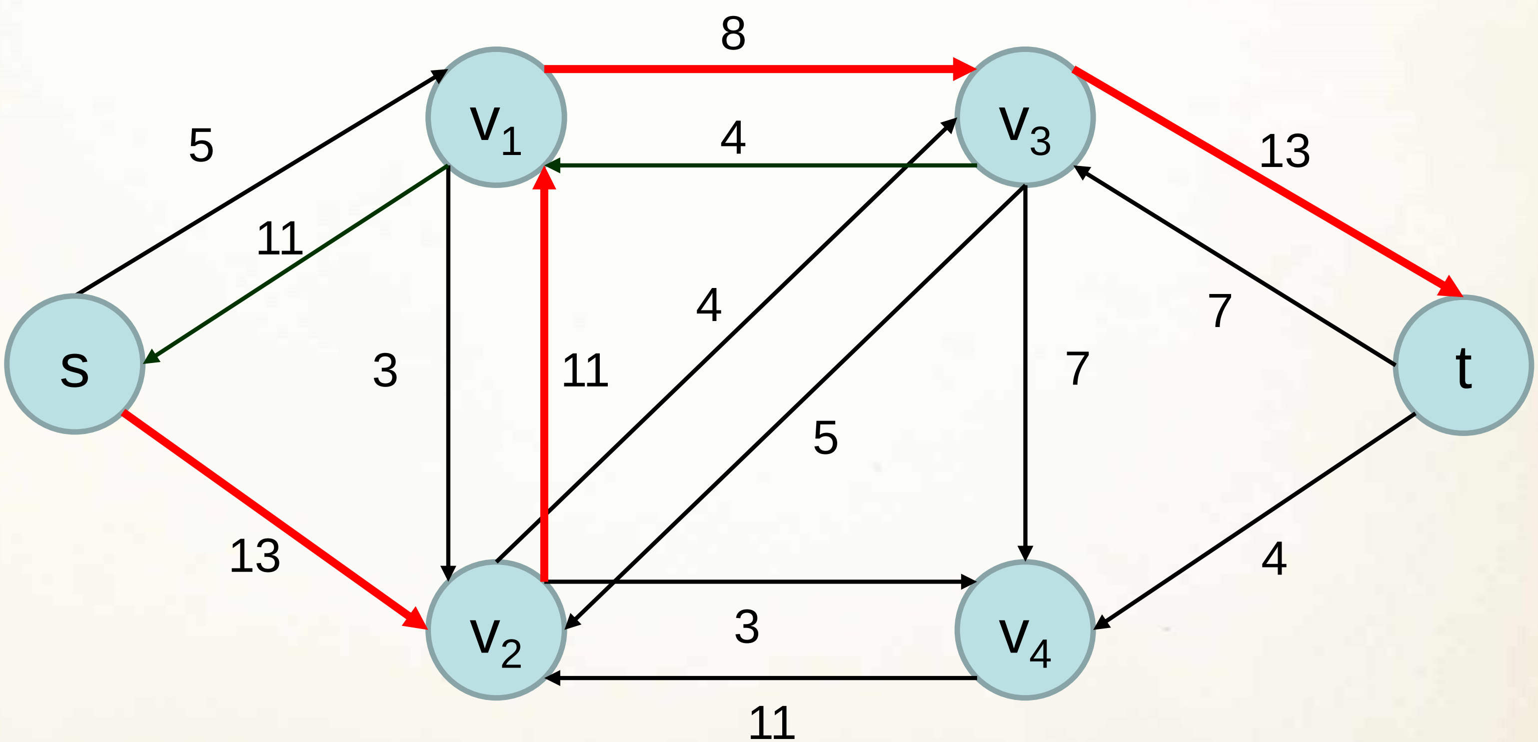
|f| = 4 + 7 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (8)



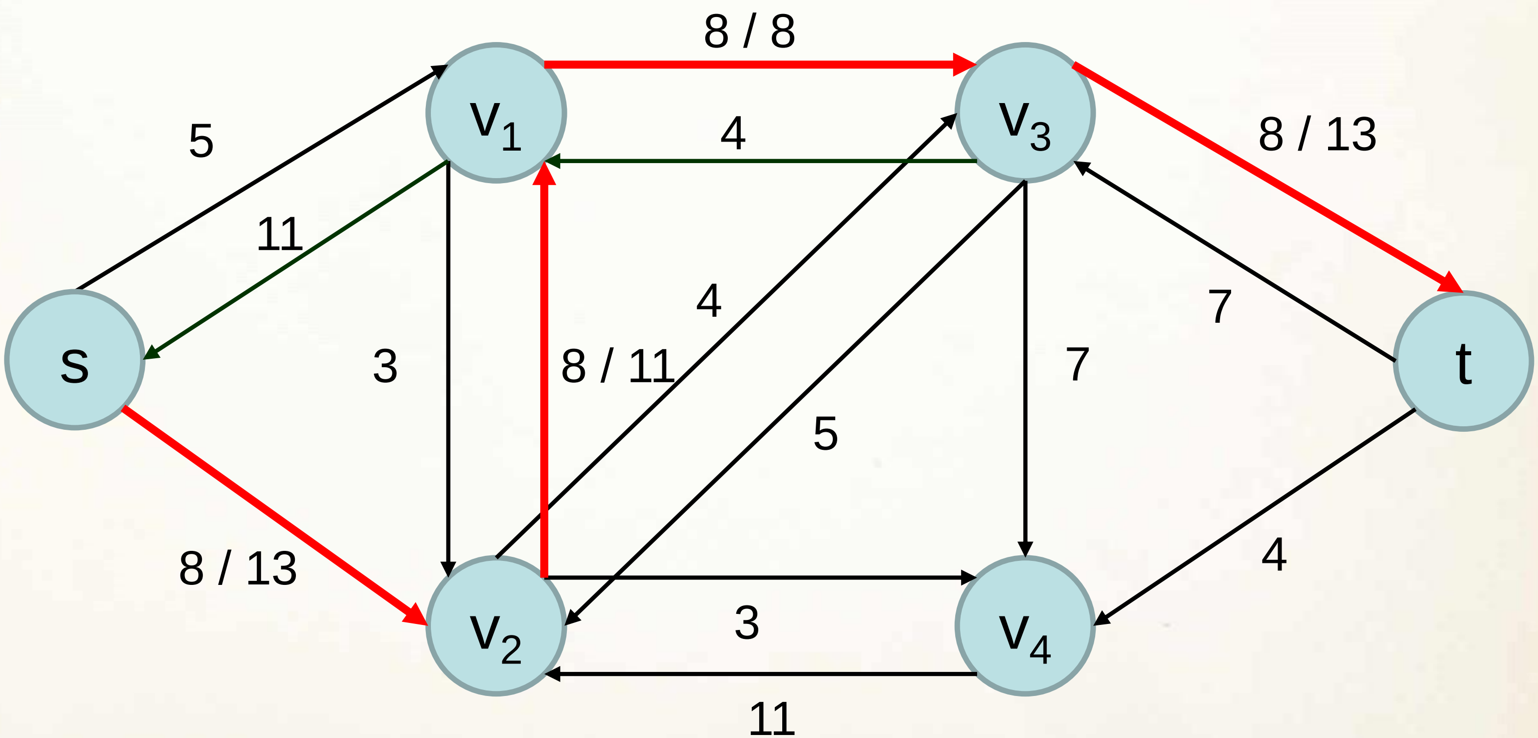
|f| = 4 + 7 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (9)



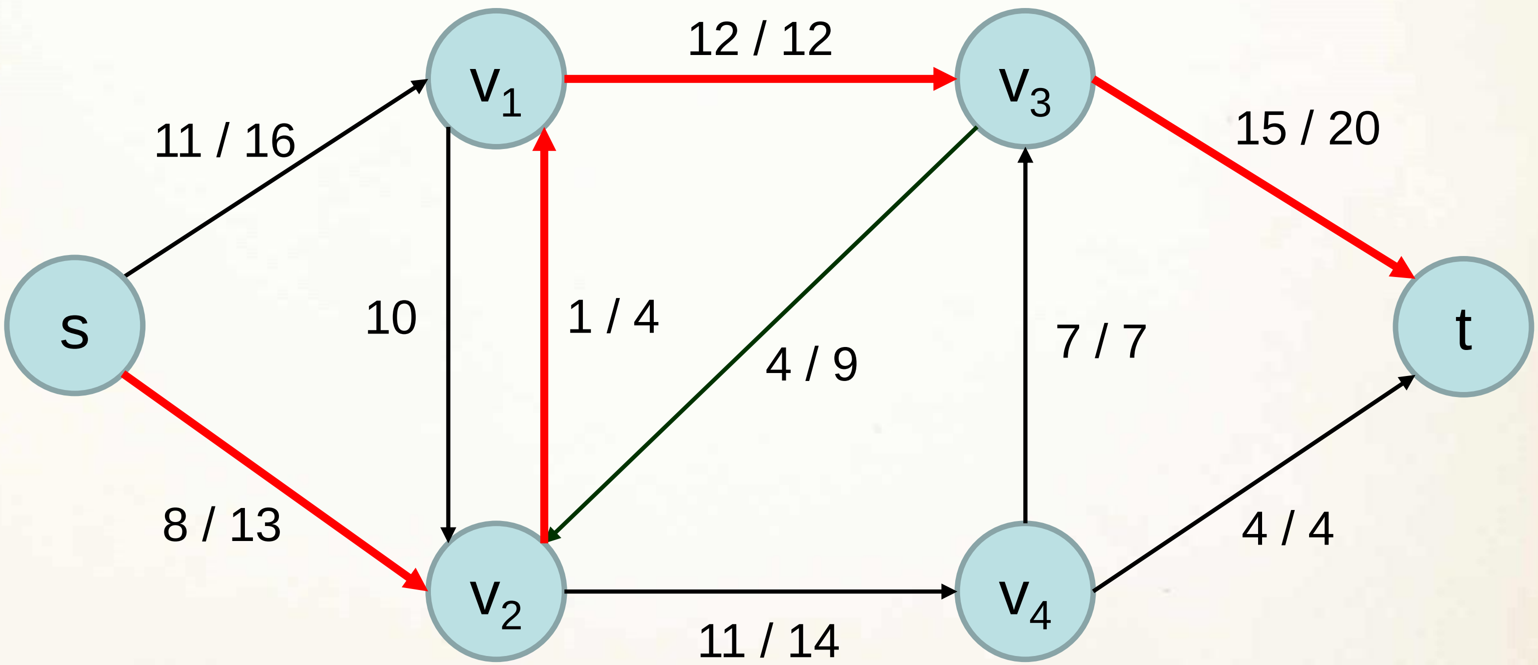
|f| = 4 + 7 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (10)



