

# ***Duomenų struktūros ir algoritmai***

7 paskaita

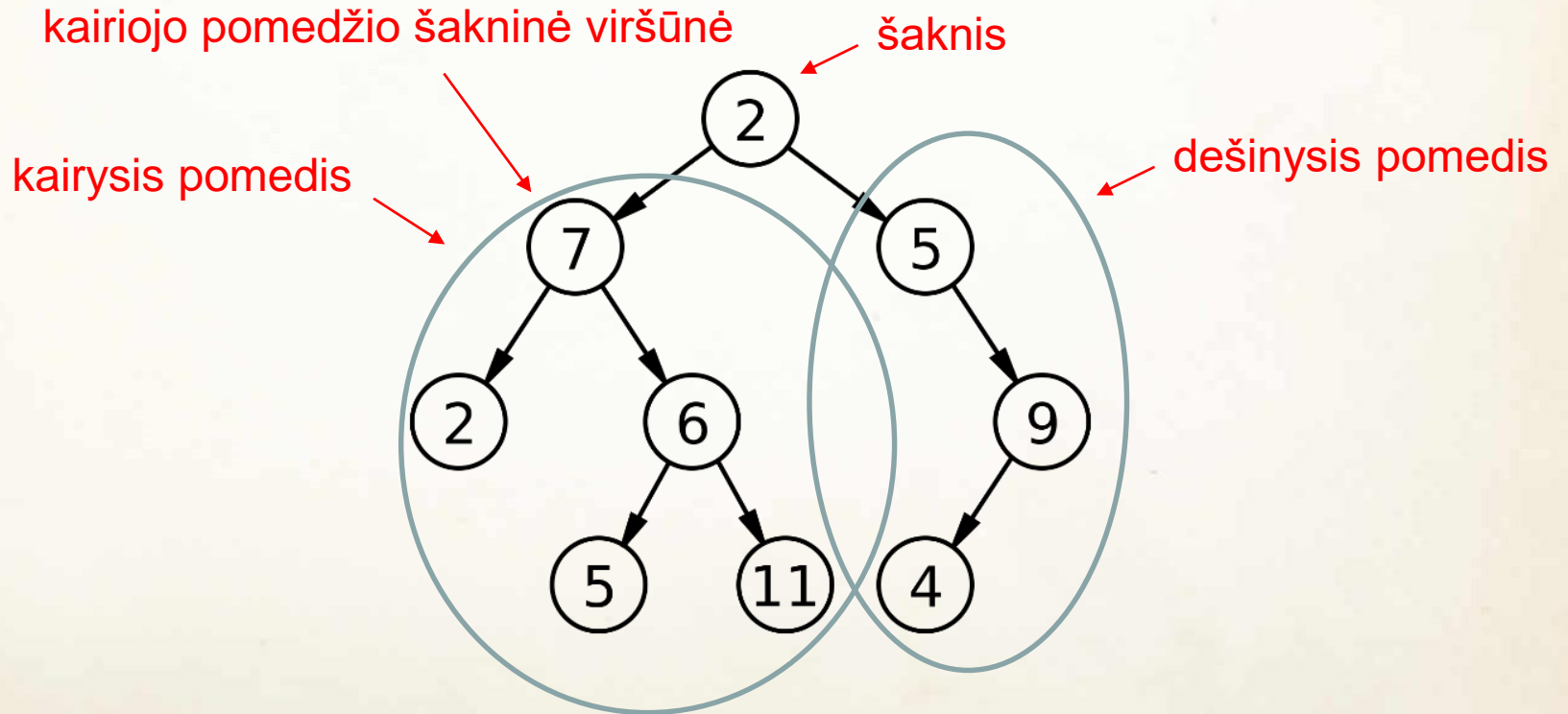
2020-03 (karantinas)

# *7 paskaitos tikslas*

- Susipažinti su:  
Dvejetainiais paieškos medžiais,  
AVL medžiais,  
**Raudonais**–juodais medžiais.

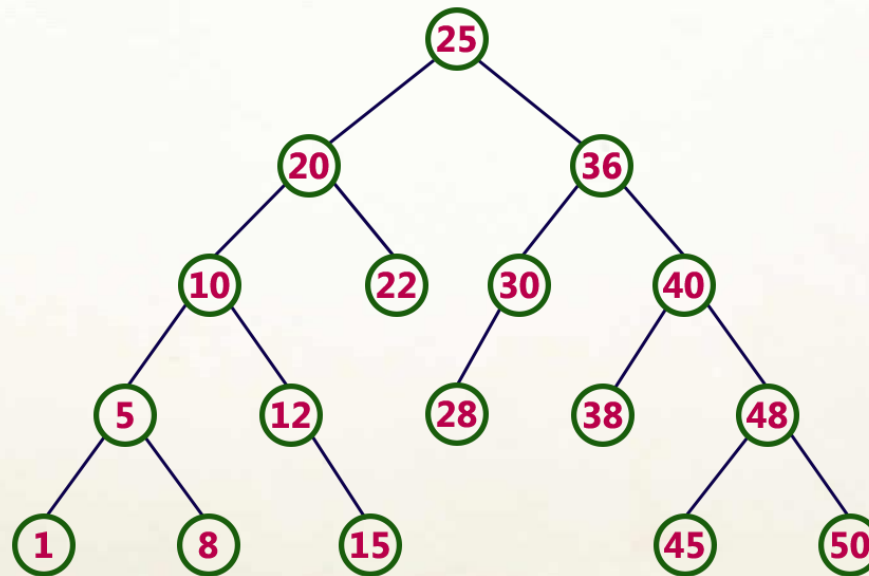
# Dvejetainis medis

- Dvejetainis medis (*binary tree*) – tai toks medis, kurio kiekviena viršūnė turi ne daugiau kaip 2 vaikus:



# Dvejetainis paieškos medis

- Dvejetainis paieškos medis (*binary search tree*) – tai toks dvejetainis medis, kurio viršūnių reikšmės išdėstytos tokia tvarka:
  - Viršūnės reikšmė yra didesnė už visas reikšmes jos kairiajame pomedyje.
  - Viršūnės reikšmė yra mažesnė už visas reikšmes jos dešiniajame pomedyje.
  - Kairysis ir dešinysis pomedžiai yra dvejetainiai paieškos medžiai.
  - Viršūnių reikšmės negali kartotis.



# ***Operacijos dvejetainiame paieškos medyje***

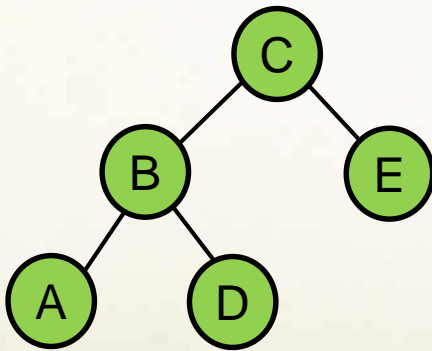
- Medžio apėjimas
- Reikšmės paieška
- Elemento įterpimas
- Elemento šalinimas

# *Dvejetainio paieškos medžio apėjimas*

Apėjimo strategijos:

- V-K-D: aplankyti **Viršūnę**, apeiti **Kairijį** pomedį, apeiti **Dešinijį** pomedį.
- K-V-D: apeiti **Kairijį** pomedį, aplankyti **Viršūnę**, apeiti **Dešinijį** pomedį.
- K-D-V: apeiti **Kairijį** pomedį, apeiti **Dešinijį** pomedį, aplankyti **Viršūnę**.

Apėjimo pavyzdžiai:



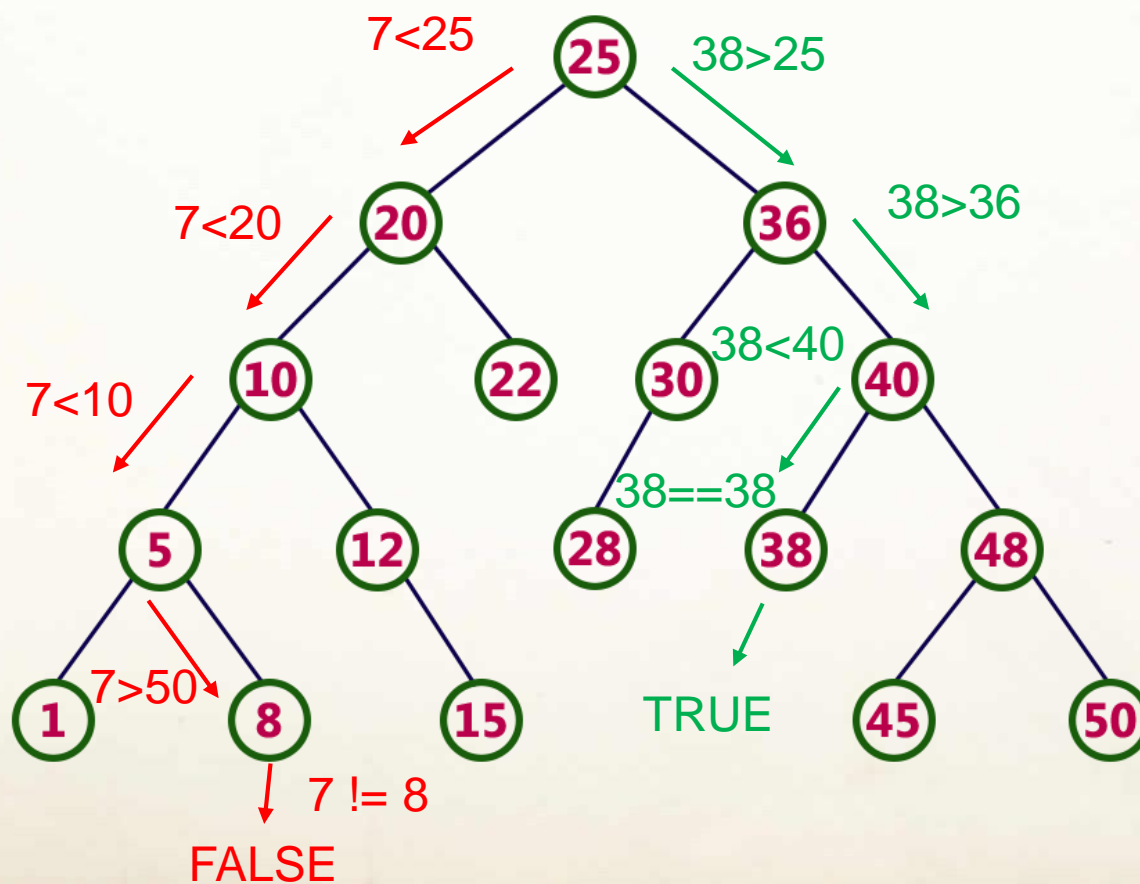
V-K-D: C B A D E

K-V-D: A B D C E

K-D-V: A D B E C

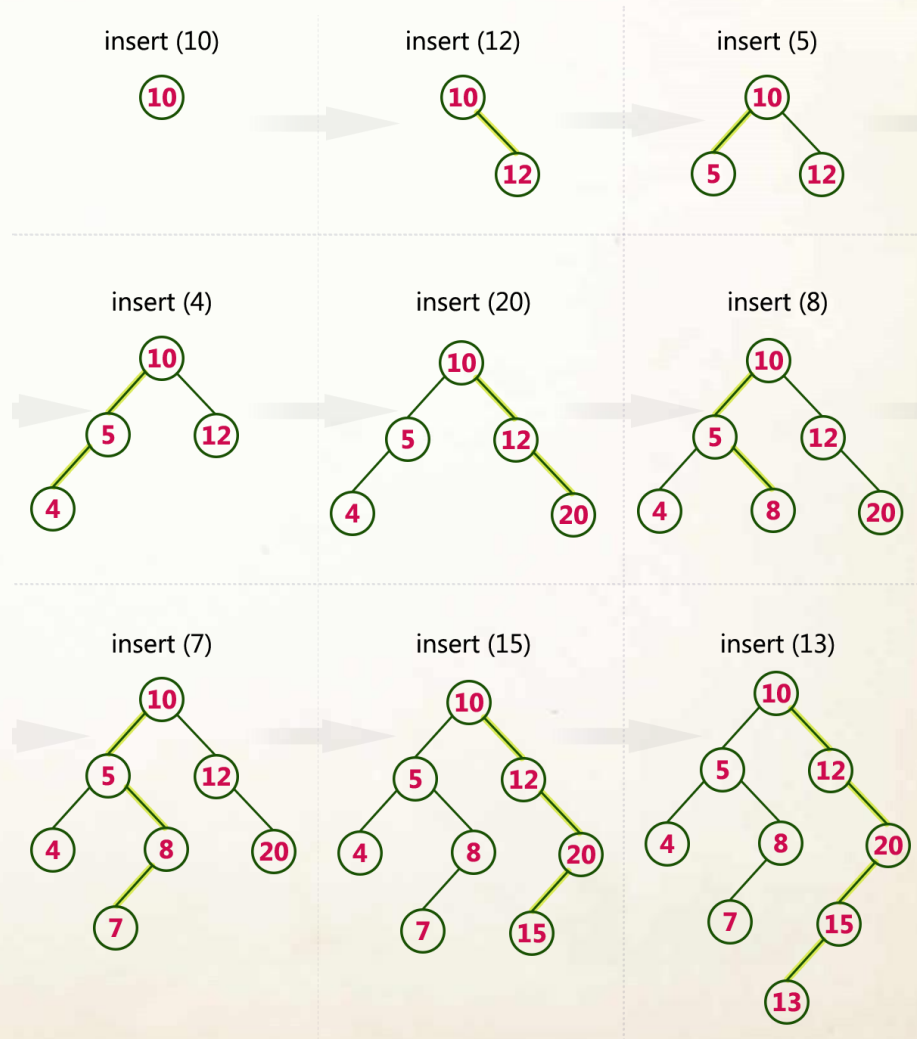
# Reikšmės paieška dvejetainiame paieškos medyje

Ieškomos reikšmės **7** ir **38**:



# Elementų įterpimas dvejetainiame paieškos medyje

- Jei įterpiama reikšmė lygi viršūnės reikšmei, darbas baigiamas.
- Kitu atveju nauja reikšmė įterpiama dvejetainės paieškos principu leidžiantis žemyn kol randama vieta naujam lapui.

