

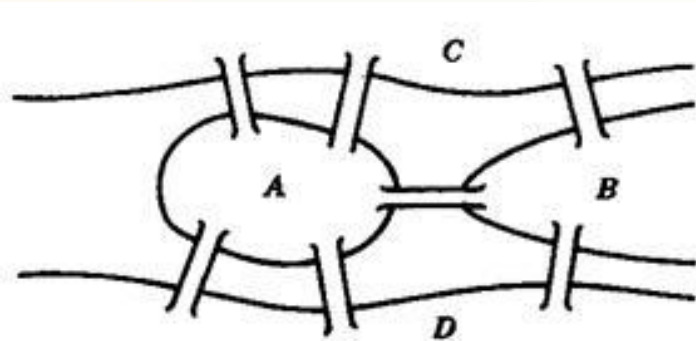
# ***Duomenų struktūros ir algoritmai***

6 paskaita

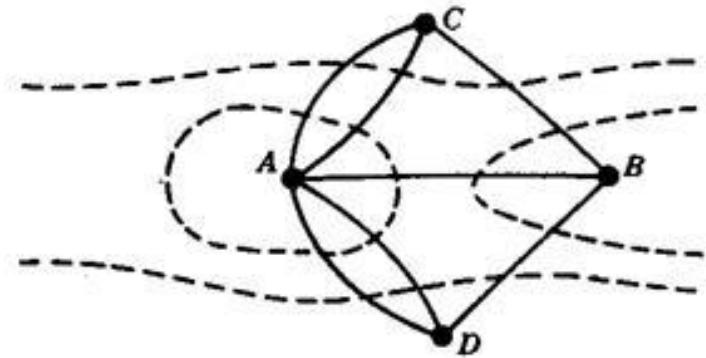
2020-03 (karantinas)

# 6 paskaitos tikslas

- Susipažinti su grafais ir jų užrašymo būdais.
- Išanalizuoti atskirą grafų klasę – medžius.
- Susipažinti su medžių vizualizacijos algoritmais.
- Kaip būtų galima pritaikyti off formatą grafų vizualizacijai?



Königsberg in 1736



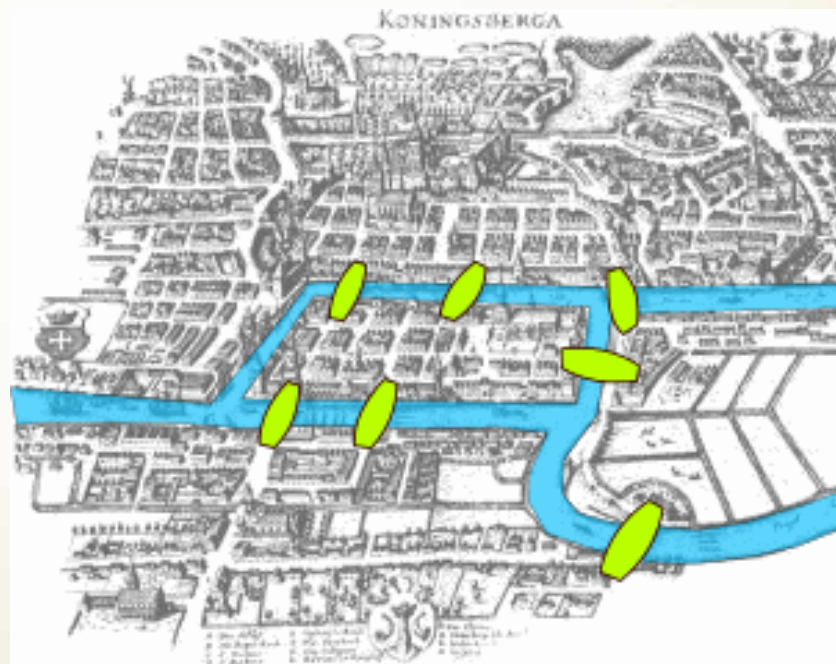
Euler's graphical representation

# Grafų teorija

- Atskira matematikos sritis, *grafų teorija*, atsirado XVIII amžiuje.
- Šios teorijos pradininku laikomas Leonardas Oileris, kuris, vartodamas grafo sąvoką, 1736 m. pirmasis išsprendė *Septynių Karaliaučiaus tiltų* uždavinį:

*Tarkime, kad Priegliaus upę galima kirsti tik pereinant kurį nors Karaliaučiaus tiltą. Ar tada įmanoma po vieną kartą pereiti septynis Karaliaučiaus tiltus?*

– Atsakymas: NE. Kodėl?