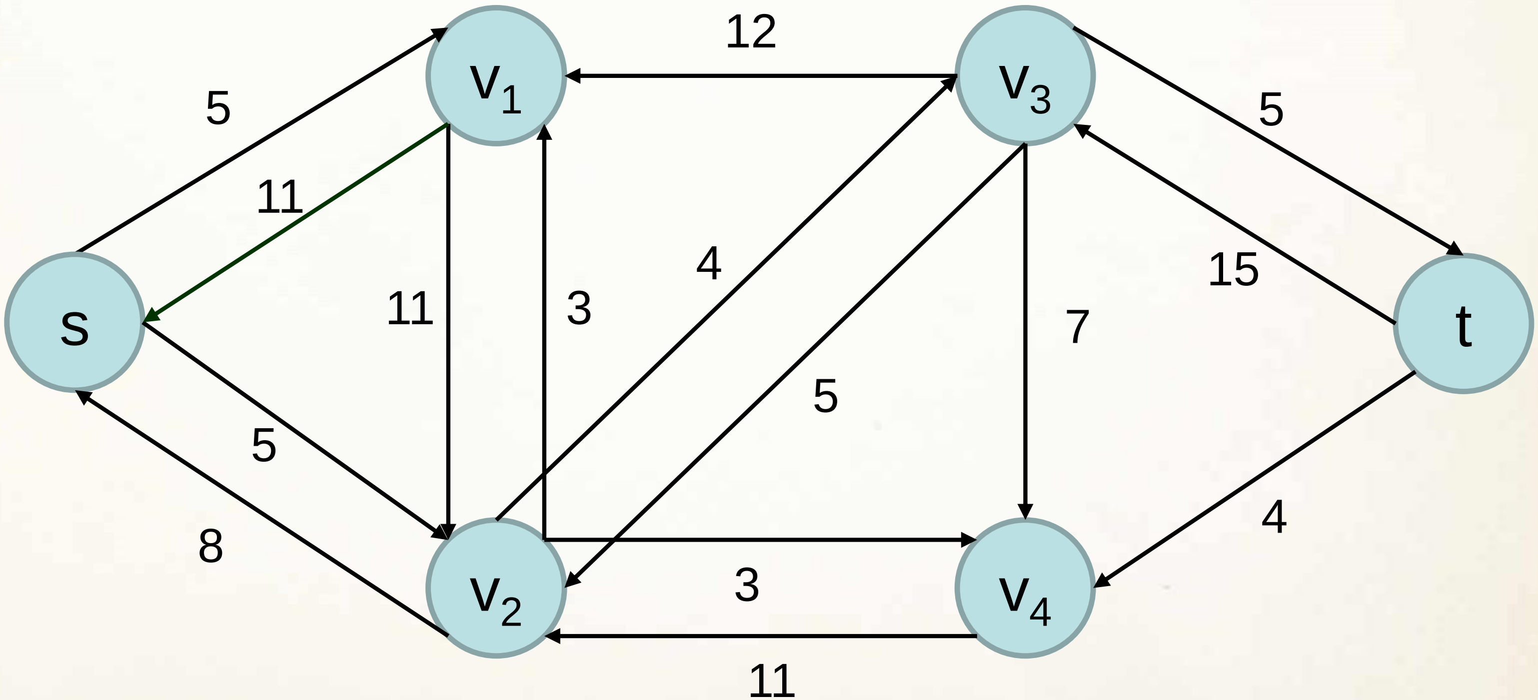
$|f| = 4 + 7 + 8 +$

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (11)



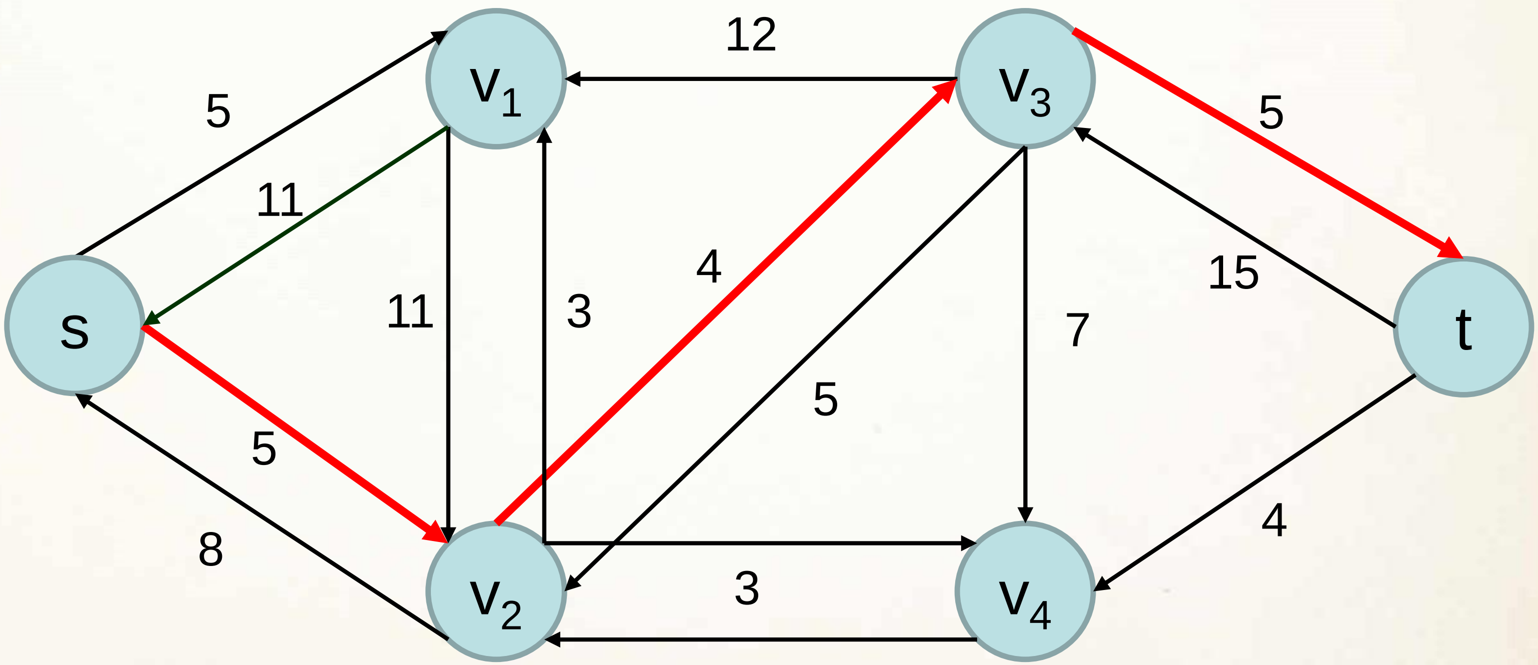
|f| = 4 + 7 + 8 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (12)