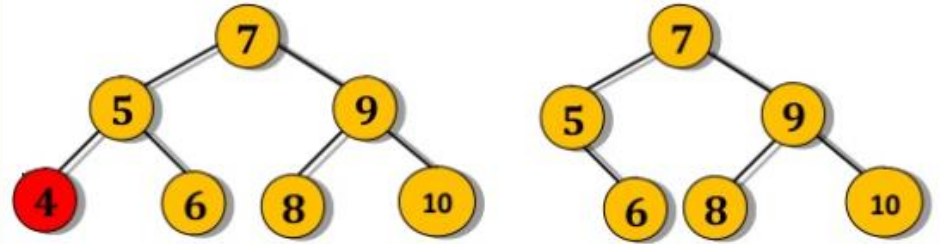




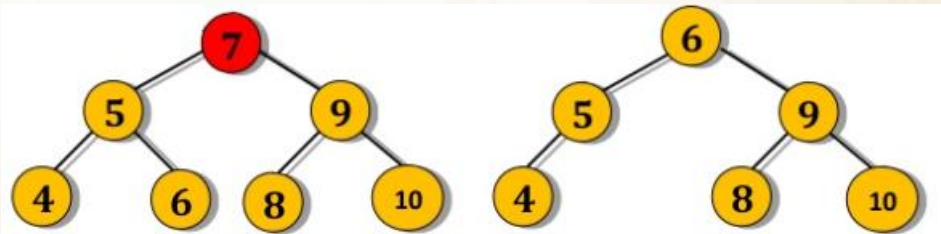
# Elemento šalinimas dvejetainiame paieškos medyje

- Reikia rasti viršūnę su išmetamais duomenimis.
- Jei ta viršūnė – lapas, jis ištrinamas.
- Jei ta viršūnė nėra lapas, jos reikšmę galima sukeisti su didžiausia kairiojo pomedžio arba mažiausia dešiniojo pomedžio reikšme ir išmesti tą viršūnę.

Viršūnės su reikšme 4 išmetimo pavyzdys:

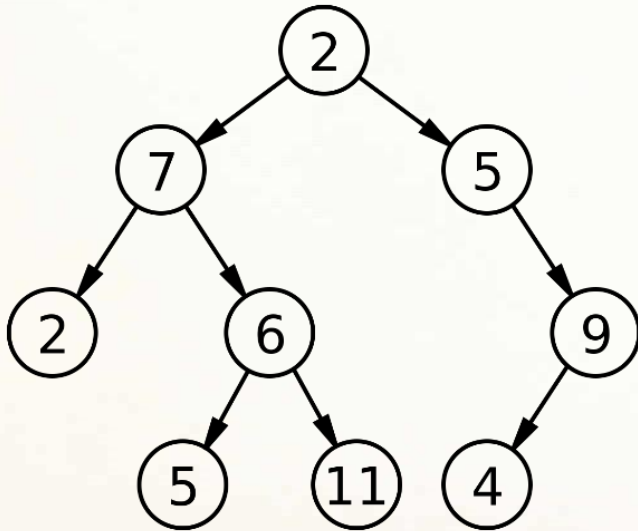


Viršūnės su reikšme 7 išmetimo pavyzdys:

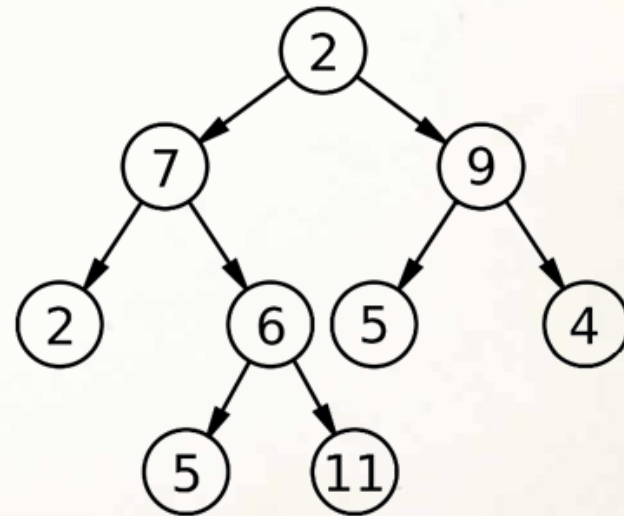


# Subalansuotas medis

- Subalansuotu medžiu vadinamas toks medis, kurio šaknis priklauso to medžio centrui, taip pat ir kiekvieno pomedžio šakninė viršūnė priklauso to pomedžio centrui.



Nesubalansuotas medis



Subalansuotas medis

- Pomedžio aukštis atitinka ilgiausio tako briaunų skaičių tame pomedyje.

# ***Kokia prasmė balansuoti medžius?***

- Dvejetainis paieškos medis gali išsibalansuoti atliekant viršūnių įterpimo ar šalinimo operaciją, todėl paieška jame gali tapti neefektyvi, t. y. išaugti algoritmo sudėtingumas.
- Šios problemos sprendimo būdai:
  - Medžio subalansavimas.
  - Neišsibalansuojančių medžių naudojimas (pavyzdžiui, AVL medžių).

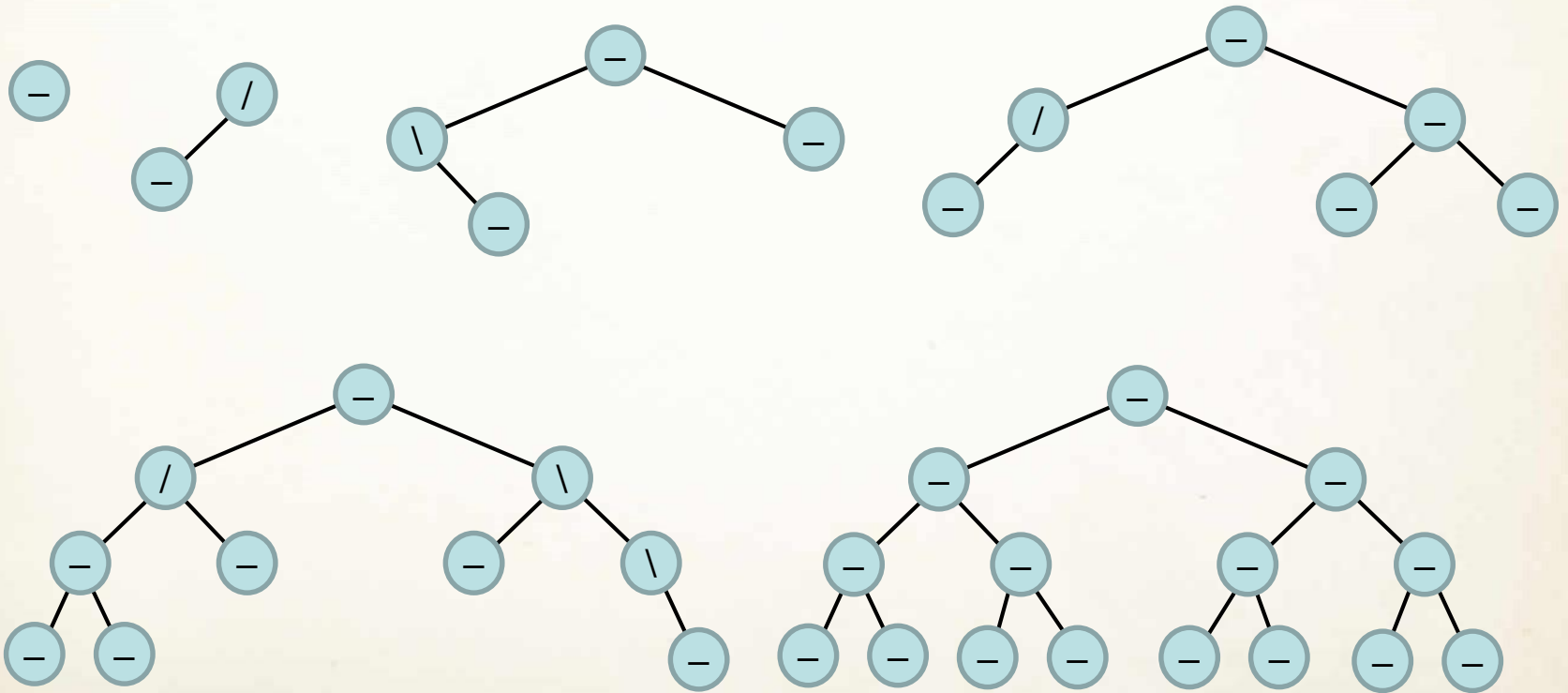
# ***AVL medžiai***

- AVL medžiu vadinamas dvejetainis paieškos medis, kurio kiekvienos vidinės viršūnės dešiniojo ir kairiojo pomedžių aukščiai skiriasi daugiausiai vienetu.
- Išvada: visi AVL medžio pomedžiai yra AVL medžiai.
- AVL medis – pirmasis besibalansuojantis medis, kuris 1962 m. buvo pasiūlymas autorių G. M. Adelson-Velsky ir E. M. Landis, todėl ir gavo vardą

**AVL.**

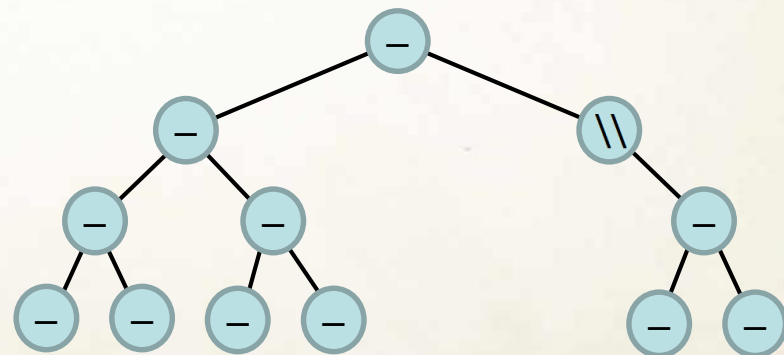
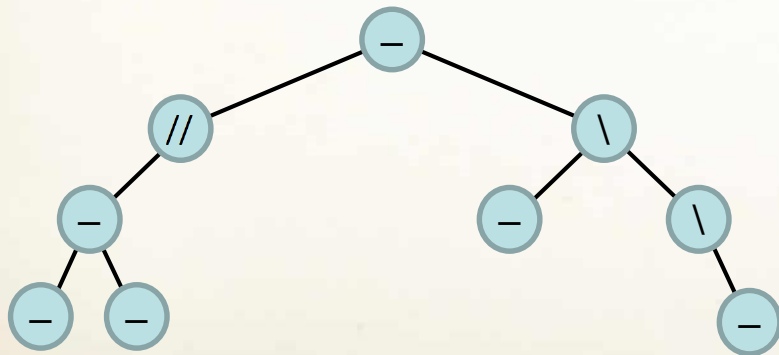
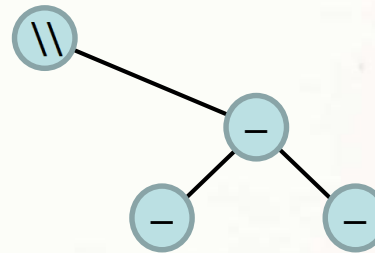
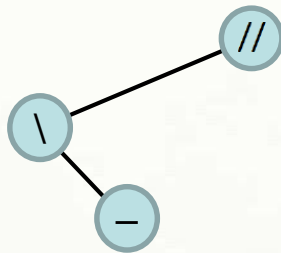
# Pavyzdžiai

- Žemiau pateikti AVL medžiai. Kodėl?