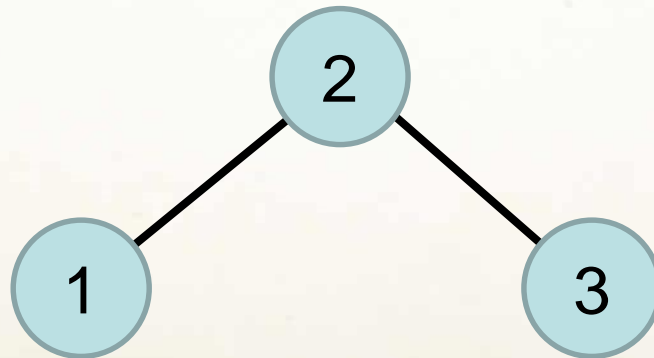


# *Grafo sąvoka*

- Grafu  $G$  vadinama viršūnių ir briaunų aibių pora  $(V, E)$  ir žymima

$$G = (V, E).$$

- *Pavyzdžiui*,  $G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$ :



## ***Grafo eilė ir dydis***

- Grafo  $G = (V, E)$  eilė vadinamas jo viršūnių skaičius:

$$|V| = n.$$

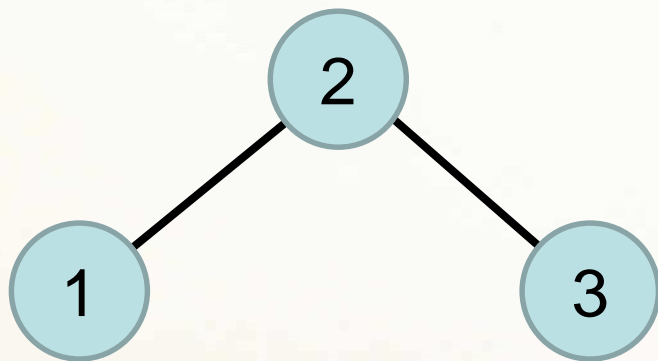
- Grafo  $G = (V, E)$  didumu (dydžiu) vadinamas jo briaunų skaičius:

$$|E| = m.$$

Žymėjimas  $|A|$  parodo aibės  $A$  galią (elementų skaičių), pavyzdžiui, jei  $A = \{2, 3, 5, 7\}$ , tai  $|A| = 4$ .

## ***Gretimumo ir incidentumo sąryšiai***

- Viršūnės grafe vadinamos gretimomis, jei jas jungia briauna.
- Gretimumo sąrašu  $Adj[u]$  vadinamas viršūnei  $u \in V$  gretimų viršūnių sąrašas, pavyzdžiui:

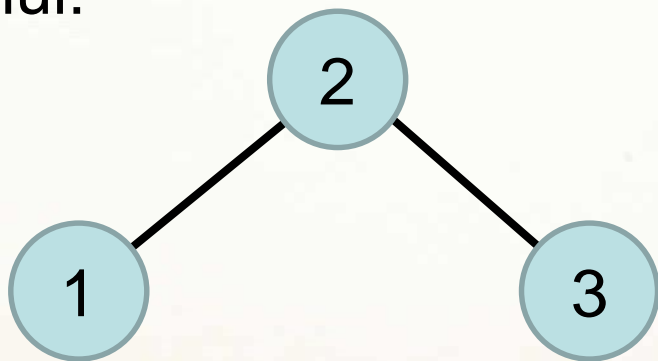


$Adj[1]=1, Adj[2]=[1,3], Adj[3]=[2].$



## ***Gretimumo ir incidentumo sąryšiai***

- Grafo  $G = (V, E)$  briauna žymima  $uv$ , čia  $u, v \in V$  ir galioja sąryšis:  $v \in Adj[u]$ .
- Tokiu atveju sakoma, kad viršūnė  $u$  yra incidenti briaunai  $uv$  (analogiškai,  $v$  yra incidenti  $uv$ ), pavyzdžiui:



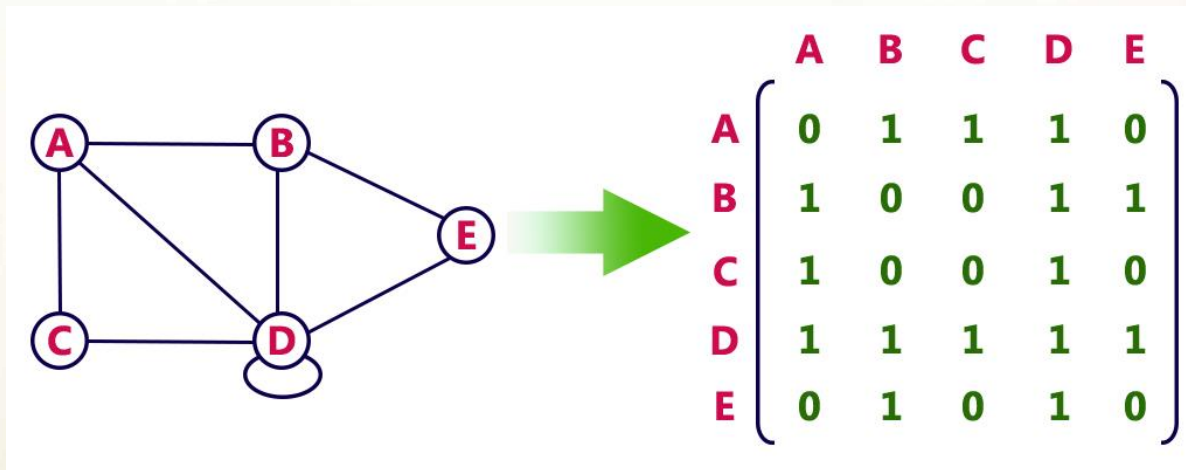
*Viršūnės 1 ir 2 yra incidenčios briaunai  $\{1,2\}$ .*

- Pastaba: briauna  $vv$ ,  $v \in V$  vadinama kilpa.

# Grafo užrašymas gretimumo matrica

- Grafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times n$  gretimumo matrica  $A = (a_{ij})$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei viršūnės } i \text{ ir } j \text{ yra gretimos,} \\ 0, & \text{jei viršūnės } i \text{ ir } j \text{ nėra gretimos.} \end{cases}$$