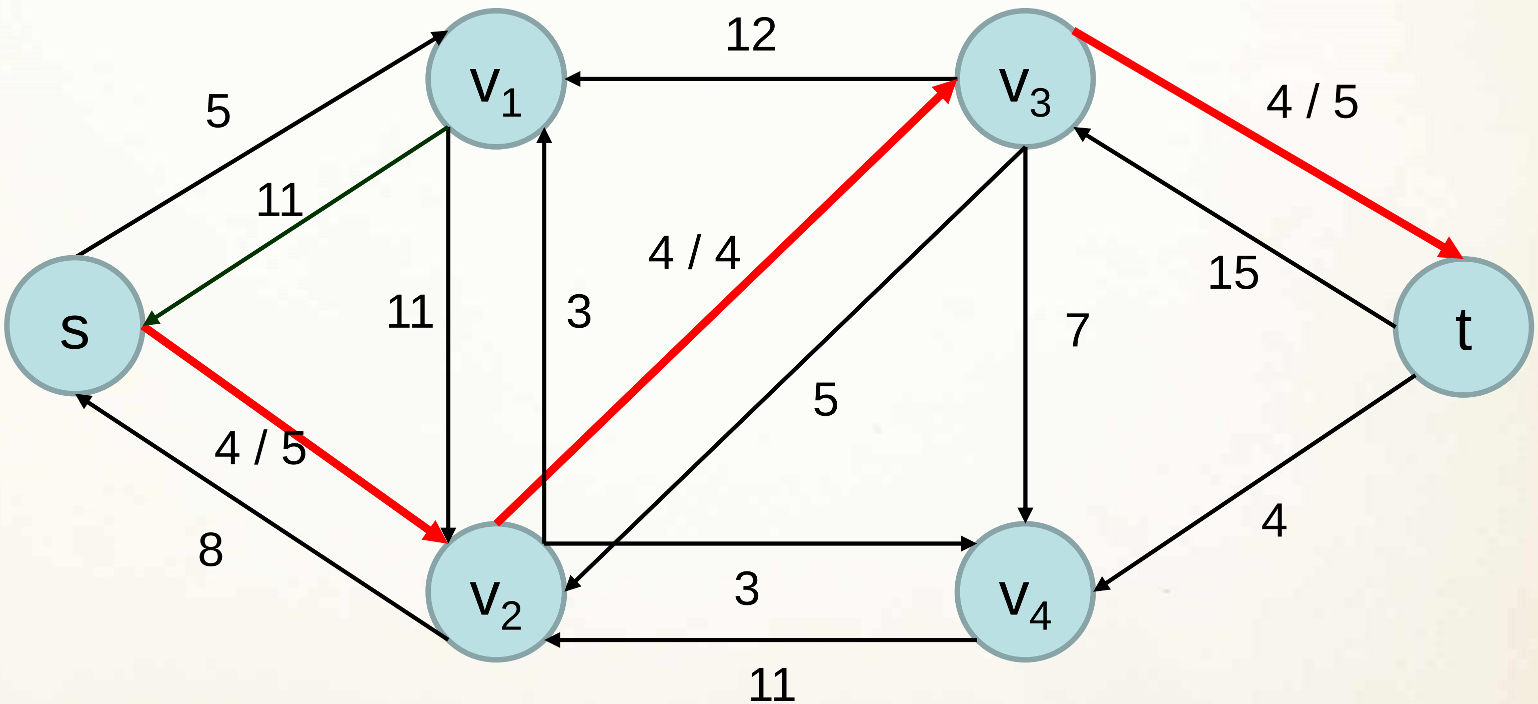
|f| = 4 + 7 + 8 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (13)



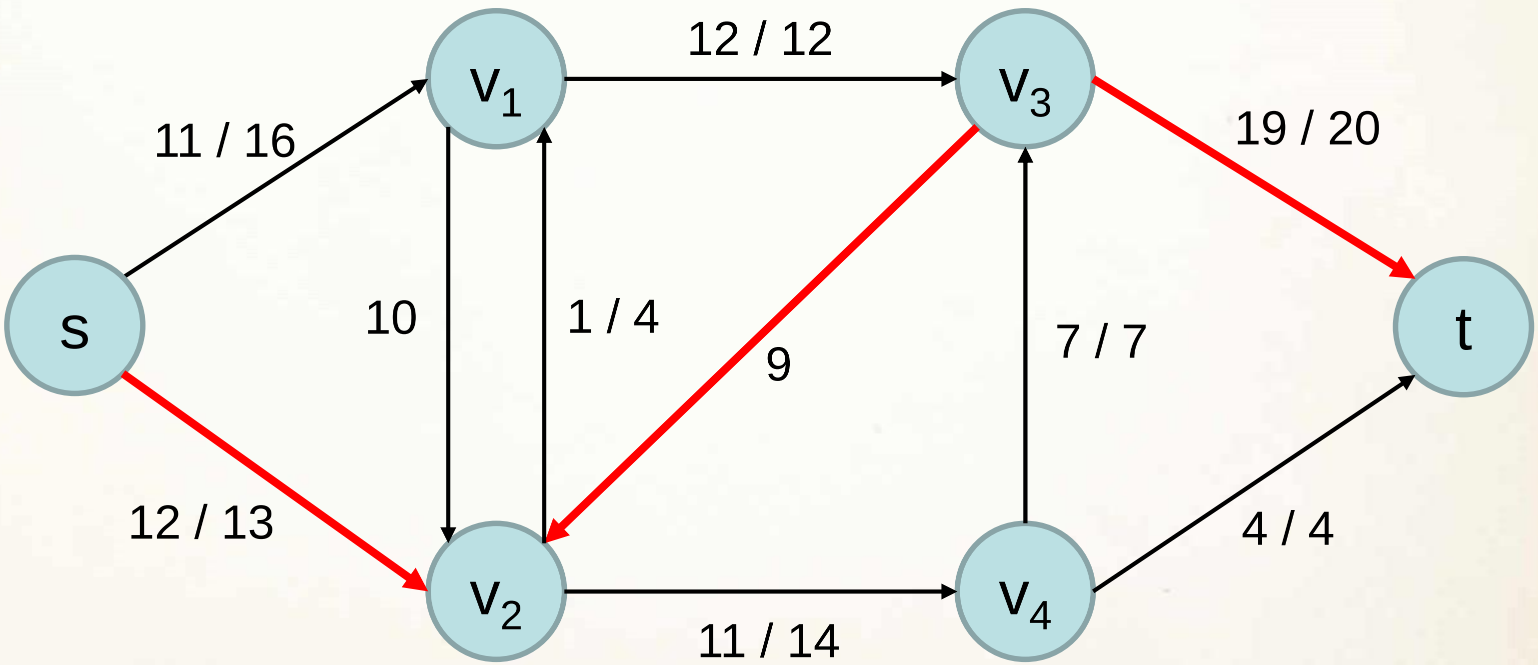
|f| = 4 + 7 + 8 +

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (14)



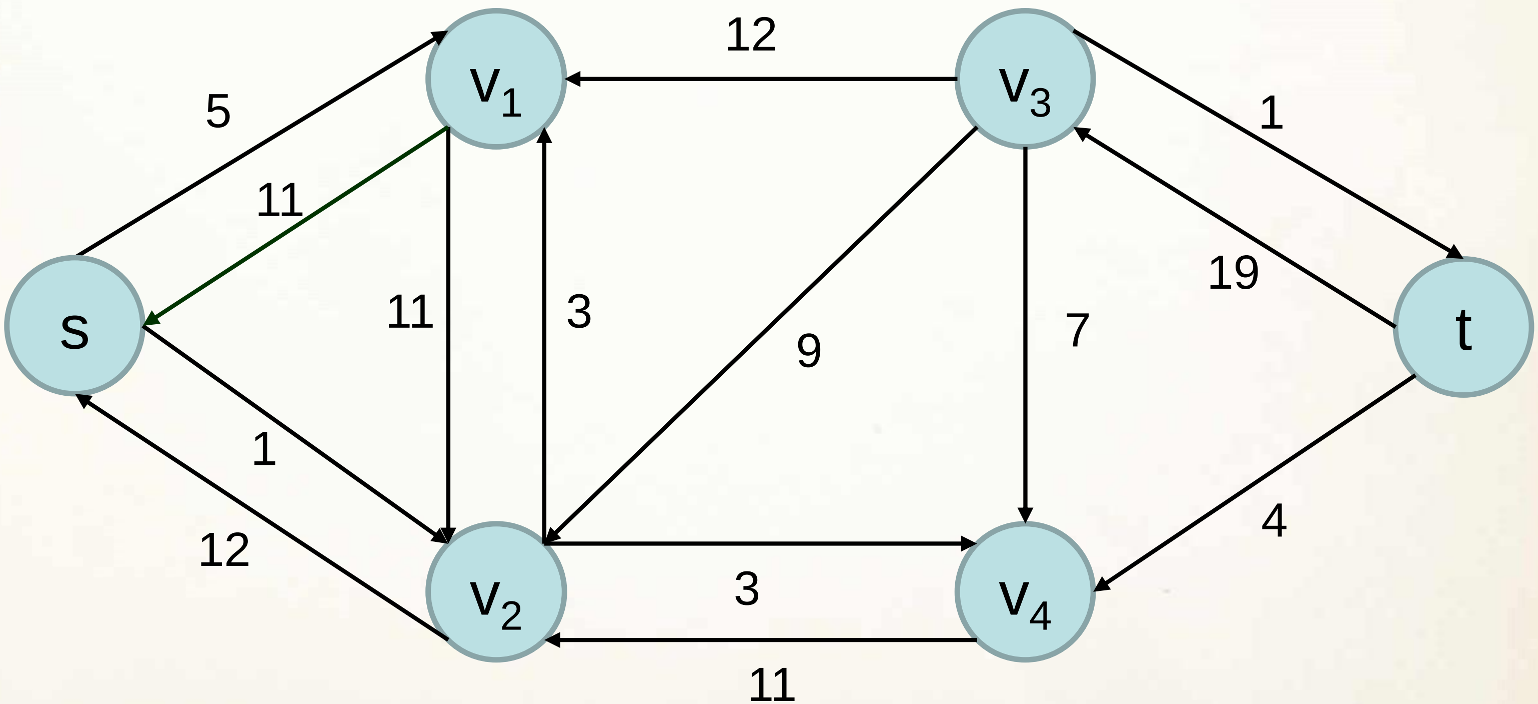
$|f| = 4 + 7 + 8 + 4 = 23$

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (15)