# Pavyzdžiai

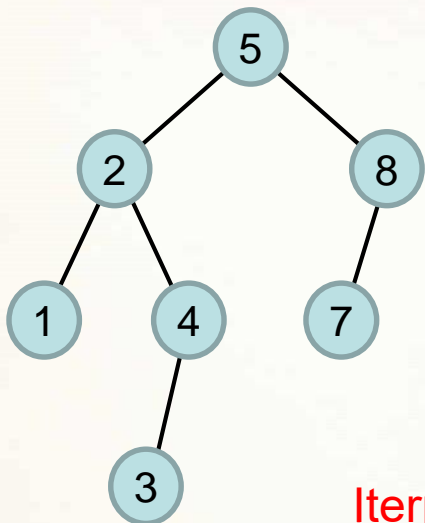
- Žemiau pateikti ne AVL medžiai. Kodėl?



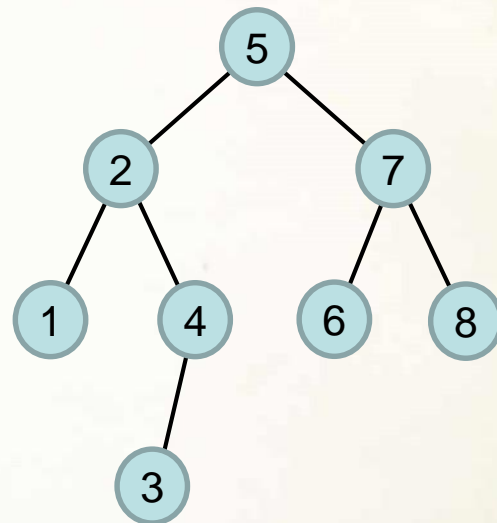
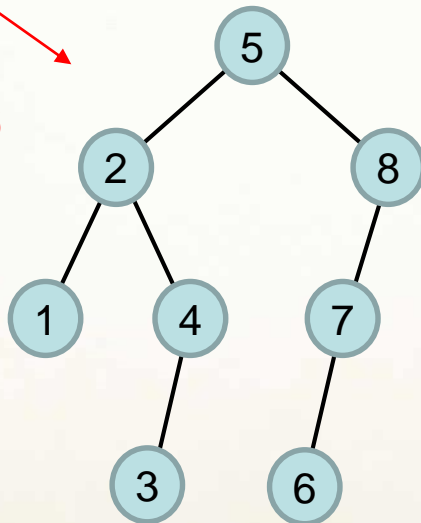
# ***AVL medžiuose atliekamos operacijos***

- Elementų (viršūnių) įterpimas.
- Elementų (viršūnių) šalinimas.
- AVL medžio balansavimas:
  - Pomedžio sukimas į kairę pusę.
  - Pomedžio sukimas į dešinę pusę.
  - Dvigubas pomedžio sukimas.

# Viršūnēs ģterpimas AVL medyje (1)



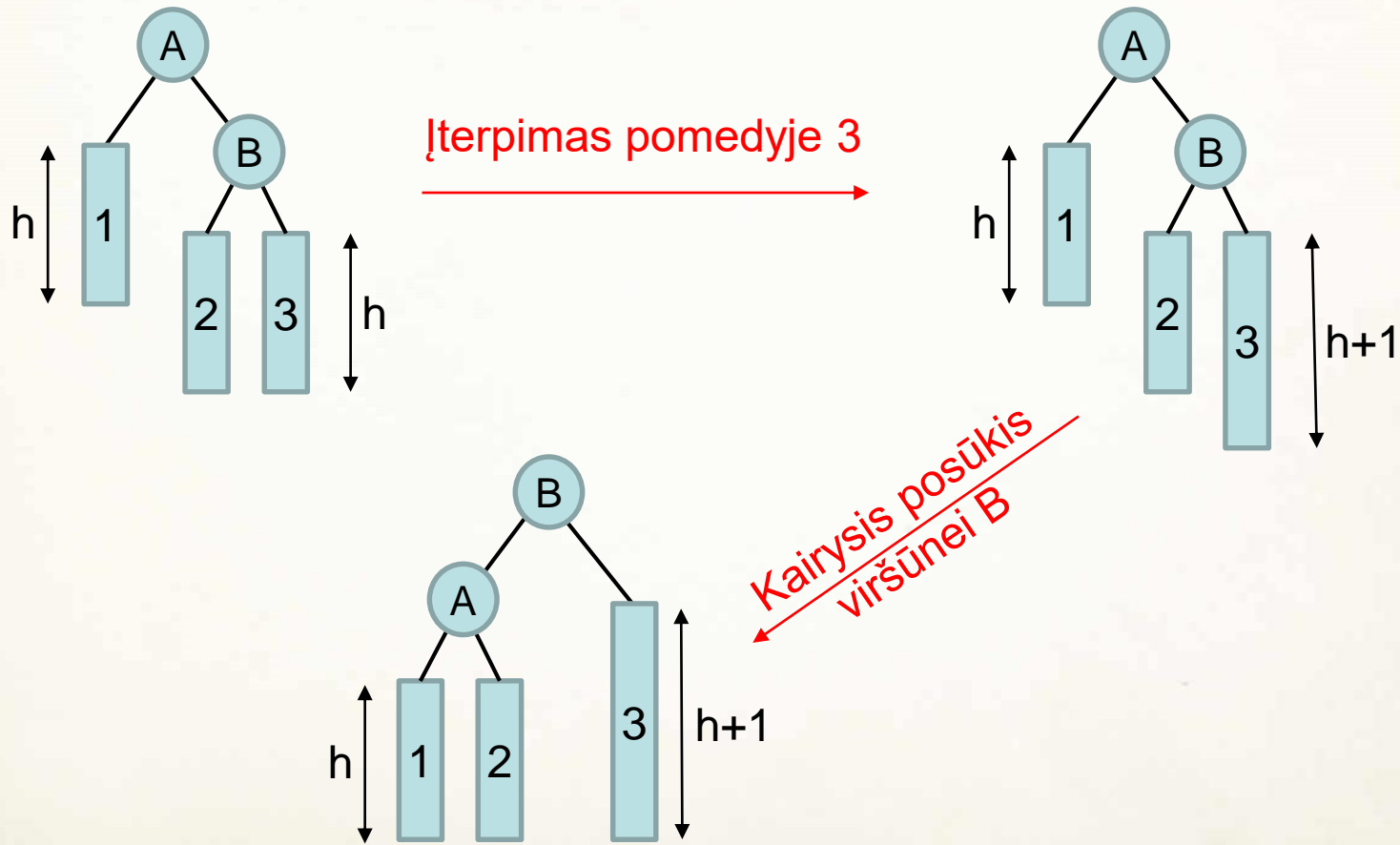
Ģterpiama  
reikšmē 6



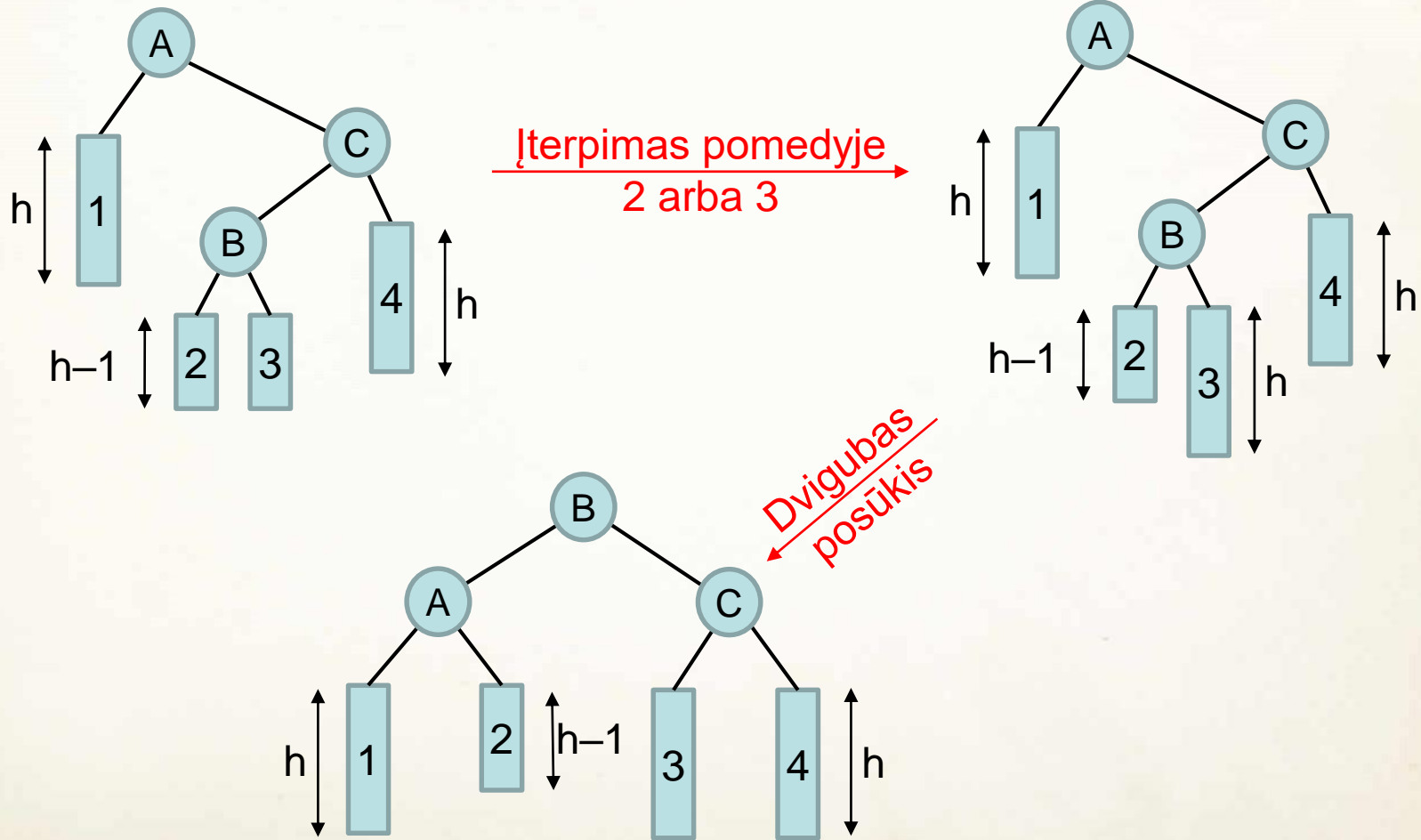
Medis subalansuojamas  
atliekant dešinijā posūkj



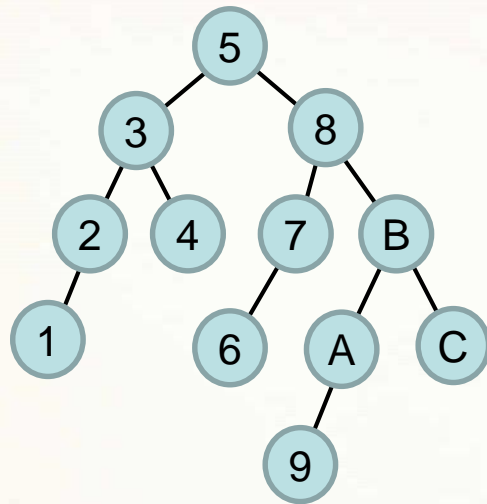
# Viršūnēs ģterpimas AVL medyje (2)



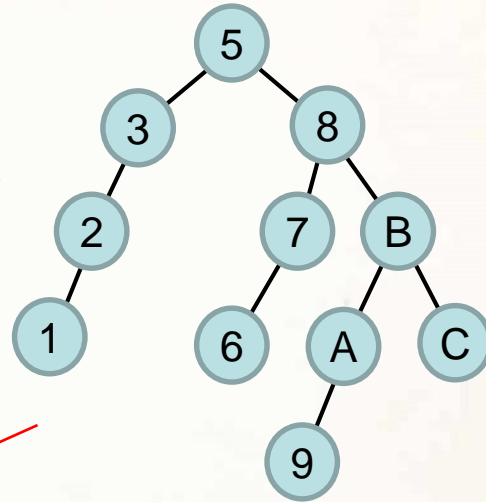
# Viršūnēs ģterpimas AVL medyje (3)