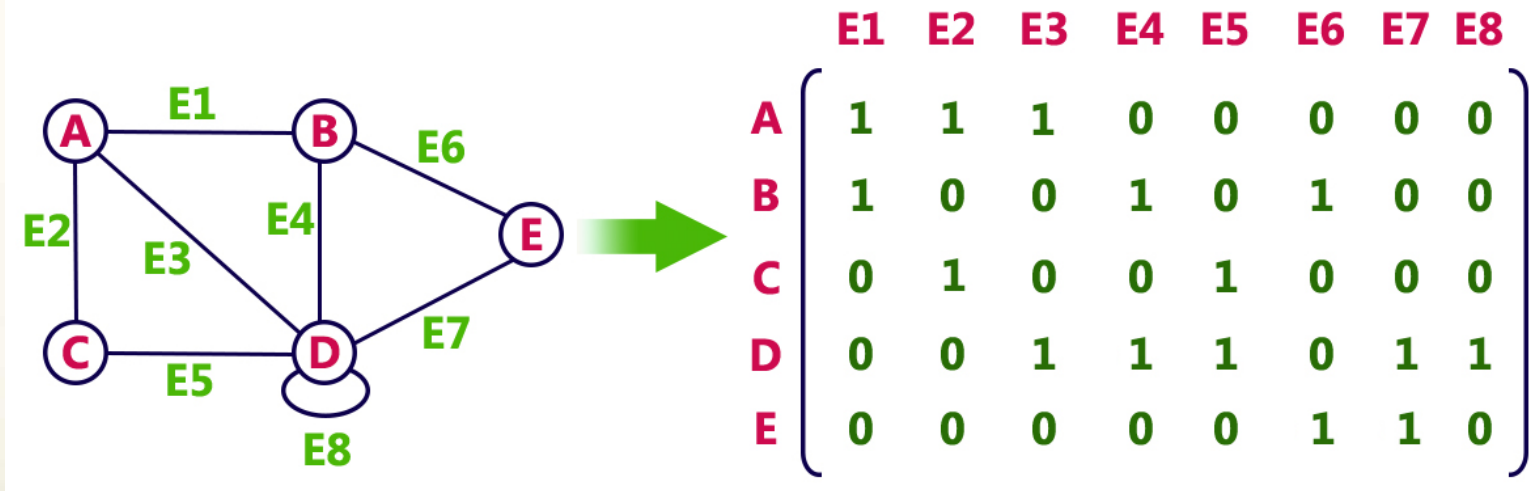
- *Pastaba: kilpos atveju viršūnė yra gretima pati sau.*



# Grafo užrašymas incidentumo matrica

- Grafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times m$  incidentumo matrica  $B = (b_{ij})$ :

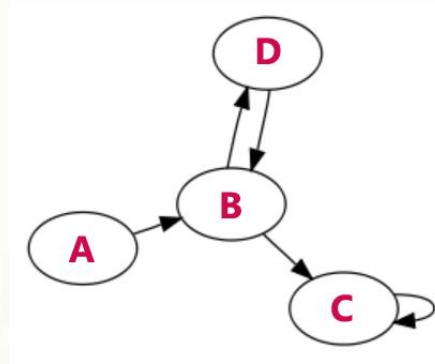
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei viršūnė } i \text{ yra incidenti briaunai } j, \\ 0, & \text{jei viršūnė } i \text{ nėra incidenti briaunai } j. \end{cases}$$



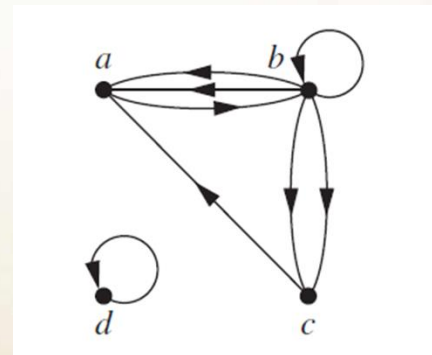
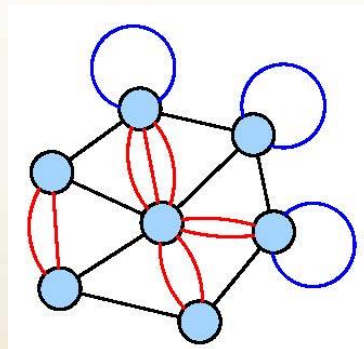
- *Pastaba: kilpos atveju tik viena viršūnė incidenti briaunai*

# Digrafai ir multigrafai

- Digrafu vadinamas orientuotas grafas  $G = (V, E)$ , t. y. grafas, kurio briaunos turi kryptis:



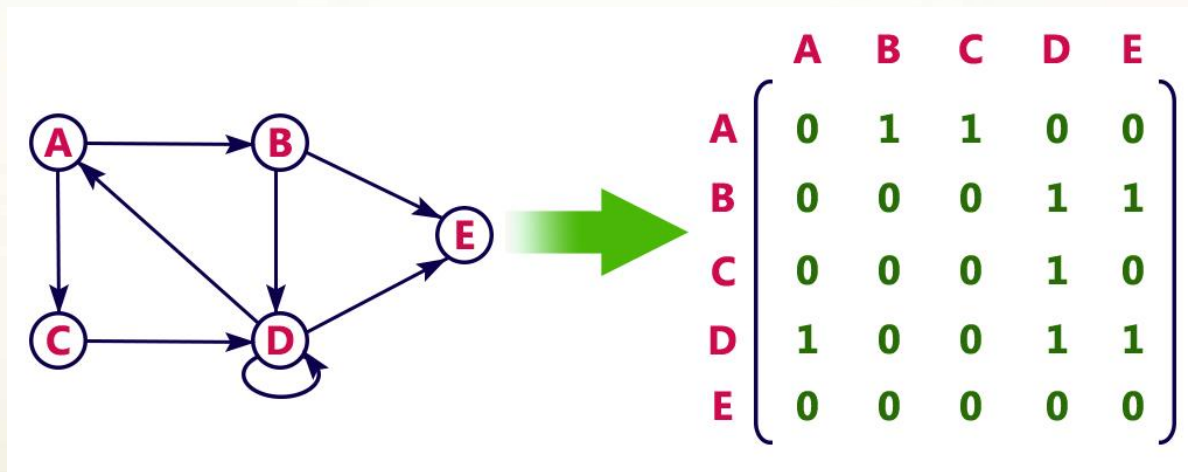
- Multigrafu vadinamas grafas (digrafas), kurio dvi viršūnes gali jungti daugiau nei 1 briauna (tos pačios krypties briauna):



# Digrafo užrašymas gretimumo matrica

- Dirafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times n$  gretimumo matrica  $A = (a_{ij})$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei briaunos kryptis iš viršūnės } i \text{ į } j, \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