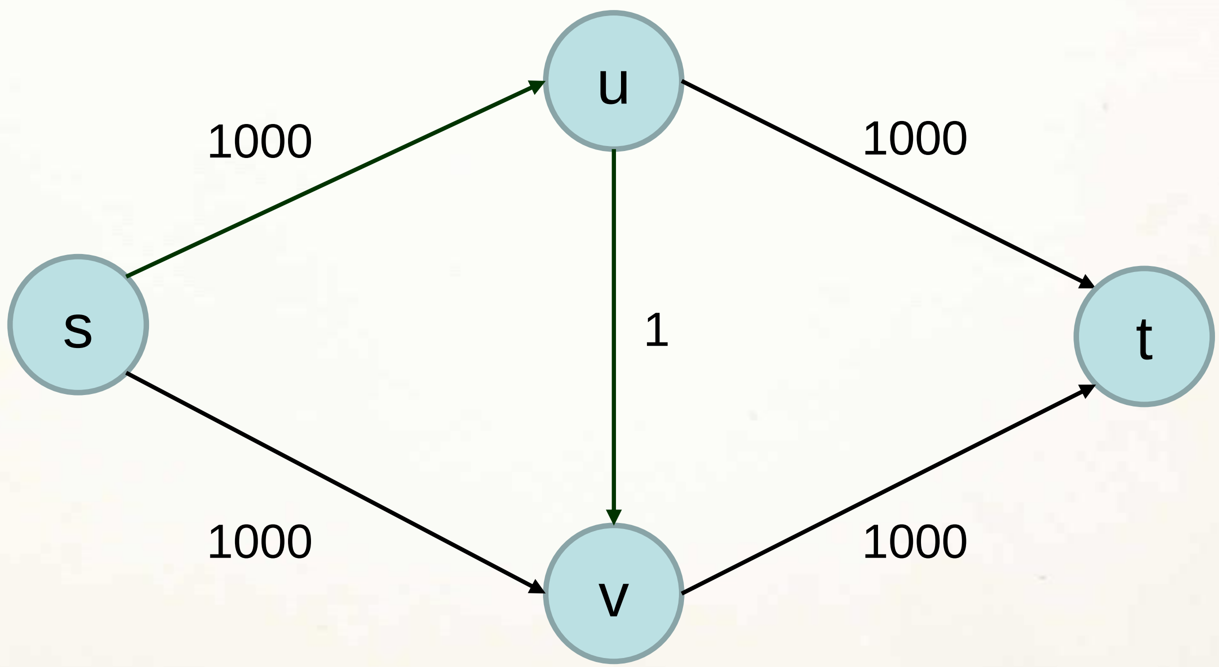
|f| = 23

Edmondso–Karpo algoritmo pavyzdys (16)

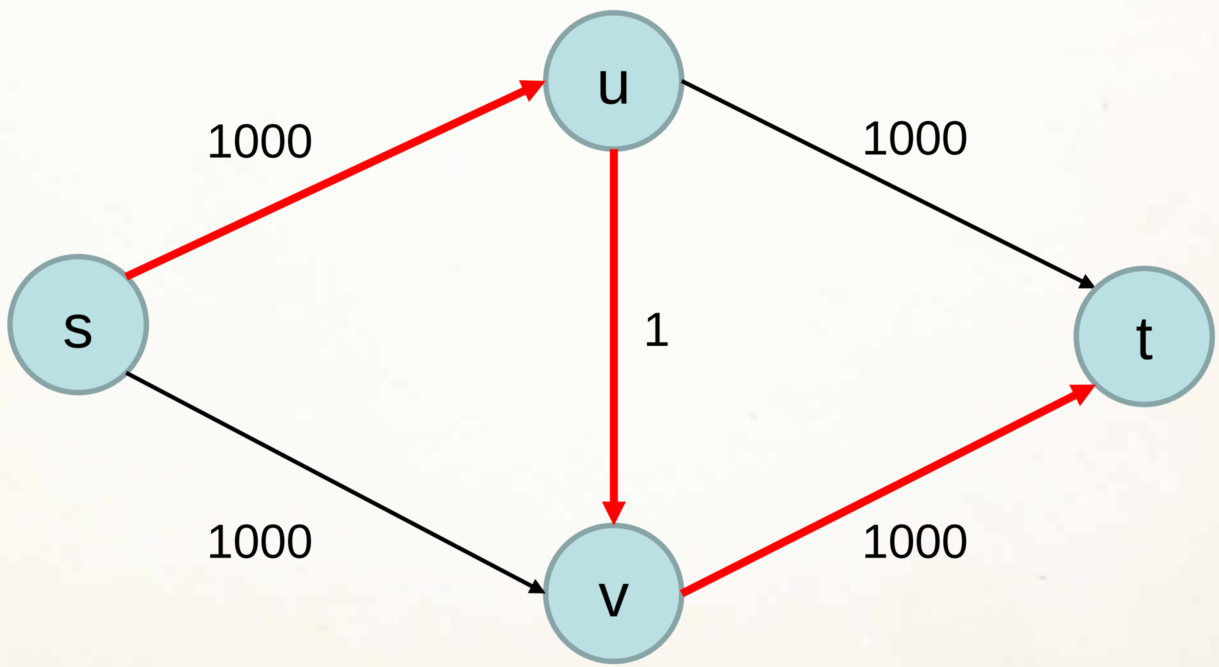


|f| = 23

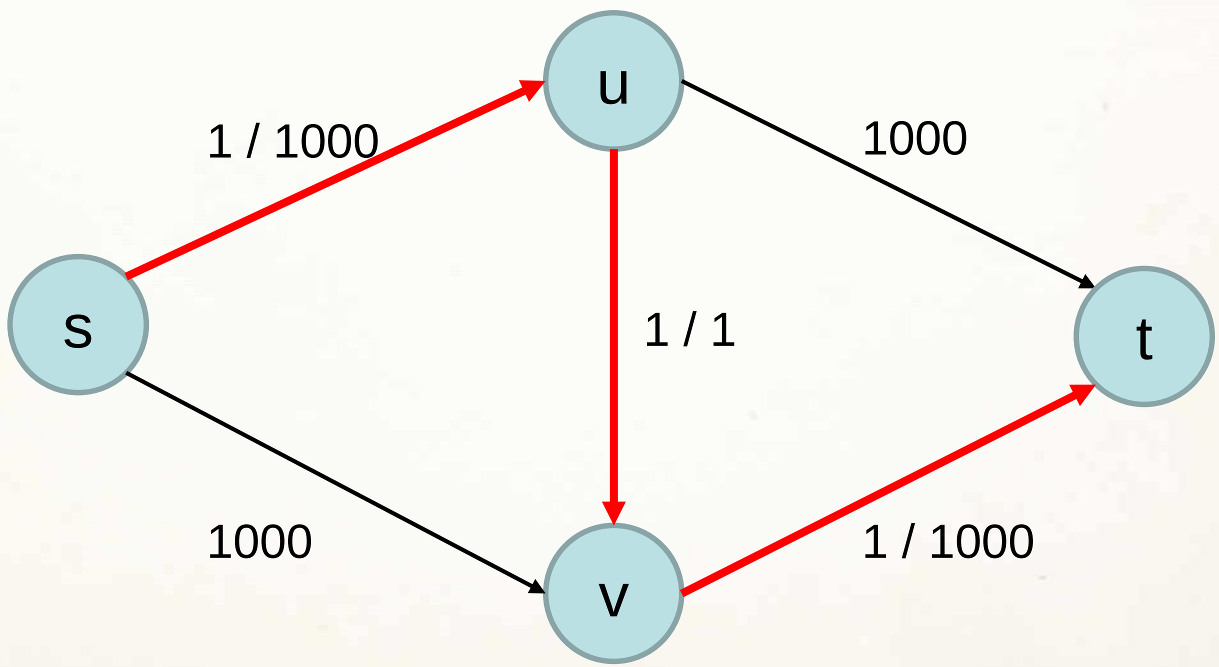
Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