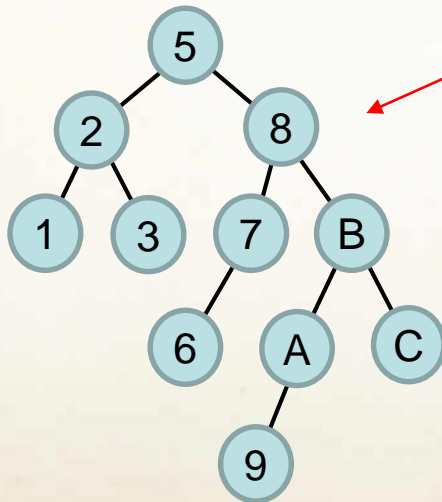
# Viršūnės šalinimas AVL medyje (1)



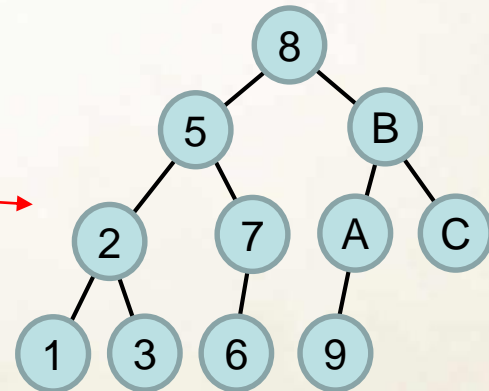
Ištrinama viršūnė 4



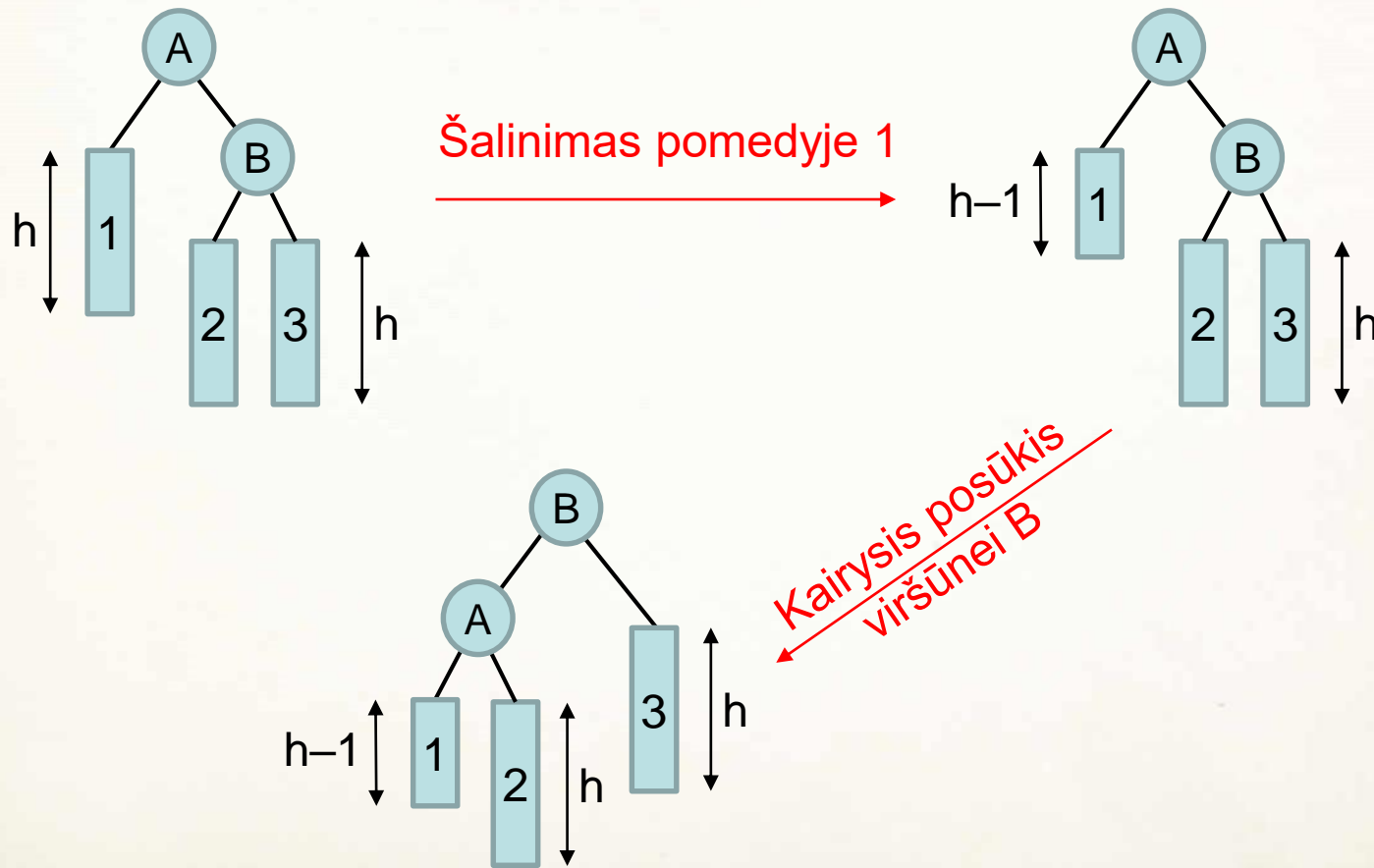
Dešinysis posūkis viršūnei 2



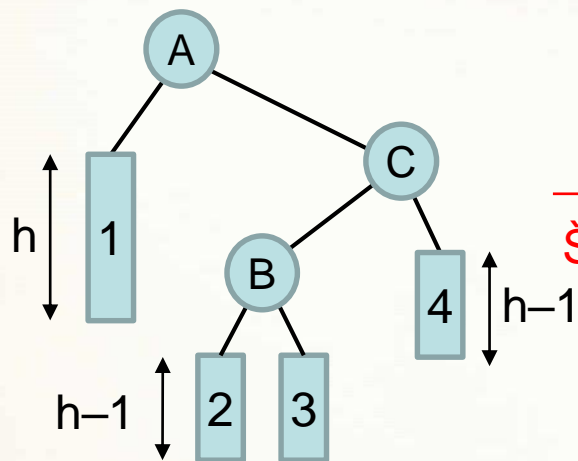
Kairysis posūkis viršūnei 8



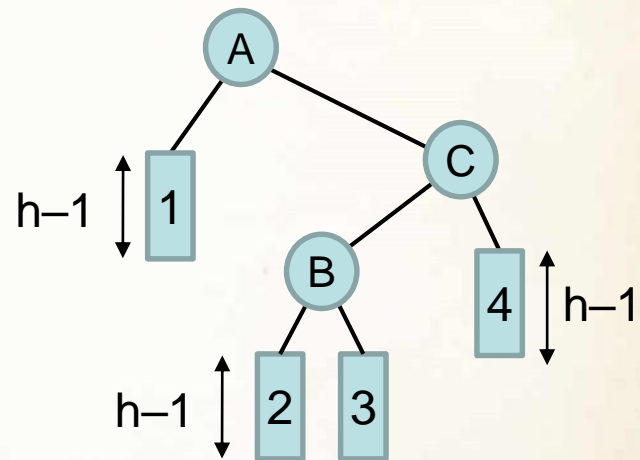
# Viršūnės šalinimas AVL medyje (2)



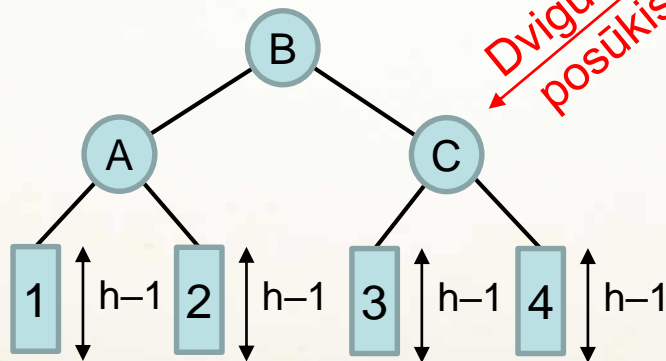
# Viršūnēs šalinimas AVL medyje (3)