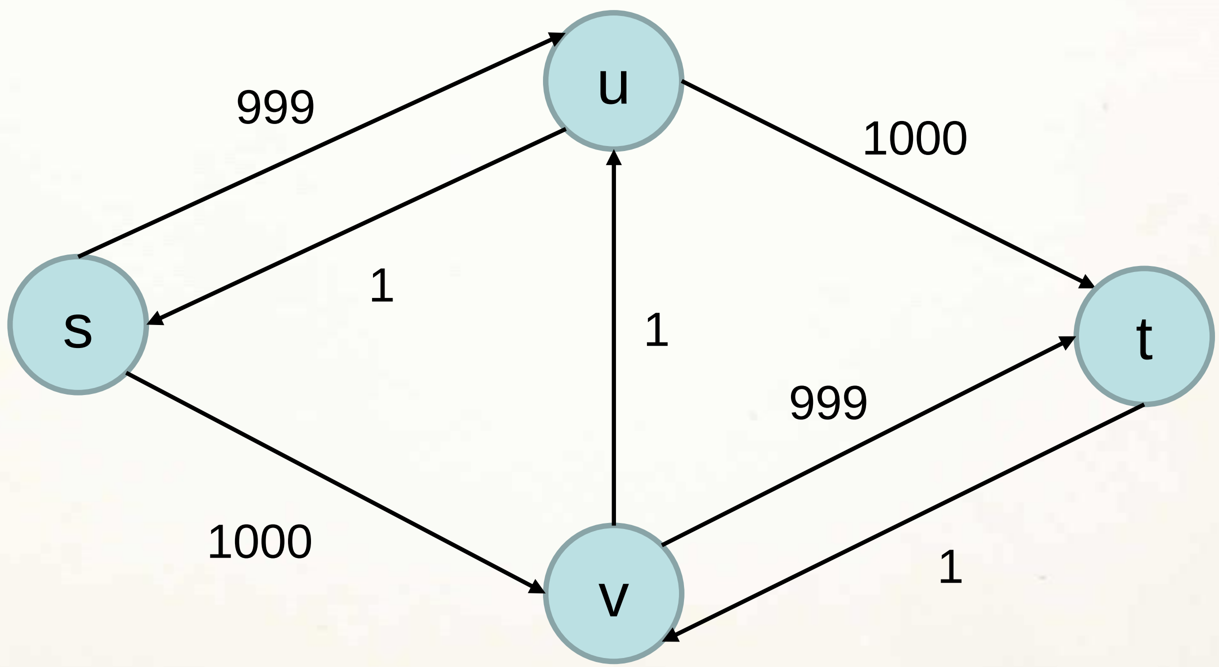
Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



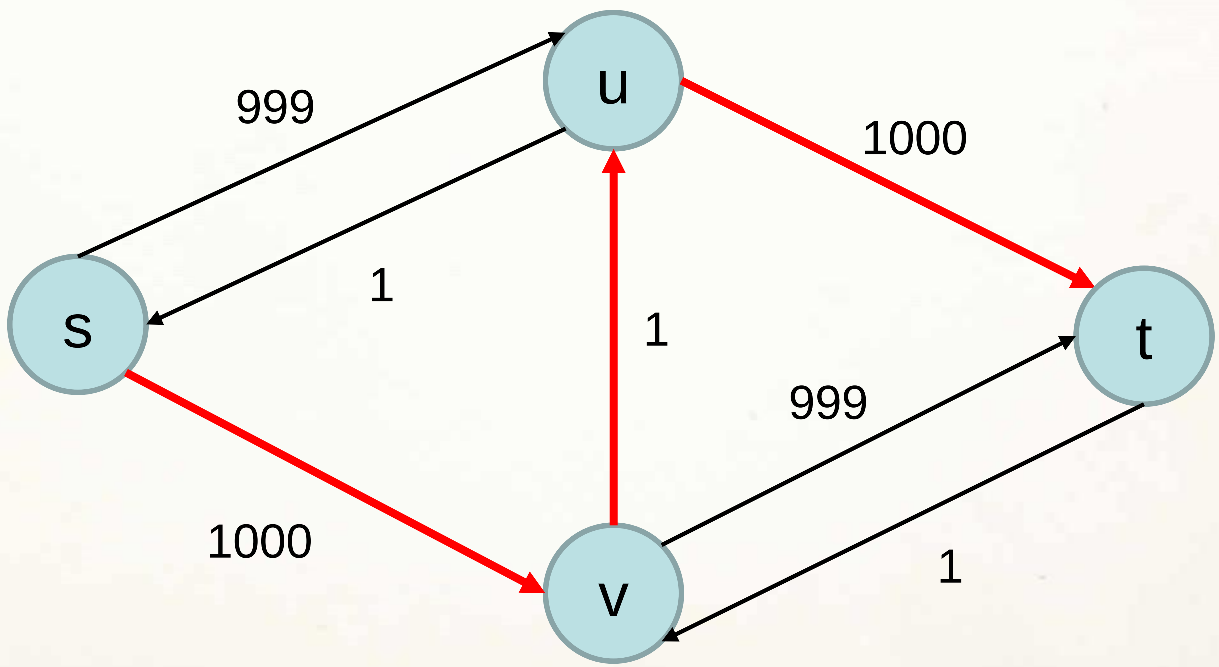
Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



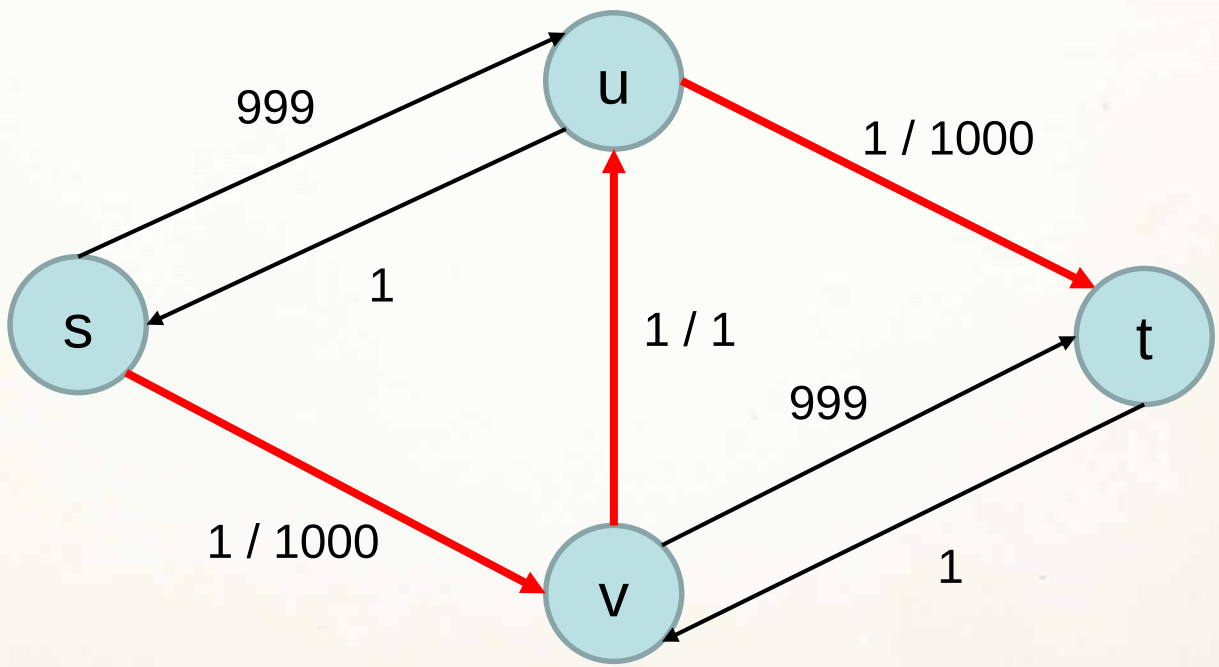
Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



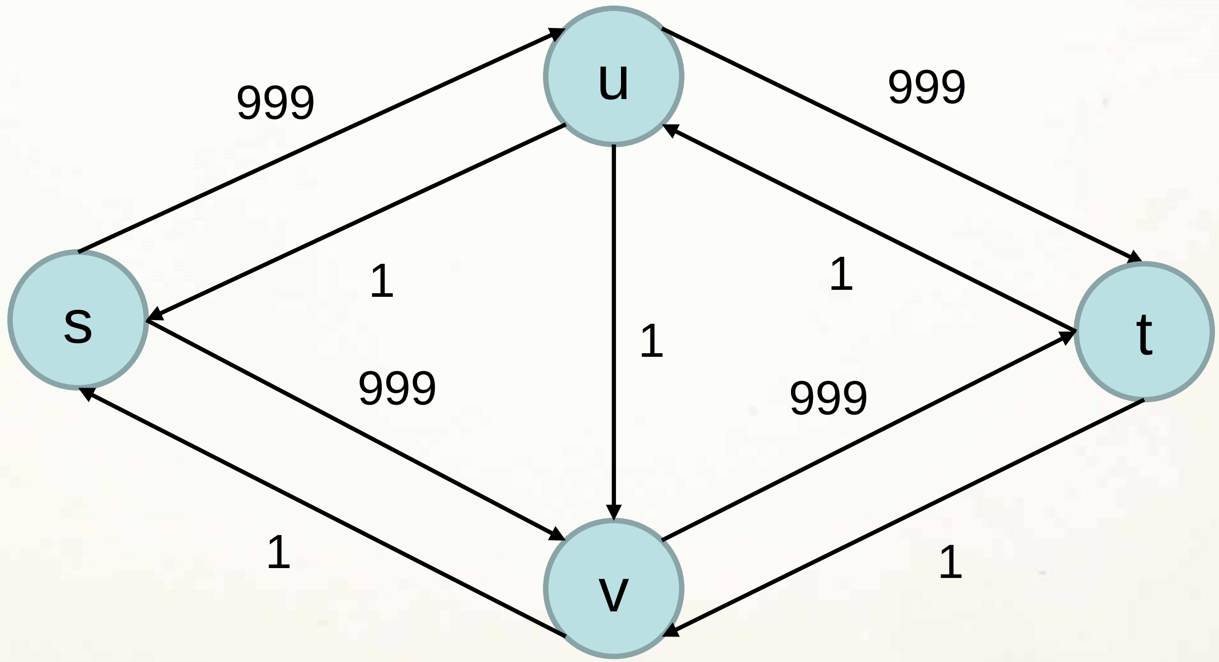
Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



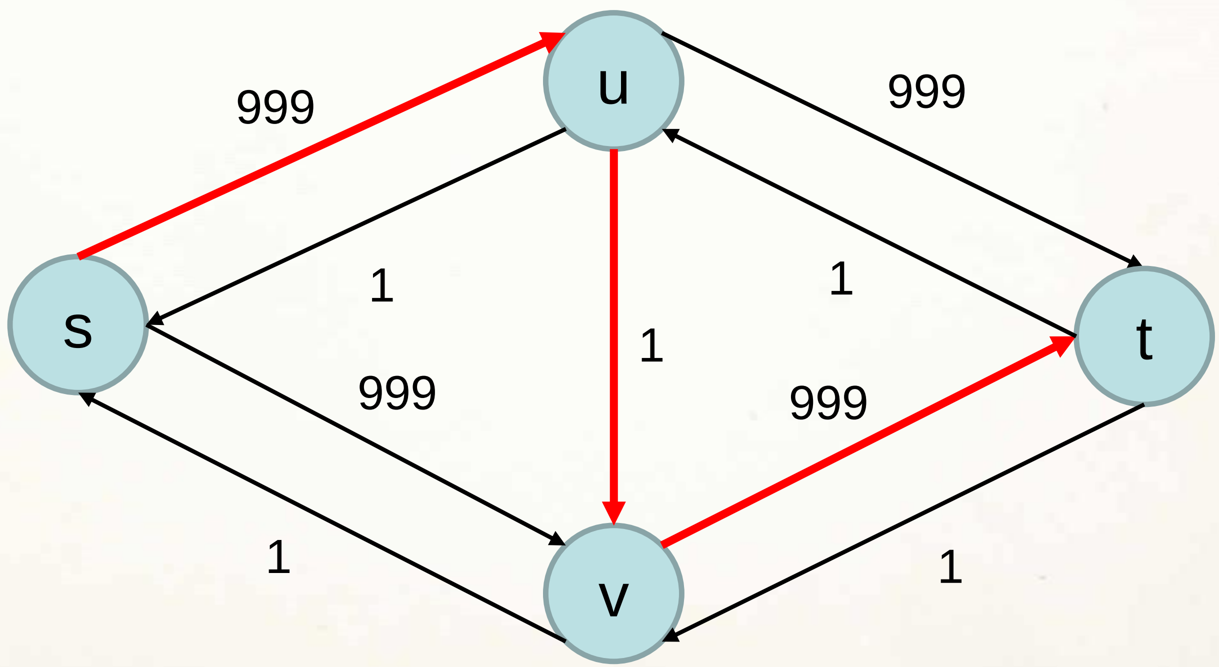
Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)

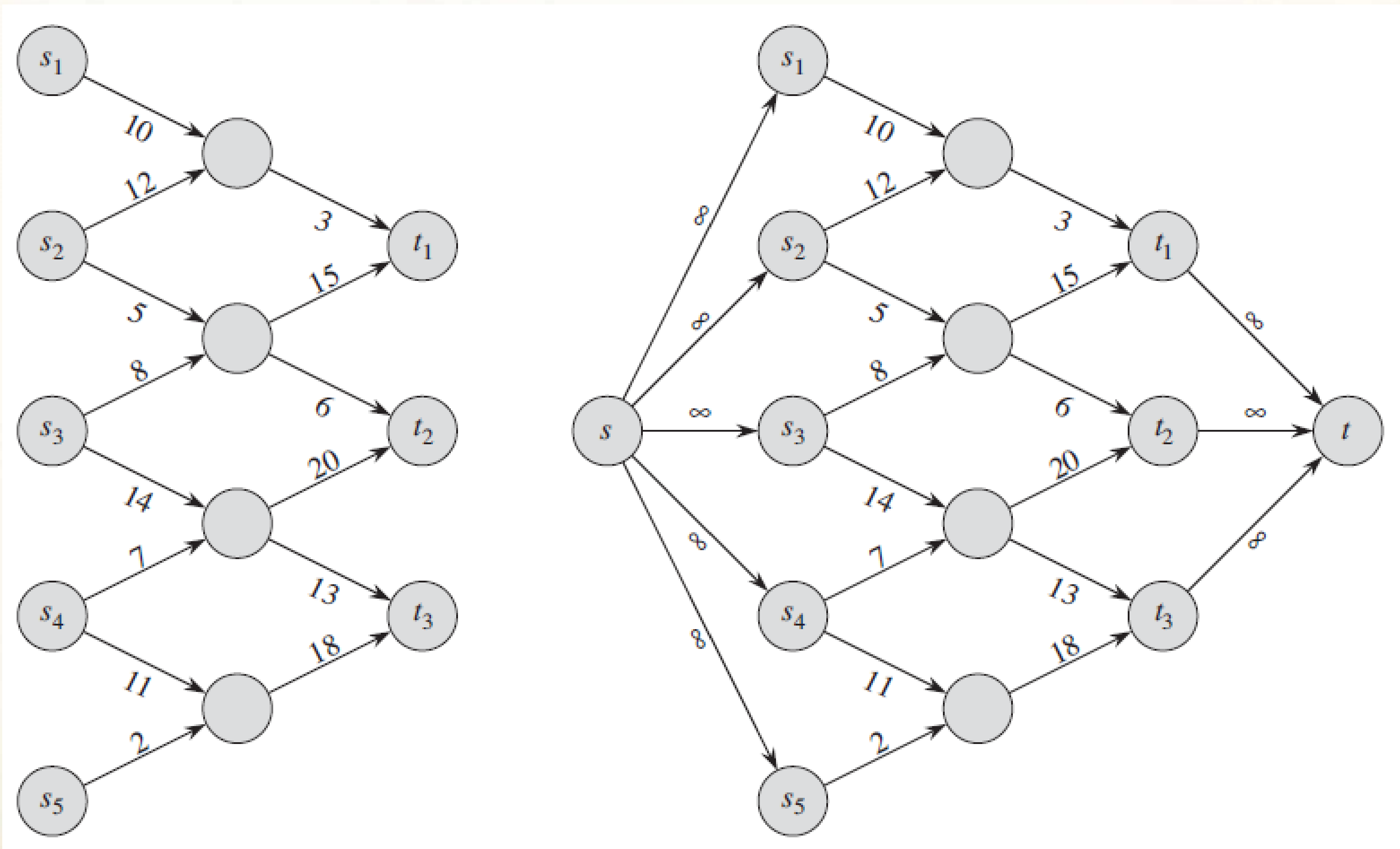


Kitas pavyzdys (nepalankus atvejis)



ir t. t...

Apibendrinto maksimalaus srauto uždavinio sprendimas



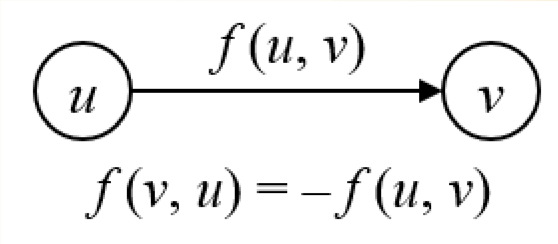
Priešsraučio stūmimo algoritmas (*angl. Preflow-Push algorithm*)

- Šiuo algoritmu taip pat išsprendžiamas maksimalaus srauto apskaičiavimo uždavinys.
- Priešsraučio stūmimo algoritmo sudėtingumas – $O(|V|^3)$.
- Pagrindinės operacijos – stumk(uv) ir iškrauk(u).

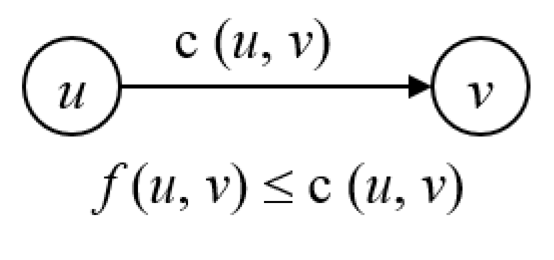
Priešsraučio stūmimo algoritmas (*angl. Preflow-Push algorithm*)

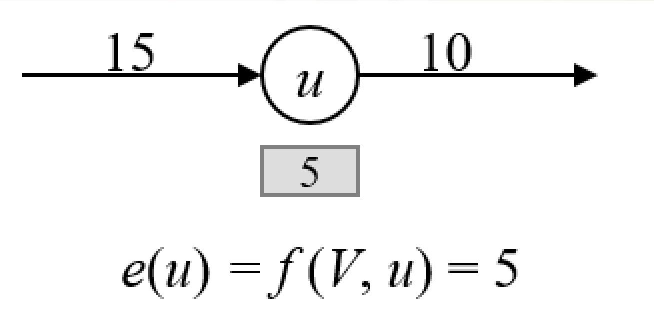
- Priešsraučiu tinkle vadinama funkcija f : V × V → R, tenkinanti sąlygas:

1) f(uv) = −f(vu),
2) f(uv) ≤ c(uv),
3) e(u) = f(V, u) = ≥ 0 kiekvienai u ∈ V \ {s}.



c(uv) – briaunos uv talpa, f(vu) – briaunos uv svoris, e(u) – perteklinis srautas viršūnėje u.