Šalinimas pomeđyje 1



Dvigubas posūkis

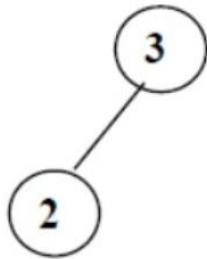


# AVL medžių pavyzdžiai (1)

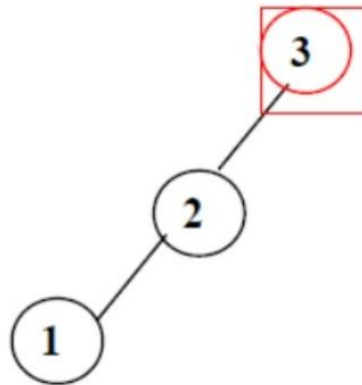
Įterpiama viršūnė 3



Įterpiama viršūnė 2

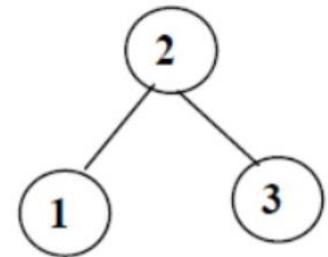


Įterpiama viršūnė 1



posūkis →

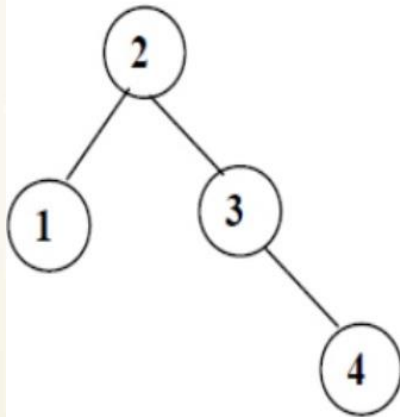
AVL



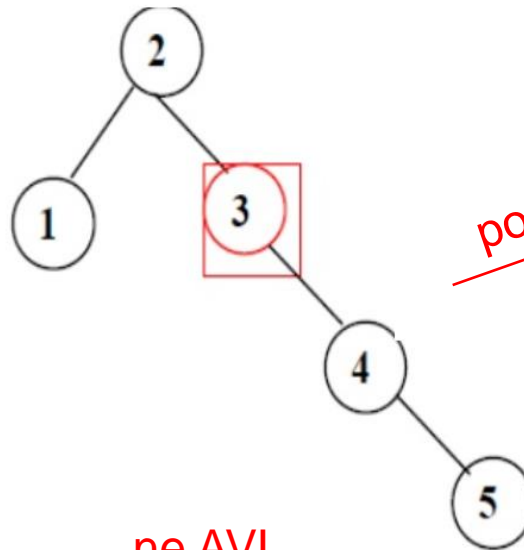
ne AVL medis

# AVL medžių pavyzdžiai (2)

Įterpiama viršūnė 4

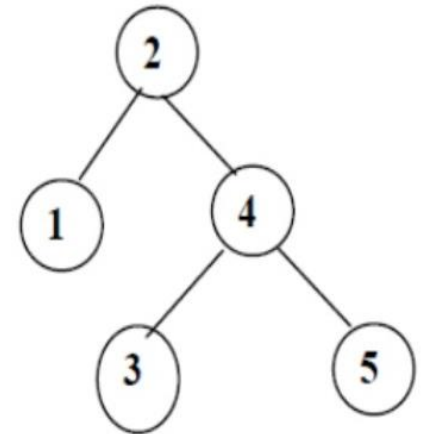


Įterpiama viršūnė 5



posūkis →

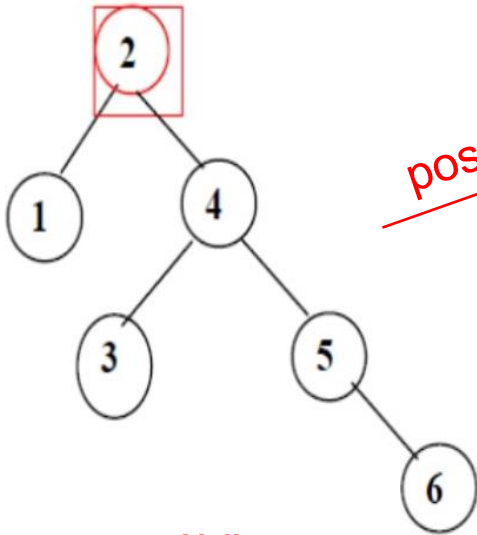
AVL



ne AVL medis

# AVL medžių pavyzdžiai (3)

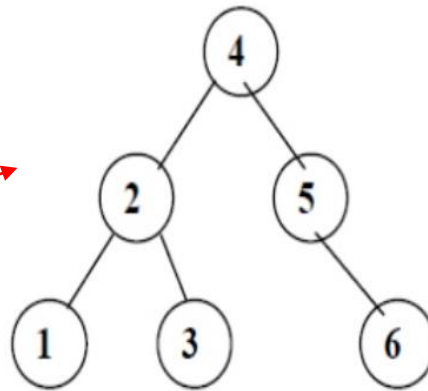
Įterpiama  
viršūnė 6



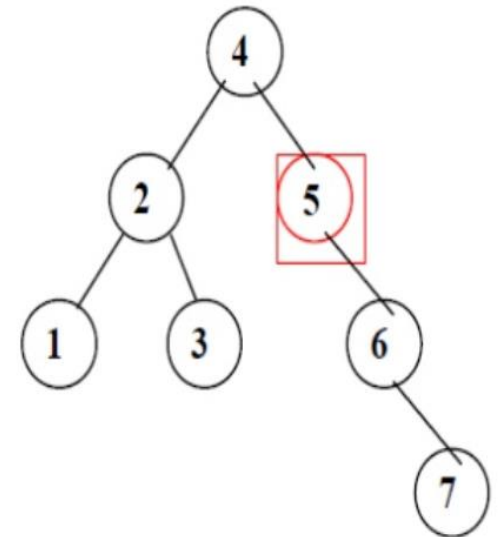
ne AVL  
medis

posūkis

AVL



Įterpiama  
viršūnė 7

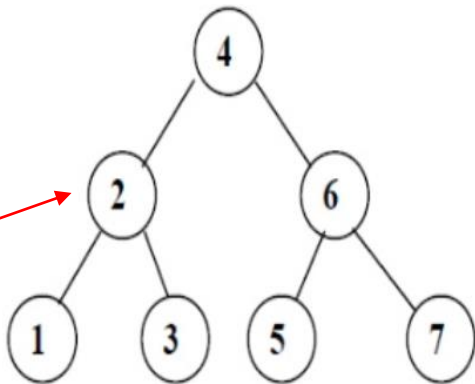


ne AVL  
medis



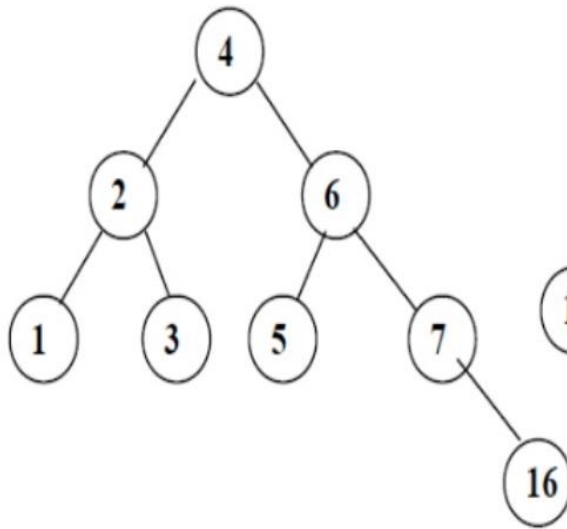
# AVL medžių pavyzdžiai (4)

AVL

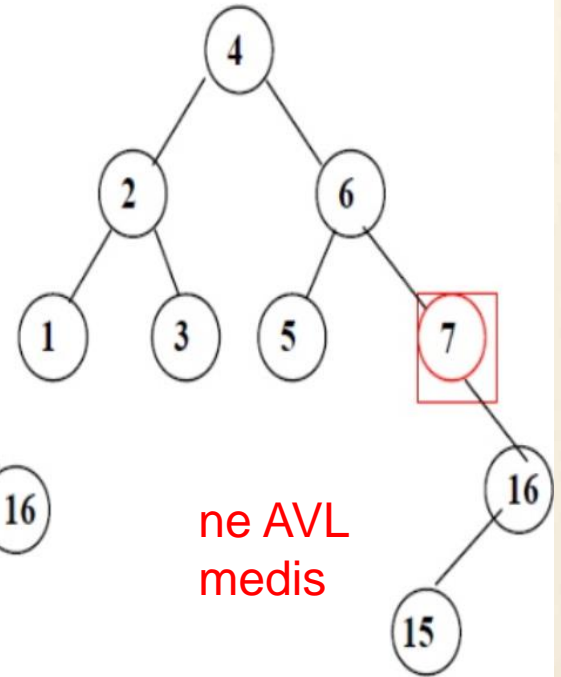


posūkis

Įterpiama viršūnė 16

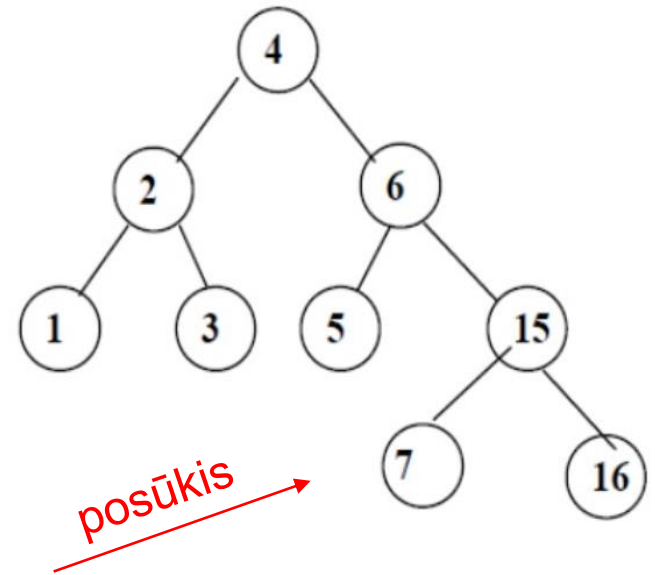
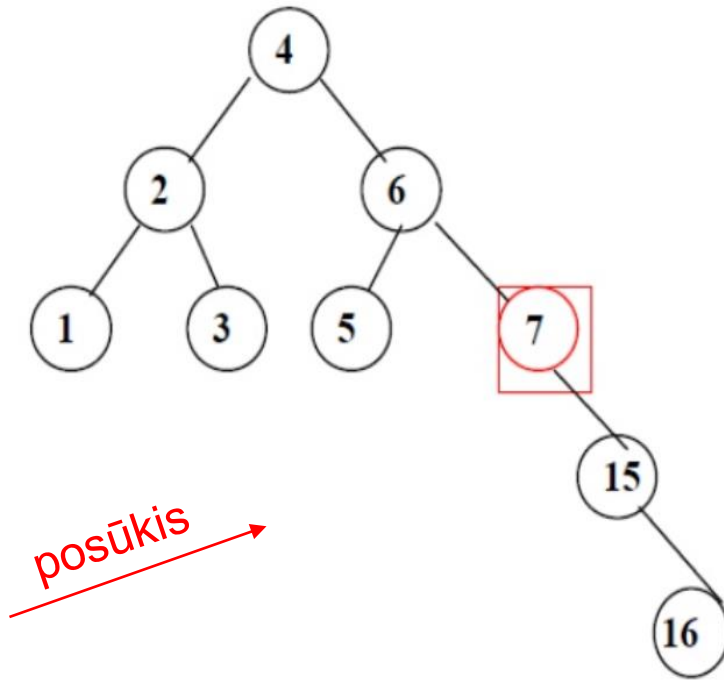