Priešsraučio stūmimo algoritmas

- **Likutinė talpa** c_f parodo, kokį svorį galima perkelti iš viršūnės u į viršūnę v:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

- **Aukščiu** vadinama funkcija h : V → N, tenkinanti sąlygas:

$$\begin{aligned} &h(s) = |V| \\ &h(t) = 0 \\ &h(u) \le h(v) + 1, \quad \forall\, (u, v) \in E_f \end{aligned}$$

- Likutiniu tinklu vadinamas grafas $G_f = (V, E_f)$:

$$E_f = \{\ (\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in V \times V :\ c_f(u, v) > 0\ ,\ h(u) \le h(v) + 1\ \}$$

Stumk(uv) ir Kelk(u)

Stumk(uv) bus vykdoma tada, kai:

$$c_f(uv) > 0,$$

$$h(u) = h(v) + 1.$$

Stumk(uv):

1. $d_f(uv) \leftarrow \min\{e[u], c_f(uv)\}$
2. $f[uv] \leftarrow f[uv] + d_f(uv)$
3. $f[vu] \leftarrow -f[uv]$
4. $e[u] \leftarrow e[u] - d_f(uv)$
5. $e[v] \leftarrow e[v] + d_f(uv)$

Vykdymo metu briauna uv išstumiamas srautas

$$d_f(uv) = \min\{e(u), c_f(uv)\}.$$

Kelk(u) bus vykdoma tada, kai:

$$c_f(uv) > 0 \text{ ir } h(u) \leq h(v)$$

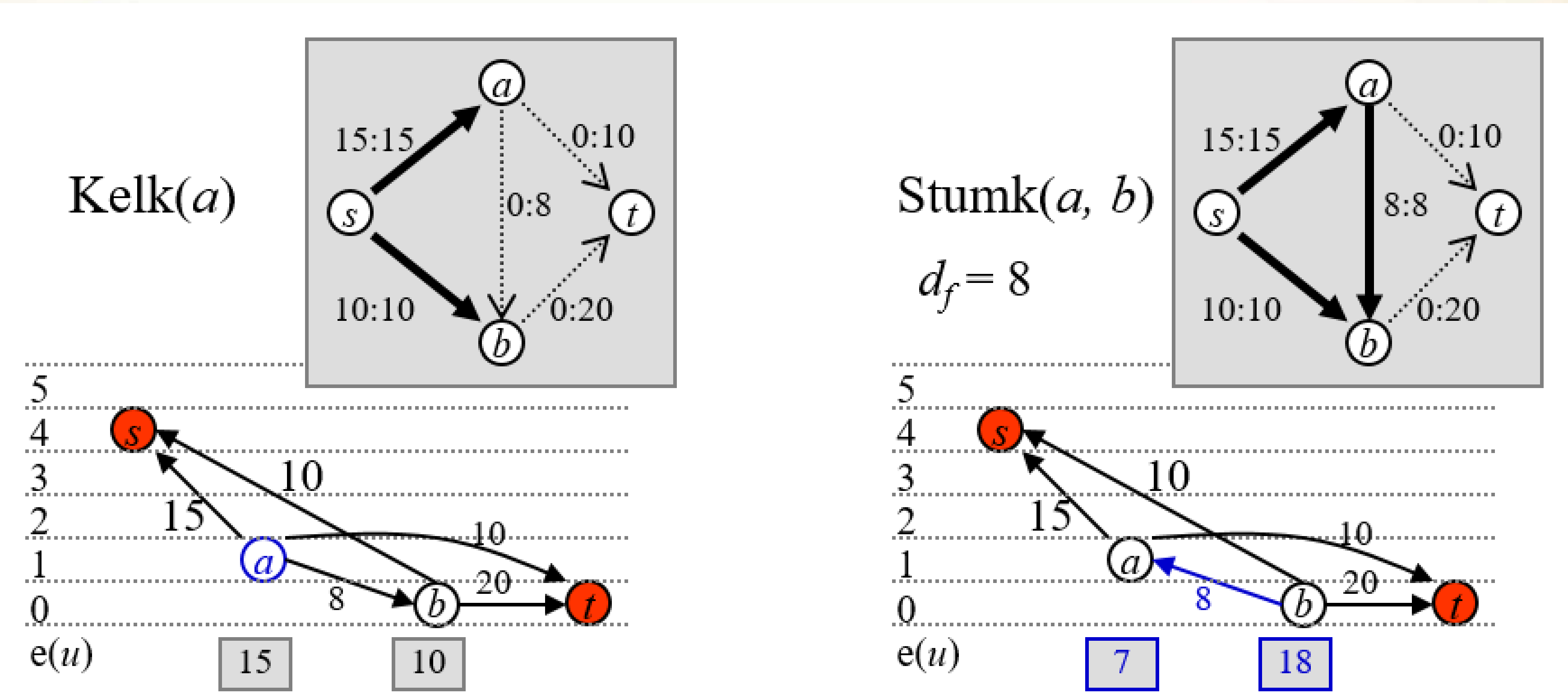
$$\text{visoms } uv \in E_f.$$

Kelk(u):

1. $h[u] \leftarrow 1 + \min\{h[v] : uv \in E_f\}$

Kelk(u) atliekama, kai viršūnė u yra perteklinė visoms briaunoms uv. Šaltinio s ir tikslo t viršūnės nėra keliamos.

Stumk(uv) ir Kelk(u) realizavimo pavyzdys



Priešsraučio stūmimo algoritmas

$\mathbf{INIT}(G, s)$:

```
for ∀u ∈ V
    do h[u] ← 0
       e[u] ← 0
for ∀uv ∈ E
    do f[uv] ← 0
       f[vu] ← 0
h[s] ← |V|
for ∀u ∈ Adj[s]
    do f[su] ← c(su)
       f[us] ← −c(su)
       e[u] ← c(su)
END
```

Bendra Pr-St procedūra:

1. INIT(G, s)
2. **while** egzistuoja galimybė naudoti **Kelk(u)** ar **Stumk(uv)**
3. **do** tai.

Maksimalaus srauto taikymai

- Maksimalus dvidalis suporavimas (Halo vedybų problema, *angl. Hall's marriage problem*).
- Ištrūkimo uždavinys (arba kitaip – išsigelbėjimo problema, *angl. escape problem*).

Maksimalus dvidalis suporavimas

- *Suporavimu* grafe G = (V, E) vadinamas nepriklausomų briaunų poaibis M.
- $M \subset E$ yra suporavimas, jei kiekviena viršūnė $v \in V$ turi ne daugiau kaip vieną incidenčią briauną, priklausančią aibei M.
- Maksimalus suporavimas turi didžiausią briaunų skaičių, t. y. $|M| \rightarrow \max$.
- Visiškasis suporavimas dvidaliame grafe $G = (L \cup R, E)$ yra toks poravimas, kai visos vienos dalies viršūnės yra incidenčios suporavimo briaunoms.

Halo vedybų problema (1)

- *Visiško suporavimo M atveju |M| = min{|L|, |R|}.*
- *Toks suporavimas ne visada egzistuoja, tačiau galima apskaičiuoti maksimalųjį dvidalį suporavimą.*
- *Šis uždavinys išsprendžiamas taikant maksimalaus srauto apskaičiavimo algoritmą, pavyzdžiui, Fordo–Fulkersono metodą.*

Halo vedybų problema (2)

- *Tegu $G = (V, E)$ – pradinis dvidalis grafas.*
- *Sudarykime asocijuotą srauto tinklą $G' = (V', E')$, kur*