Įterpiama viršūnė 15



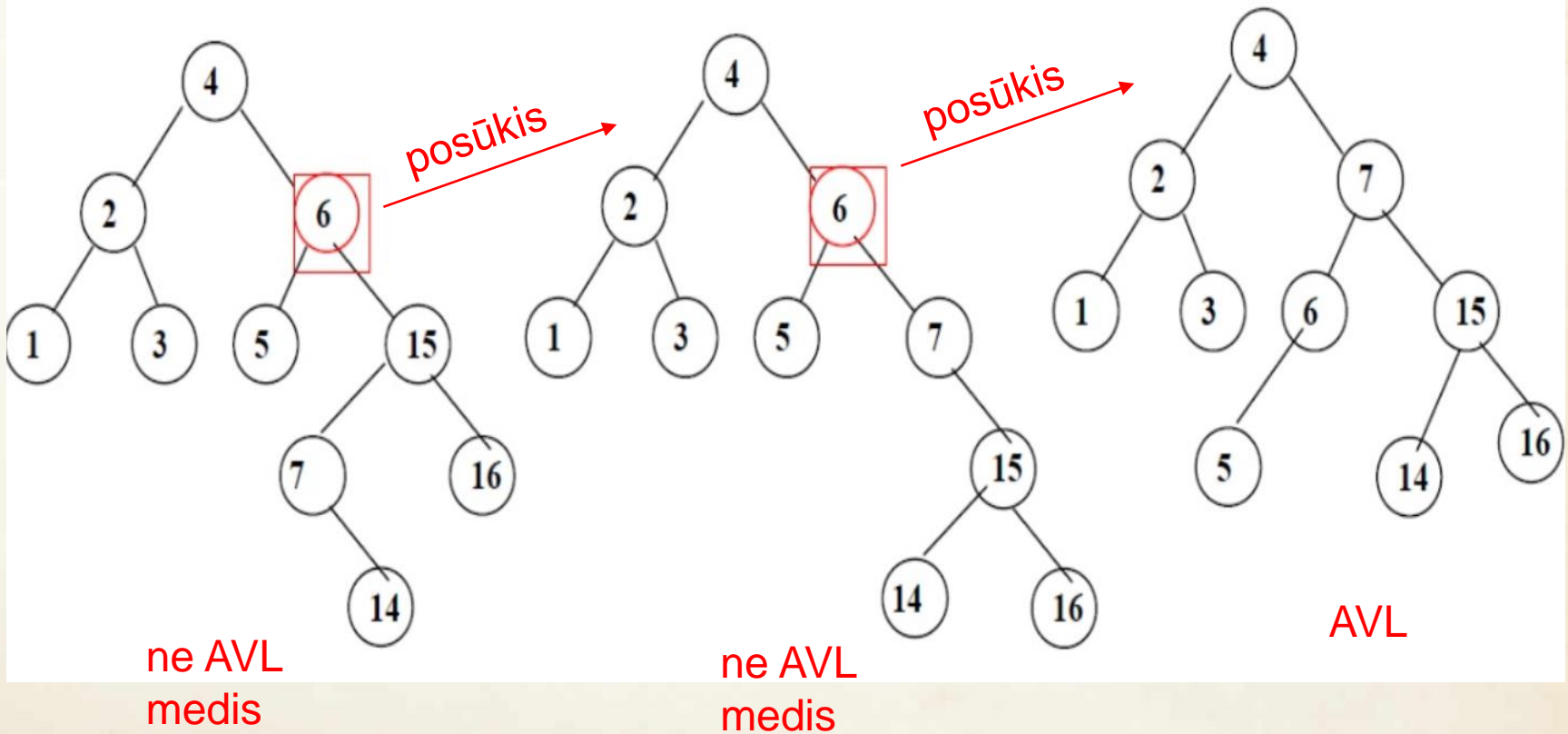
ne AVL medis

# AVL medžiu pavyzdžiai (5)



# AVL medžiu pavyzdžiai (6)

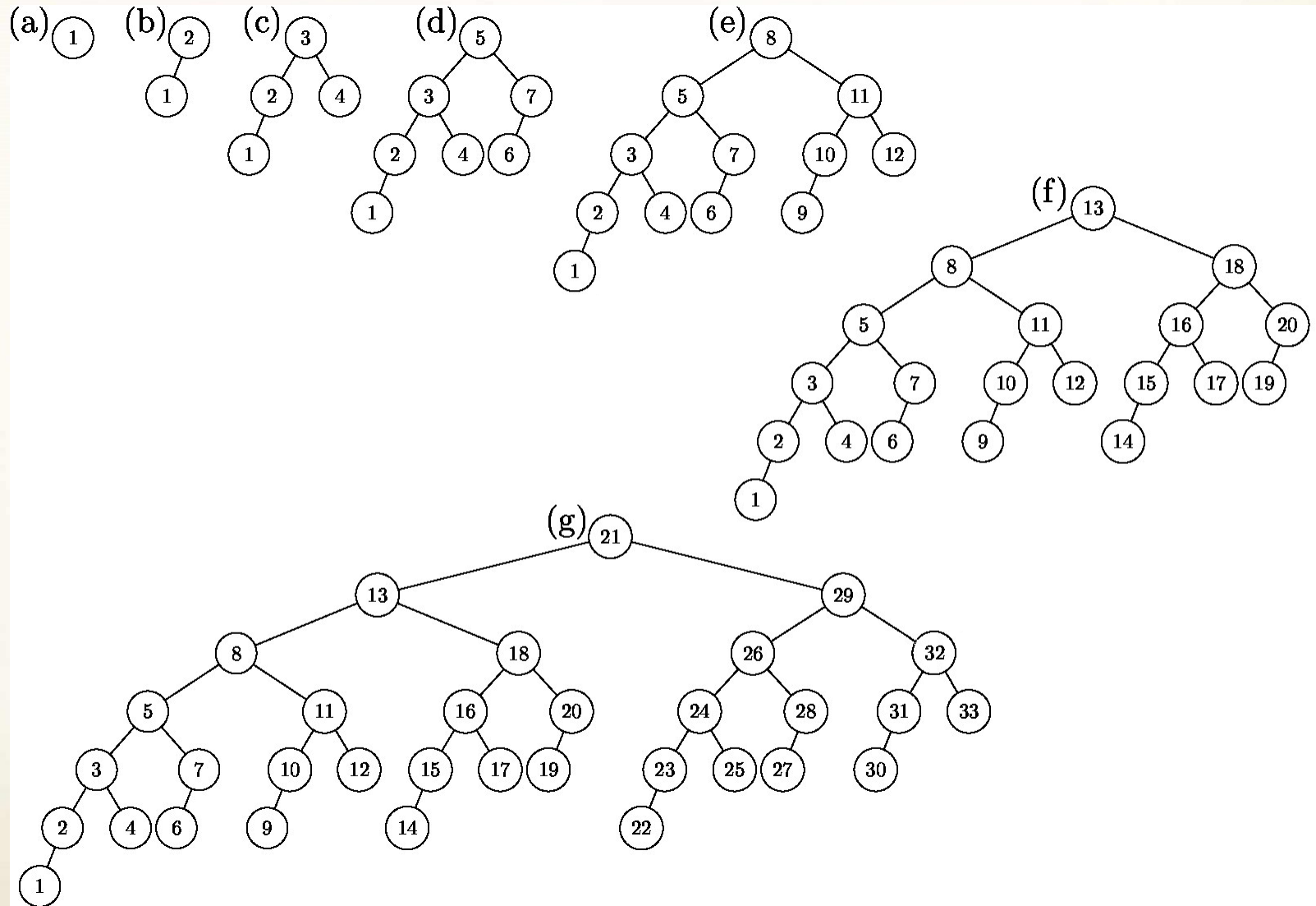
Įterpiama viršūnė 14



# Apibendrinimas

- AVL medžio, turinčio  $n$  viršūnių, aukštis yra  $O(\log n)$ .
- Tegu  $n(h)$  – AVL medžio, kurio aukštis  $h$ , viršūnių skaičius. leškosime minimalaus  $n(h)$ :
- Akivaizdu, kad  $n(1)=1$  ir  $n(2)=2$ .
- Kai  $n > 2$ , tai AVL medis turi pomedžius, kurių vieno aukštis  $n(h-1)$ , kito  $n(h-1)$  arba  $n(h-2)$ .
- Kai vienas iš pomedžių turės mažiausiai viršūnių, jo aukštis bus  $n(h-2)$ , todėl bus teisinga lygybė:  
$$n(h) = 1 + n(h-1) + n(h-2).$$
- AVL medžiai, kurių minimalus viršūnių skaičius fiksuotam aukščiui  $h$ , vadinami **Fibonačio medžiais**.

# Fibonačio medžių pavyzdžiai



# ***AVL medžio didžiausias aukštis***

*Abiejose lygybės  $n(h)=1+n(h-1)+n(h-2)$  pusėse pridėjus po 1, gauname:*

$$n(h)+1=n(h-1)+1+n(h-2)+1.$$

*Kadangi  $n(h)+1$  yra Fibonačio sekos narys, tai*

$$n(h) + 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{h+2}$$

*arba*

$$n(h) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - 1, \quad \text{kai } h \rightarrow \infty$$

*Iš šios lygybės  $h \approx 1,44 n(h)$ . Tai reiškia, kad blogiausiu atveju AVL medžio, turinčio  $n$  viršūnių, aukštis lygus  $O(\log n)$ .*

# Fibonačio sekos bendrasis narys

Raskite Fibonačio sekos bendrąjį narį,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ,  $F_1 = F_2 = 1$ .

Sprendimas

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad | : x^n,$$

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$F_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1, \\ C_1 \cdot \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{2} + C_2 \cdot \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{2} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot (1 + \sqrt{5}) + C_2 \cdot (1 - \sqrt{5}) = 2, \\ C_1 \cdot (3 + \sqrt{5}) + C_2 \cdot (3 - \sqrt{5}) = 2, \end{cases}$$

$$2C_1 + 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1,$$

$$C_1 \cdot (1 + \sqrt{5}) + C_1 \cdot (\sqrt{5} - 1) = 2,$$

$$C_1 \cdot 2\sqrt{5} = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

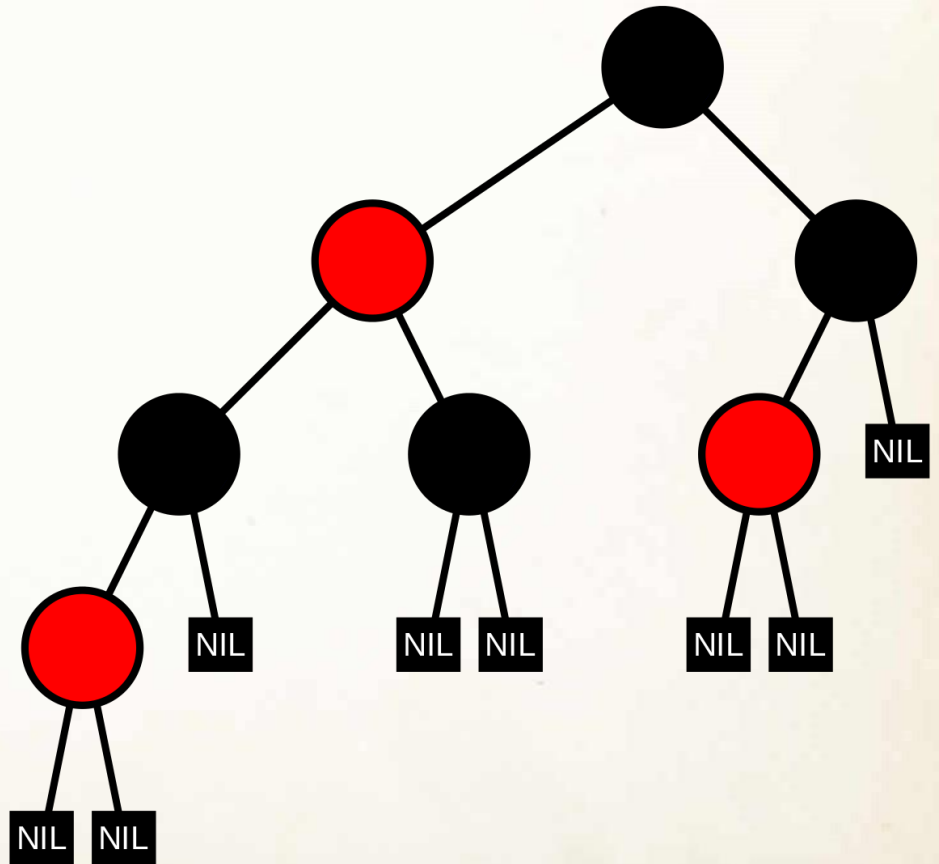
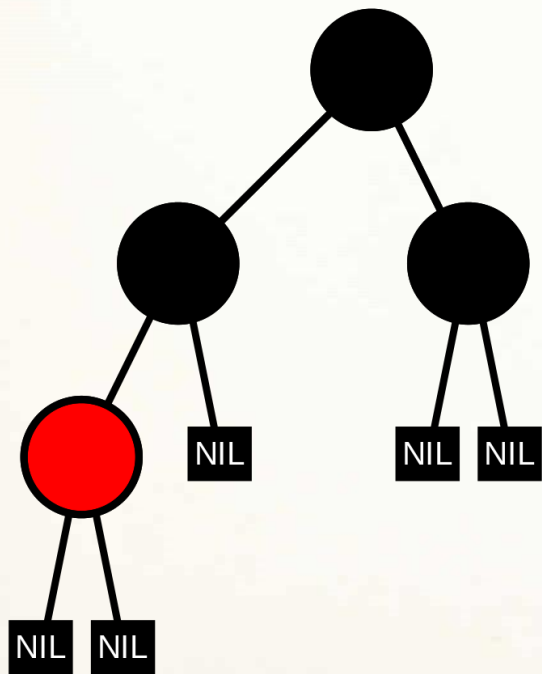
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

## ***Raudoni–juodi medžiai***

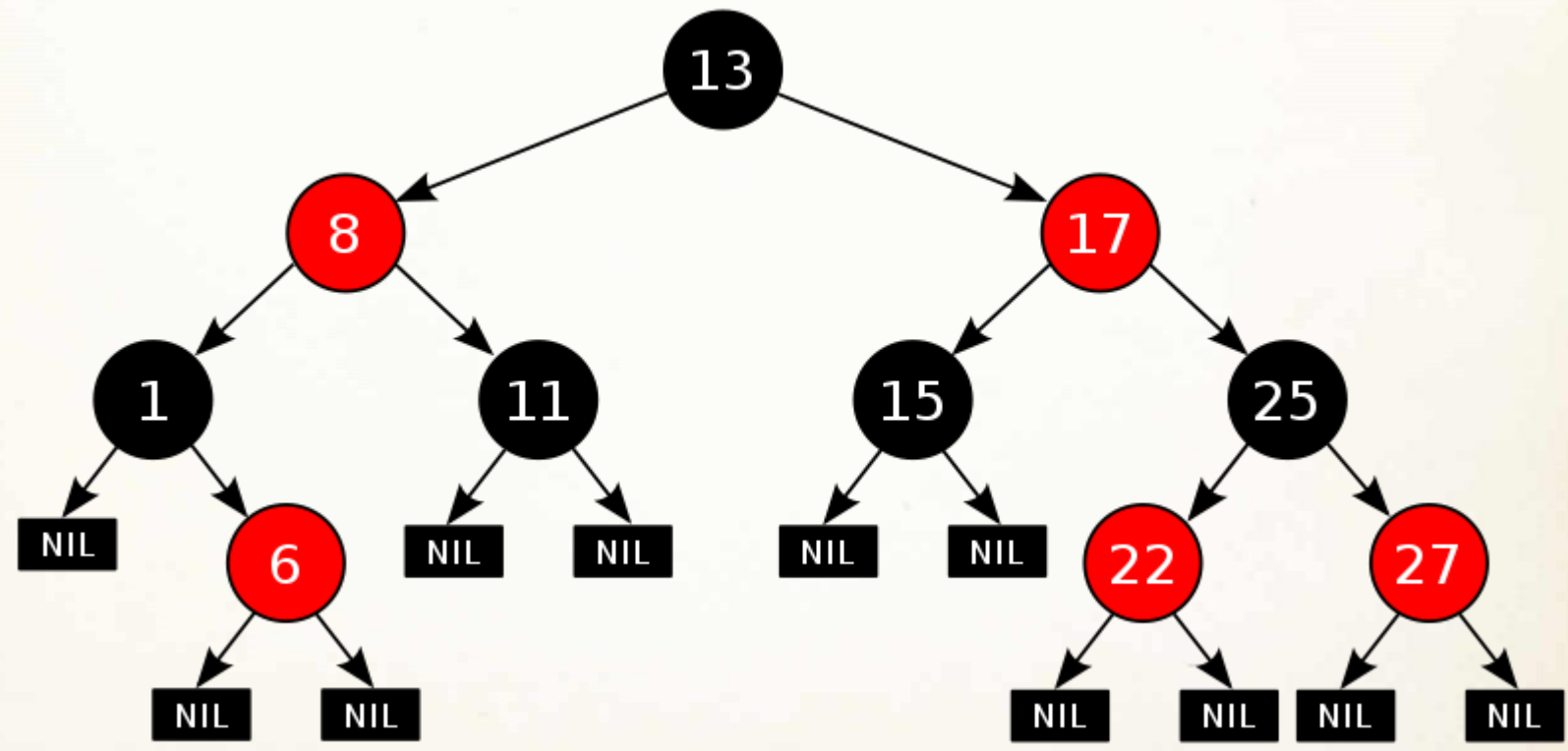
- Raudoniems–juodiems medžiams formuluojamos šios struktūrinės savybės:
  1. *Kiekviena viršūnė yra raudona arba juoda.*
  2. *Medžio šaknis visada yra juoda (jei šaknis nėra juoda, ją reikia padaryti juoda).*
  3. *Įterpiamos viršūnės yra raudonos.*
  4. *Kiekvienas takas nuo viršūnės iki jos lapų turi vienodai juodų viršūnių.*
  5. *Medžio lapai yra juodi (kartais žymimi NIL).*
  6. *Joks takas negali turėti 2 iš eilės einančių raudonų viršūnių.*



# Raudono-juodo medžio pavyzdžiai (1)



# Raudono-juodo medžio pavyzdžiai (2)

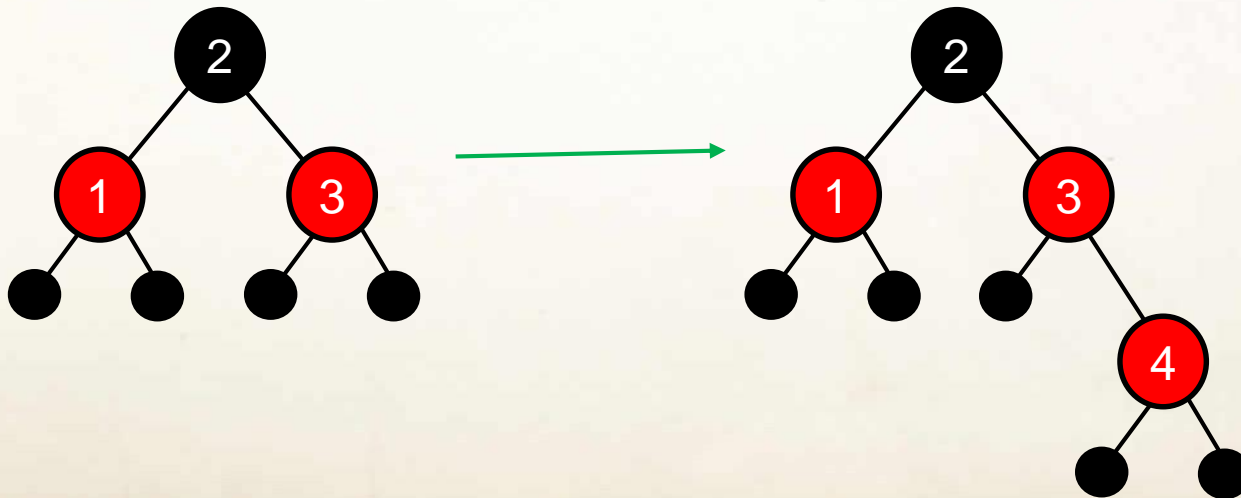


## ***Operacijos su raudonais–juodais medžiais***

- Elemento įterpimas
- Elemento šalinimas
- Medžio koregavimas:
  - Viršūnių spalvų keitimas.
  - Pomedžio sukimas į dešinę pusę.
  - Pomedžio sukimas į kairę pusę.

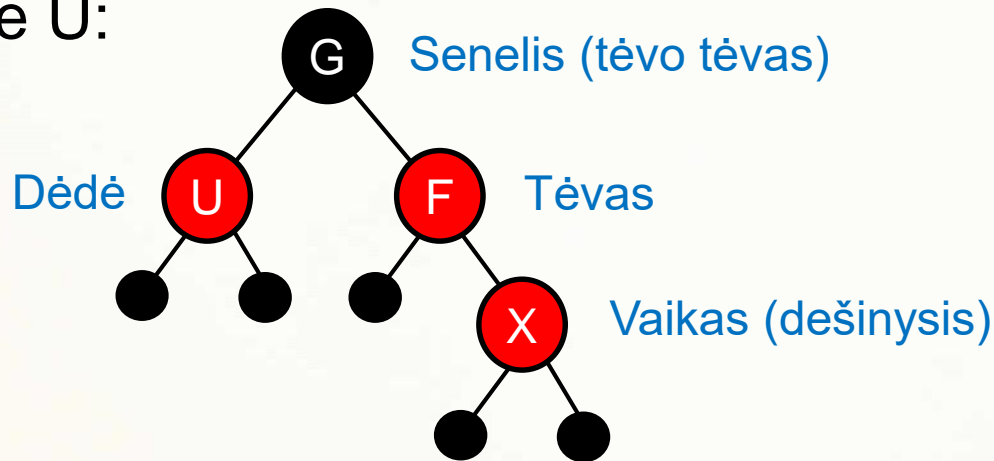
## *Elemento (viršūnės) įterpimas*

- Įterpiamai viršūnei priskiriamas raudonos spalvos atributas.
- Jei po viršūnės įterpimo medis nebetenkina raudono–juodo medžio apibrėžimo, reikalinga medžio korekcija, pavyzdžiui:



# Elemento (viršūnēs) ģterpimas: 3 atvejai

Pažymēkime ģterpiamo elemento X dēdē (*angl.* uncle) raide U:



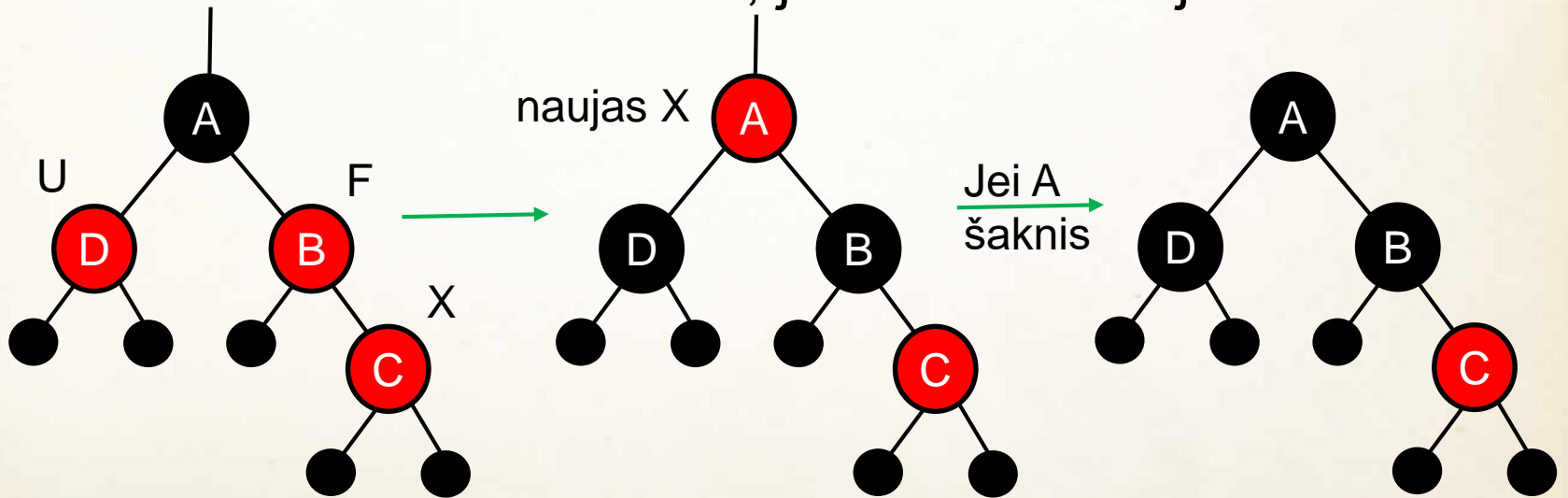
Galimos 3 situācijas:

- 1) F – raudonas ir U – raudonas
- 2) F – raudonas, U – juodas ir X – dešinysis vaikas
- 3) F – raudonas, U – juodas ir X – kairysis vaikas

# 1-oji situacija

F – raudonas ir U – raudonas:

- X tēvas ir U nudažomi juodai,
- X senelis nudažomas raudonai,
- X senelis tampa X,
- Jei senelis – medžio šaknis, jis nudažomas juodai.

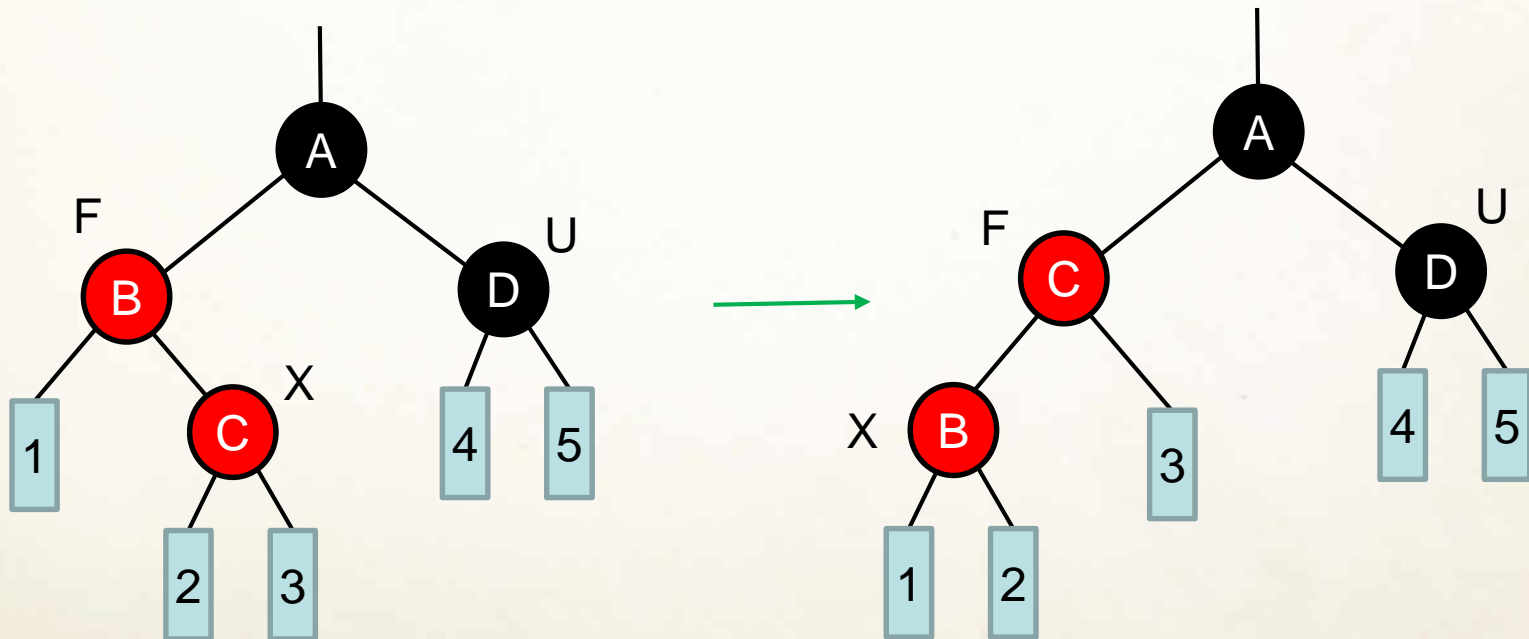


Pastaba: visi pateikti lapai gali būti ir pomedžiai.

## 2-oji situacija

F – raudonas, U – juodas ir X – dešinysis vaikas:

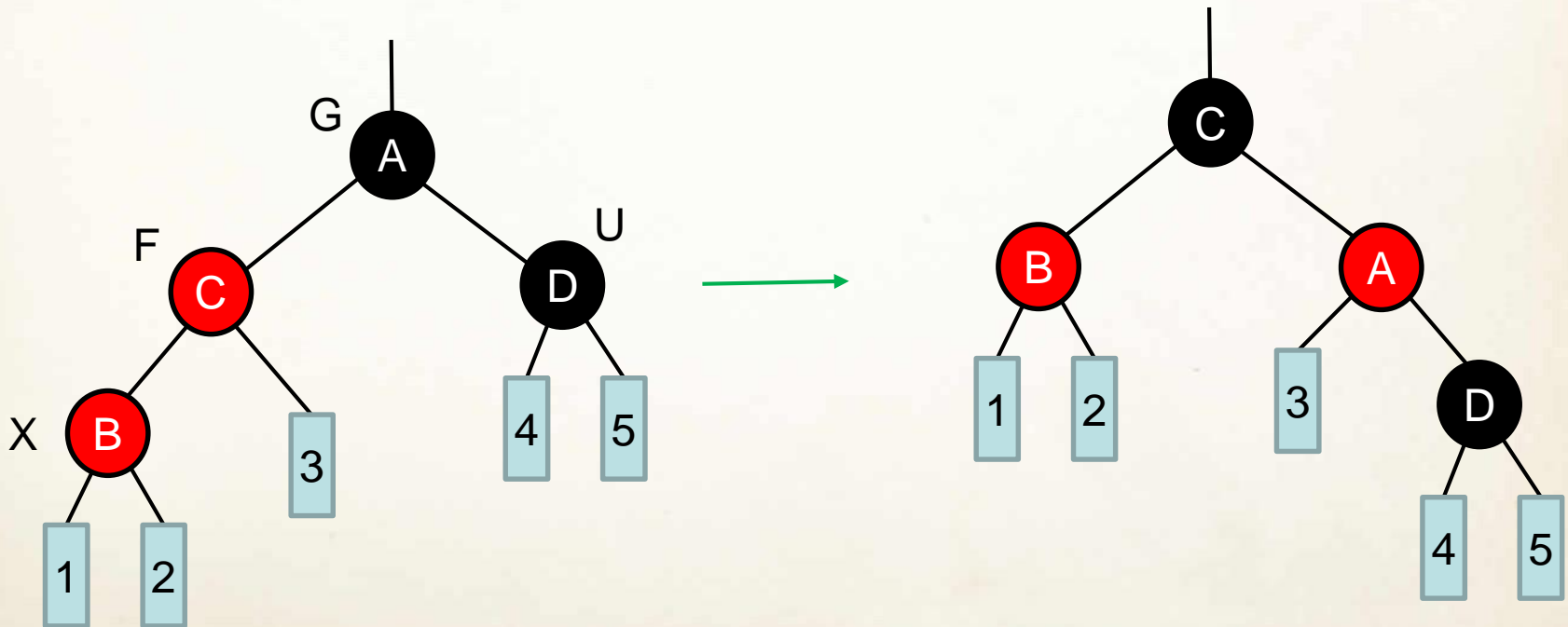
- X tėvas tampa X,
- Atliekamas sukimas į kairę apie X viršūnę (po šio sukimo visada seka 3 situacija).