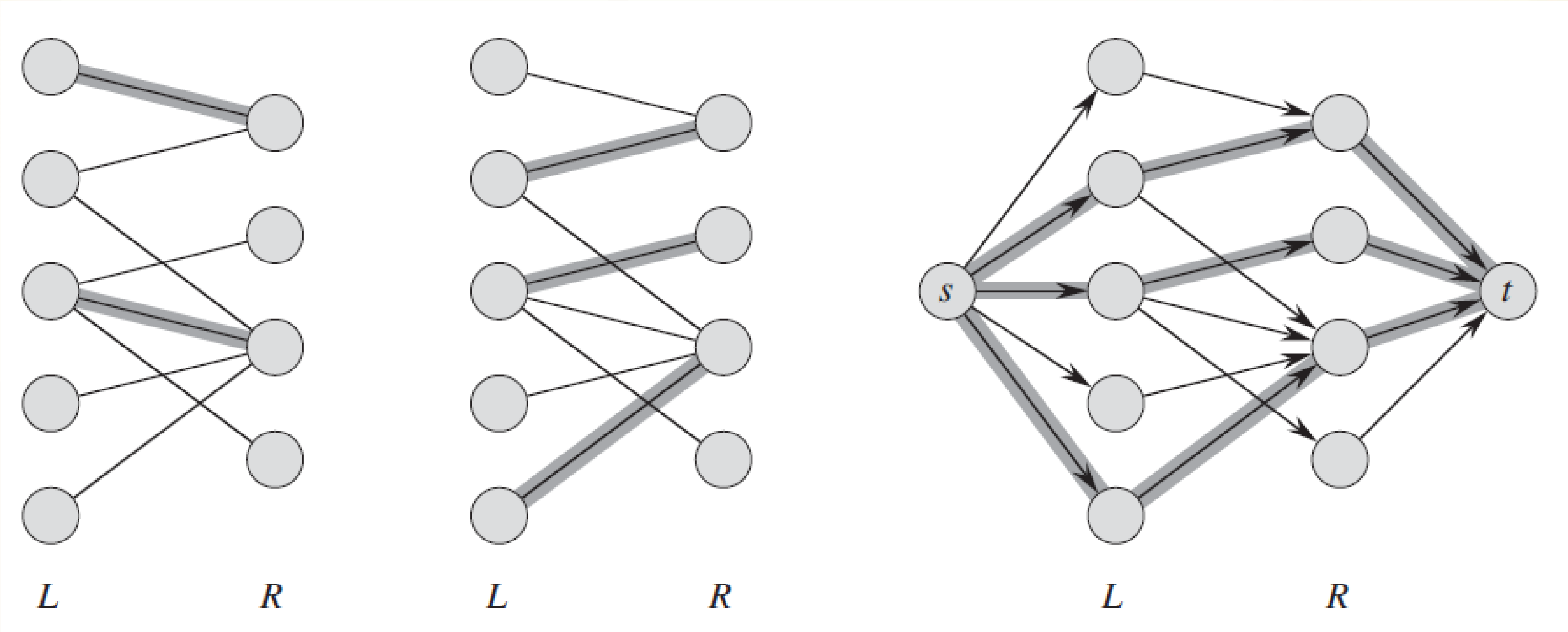
$$V' = L \cup R \cup \{s, t\},$$

$$E' = \{uv \in E\} \cup \{su : u \in L\} \cup \{vt : v \in R\},$$

visoms briaunoms suteikime kryptis ir vienetines talpas.

Teorema. *Jei M yra dvidalis suporavimas, tai asocijuotame tinkle egzistuoja srautas f, kurio didumas yra $|f| = |M|$. Atvirkščiai, turėdami tinkle G' sveikareikšmį srautą f, turime ir suporavimą M, kurio didumas yra $|M| = |f|$.*

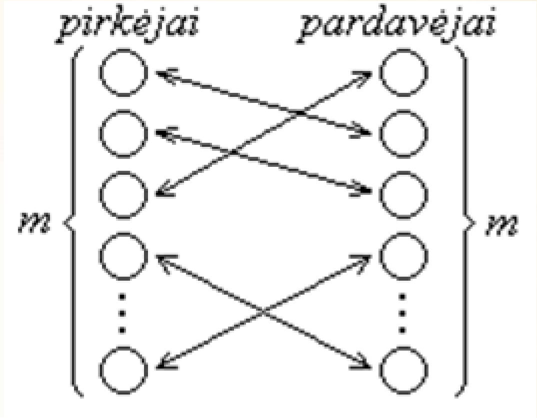
Halo vedybų problemos pavyzdys



(a) (b) (c)

- (a) – nemaksimalus suporavimas,
- (b) – maksimalus suporavimas,
- (c) – maksimalus suporavimas taikant Fordo–Fulkersono metodą.

Priskyrimo lošimas



- Tai panašus uždavinys dvidalio grafo suporavimui, tik formuluojamas lošimų teorijoje:

Tegu $N = M \cup M'$, kur M ir M' nerikertančios aibės, turinčios po m elementų: $M = \{1,2,...,m\}$ ir $M' = \{m+1, m+2, ..., 2m\}$. Lošėjas $\{i\} \in M$, $i = 1,2,...,m$, (i-tasis pardavėjas) turi namą, kurio vertė a_i dolerių. Lošėjas $\{m+j\} \in M'$, $j = 1,2,...,m$, (j-tasis pirkėjas) nori pirkti namą maksimaliai skirdamas b_{ij} dolerių. Tokiu atveju koalicija tarp dviejų lošėjų $\{i, m+j\}$ gauna pelną, kuris lygus:

$$v(\{i, m+j\}) = c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_i \ , \text{ kai } b_{ij} \geq a_i \ , \\ 0 \ , \text{ kai } b_{ij} \leq a_i \ . \end{cases}$$

- Priskyrimo lošimo uždavinio tikslas – maksimizuoti visų koalicijų pelną.
- **Klausimas diskusijai.** Ar galima priskyrimo lošimo uždavinį išspręsti taikant maksimalaus srauto paieškos algoritmą?

Ištrūkimo uždavinys

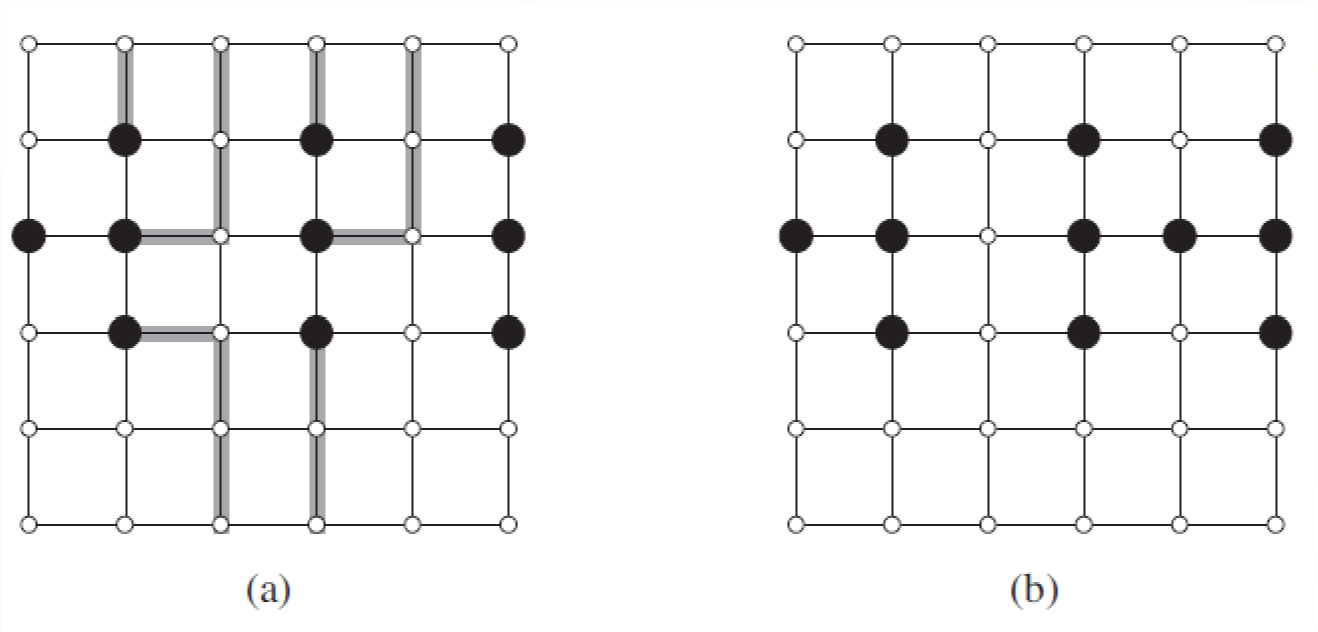
- *Tegu languoto $n \times n$ sąsiuvinio lapas atitinka grafą*

  $$G = (V, E).$$

- *Šiame grafe pažymėta nepriklausomų $m \leq n^2$ viršūnių, kuriose tupi kiškiai.*
- *Visiems kiškiams leidžiama keliauti grafo briaunomis sudarant skirtingus takus, tačiau bet kurie 2 takai negali turėti bendrų viršūnių.*

- ***Ištrūkimo uždavinys.*** *Ar gali visi kiškiai pabėgti į grafo pakraštį?*

Ištrūkimo uždavinys



- (a) – kiškių pabėgimas įmanomas,
- (b) – kiškių pabėgimas neįmanomas, kodėl?

Ištrūkimo uždavinio sprendimas

- *Tegu* $x_{ij} \in$ V – *grafo* G = (V, E) *viršūnės, 1 ≤ i, j ≤ n.*
- *Tada* $x_{ij} \in V$ *, o* $x_{ij}x_{i+1,j} \in E$ *ir* $x_{i+1,j}x_{i,j} \in E$*, jei i ≤ n − 1.*
- *Tegu grafo briaunos ir viršūnės turi vienetines talpas.*
- *Tegu* $V' = V \cup \{s, t\}$*, čia s – šaltinio ir t – tikslo viršūnės.*
- *Jei* x_{ij} *tupi kiškis, pridėkime briauną* sx_{ij}, jei x_{kl} – kraštinė viršūnė, pridėkime briauną $x_{kl}t$. Gauname grafą *G' = (V', E').*
- ***Teorema.*** *Ištrūkimo uždavinio sprendinys egzistuoja tada ir tik tada, jei sukonstruotame tinkle G' = (V', E') maksimalus srautas |f| lygus m.*
- ***Įrodymas.*** *Kaip ir dvidalio grafo suporavimo uždavinyje maksimalus srautas lygus nepriklausomų s ⇒ t takų skaičiui, t. y. |f| = m. To užtenka m kiškių pabėgti.*

Ačiū už dėmesį.

Klausimai?