## 3-oji situacija

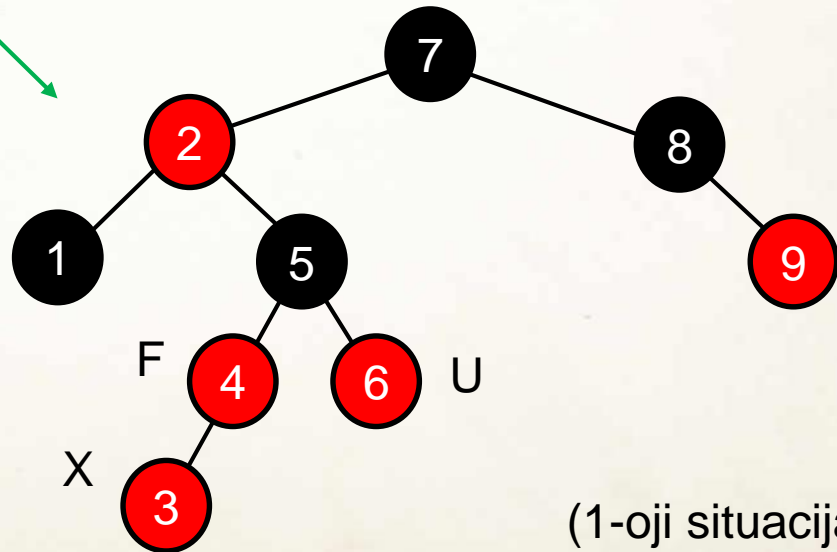
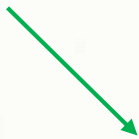
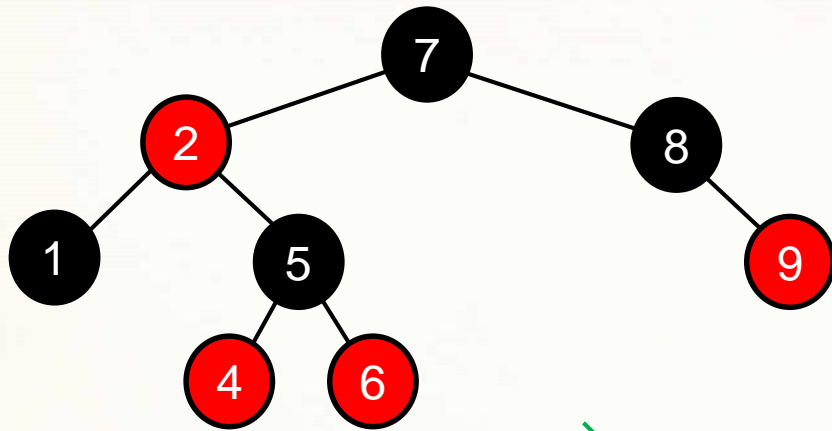
F – raudonas, U – juodas ir X – kairysis vaikas:

- X tėvas perdažomas juodai,
- X senelis perdažomas raudonai,
- Atliekamas sukimas į dešinę apie X tėvą.



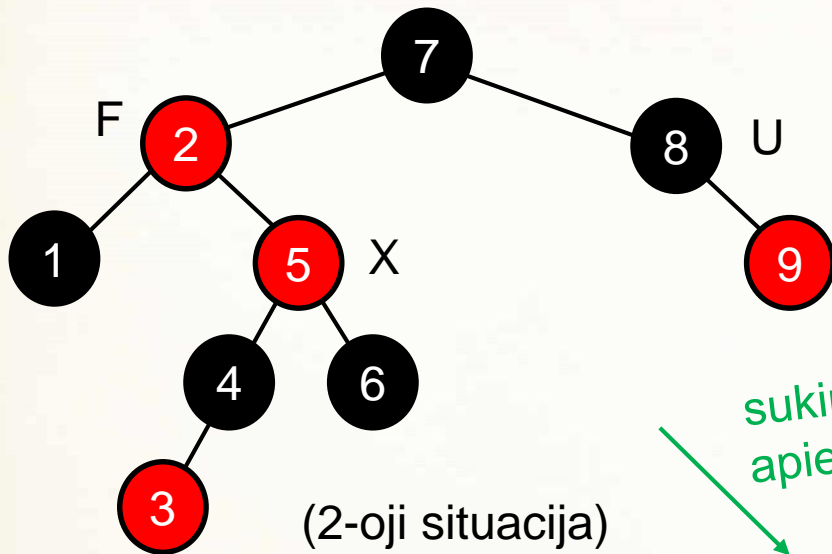


# Elemento įterpimo pavyzdys (1)

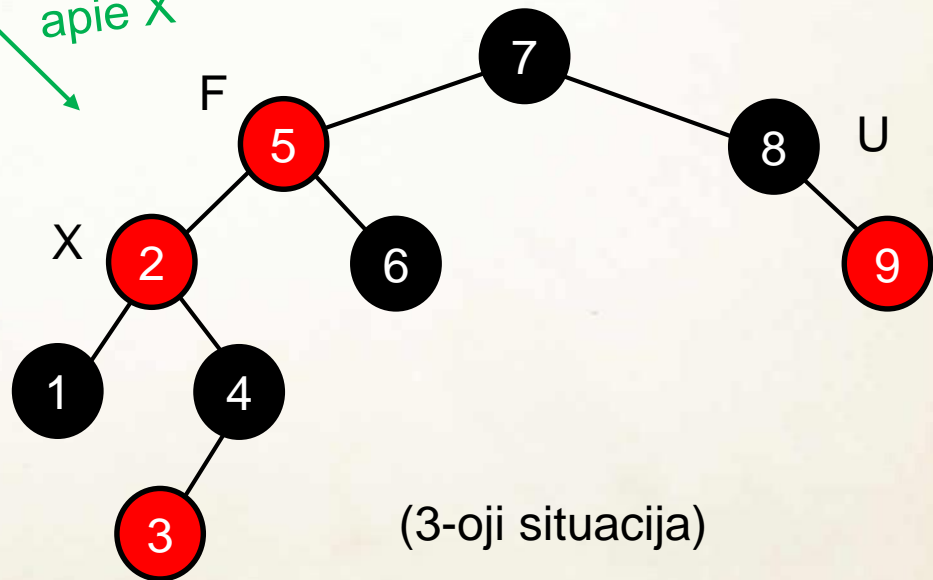


(1-oji situacija)

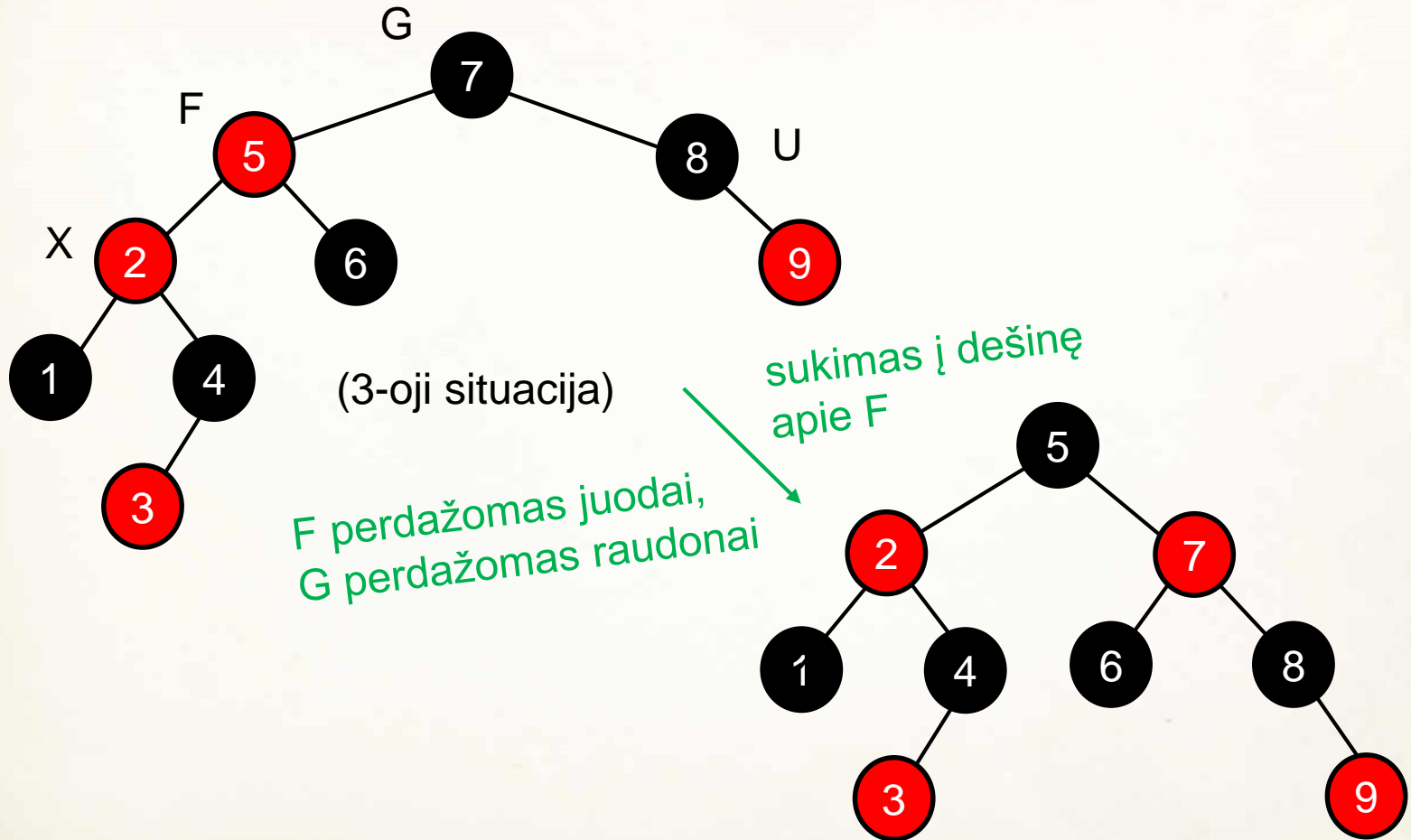
## Elemento įterpimo pavyzdys (2)



sukimas į kairę  
apie X

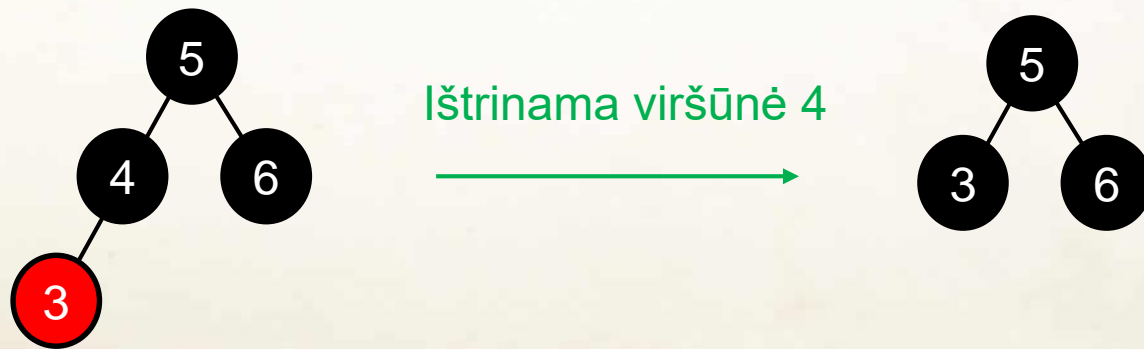


# Elemento įterpimo pavyzdys (3)



## *Elemento (viršūnės) šalinimas*

- Viršūnė pašalinama kaip ir įprastame dvejetainiame paieškos medyje (DPM), tačiau jei medis tampa ne raudonai–juodas, reikalinga korekcija:
  - Jei pašalinamas lapas arba raudona viršūnė, nieko koreguoti nereikia (pašalinimas kaip ir įprastame DPM).
  - Jei pašalinama vidinė juoda viršūnė, medis koreguojamas artimiausią raudoną viršūnę perdažant juodai, kuri pakeičia ištrintą viršūnę, pavyzdžiui:



***Ačiū už dėmesį.***

***Klausimai?***