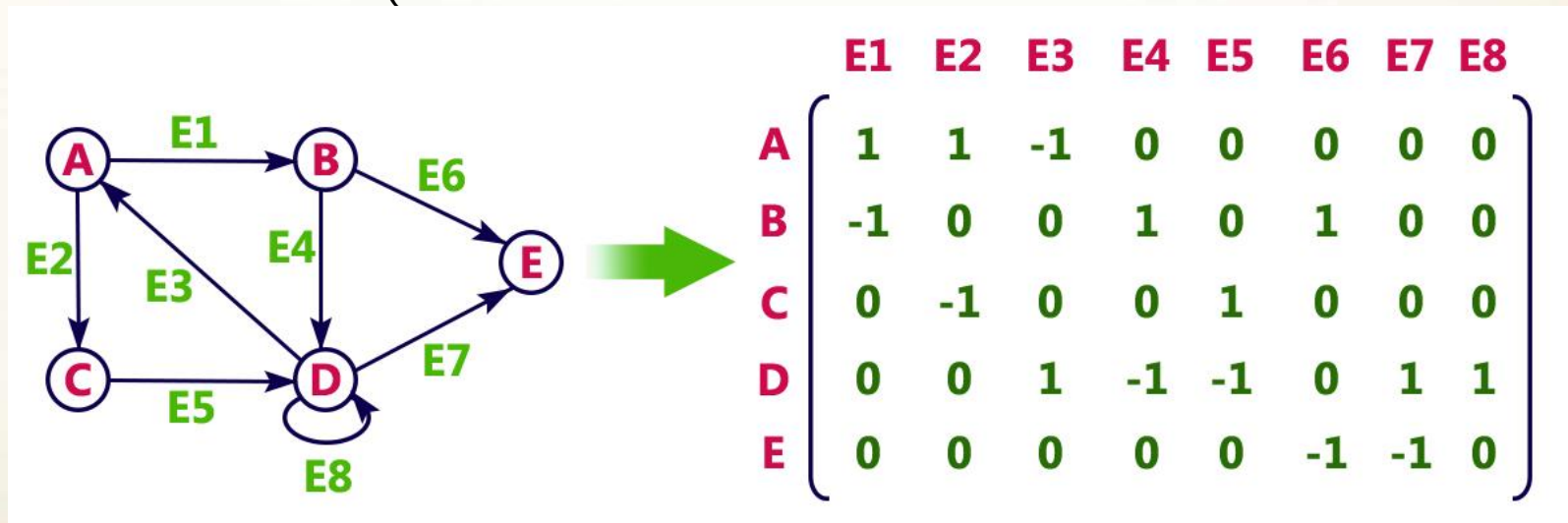


- *Pastaba: kilpos atveju kryptis iš viršūnės  $j$  pačia ją*

# Digrafo užrašymas incidentumo matrica

- Grafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times m$  incidentumo matrica  $B = (b_{ij})$ :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ yra pradinė briaunos } j \text{ viršūnė,} \\ -1, & \text{jei } i \text{ yra galinė briaunos } j \text{ viršūnė,} \\ 0, & \text{jei viršūnė } i \text{ nėra incidenti briaunai } j. \end{cases}$$



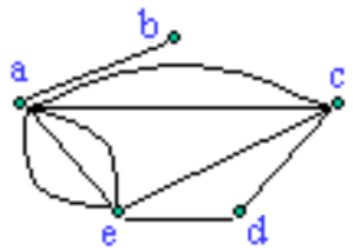
- *Pastaba: kilpos atveju tik viena viršūnė pradinė*

# Multigrafo užrašymas gretimumo matrica

- Multigrafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times n$  gretimumo matrica  $A = (a_{ij})$ :

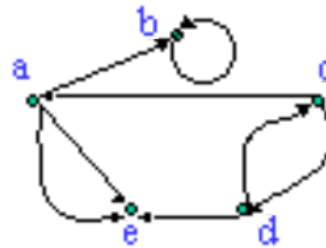
$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{jei per } k \text{ briaunų galima patekti iš viršūnės } i \text{ į } j, \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

**Multigrafas:**



	a	b	c	d	e
a	0	1	2	0	3
b	1	0	0	0	0
c	2	0	0	1	1
d	0	0	1	0	1
e	3	0	1	1	0

**Multidigrafas:**



	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	2
b	0	1	0	0	0
c	1	0	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	0	0



# Multigrafo užrašymas incidentumo matrica

- Multigrafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times m$  gretimumo matrica  $B = (b_{ij})$ :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ viršūnė yra incidenti } j \text{ briaunai, kuri nėra kilpa,} \\ 2, & \text{jei } i \text{ viršūnė yra incidenti } j \text{ briaunai, kuri yra kilpa,} \\ 0, & \text{jei } i \text{ viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$

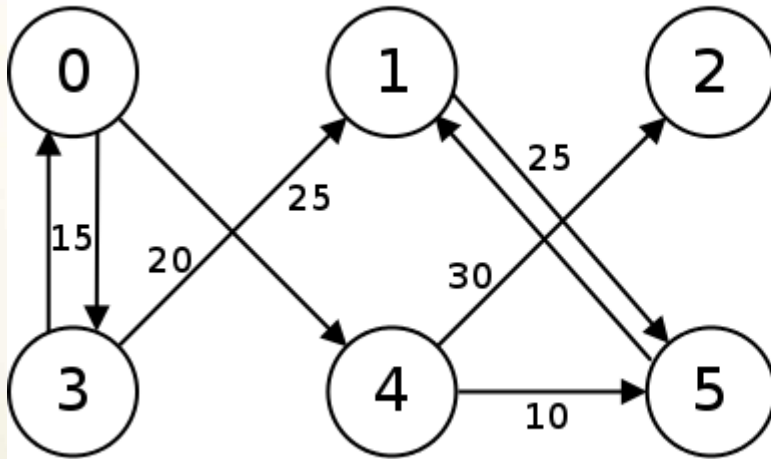
- Bekilpis multidigrafas  $G = (V, E)$  užrašomas kvadratine  $n \times m$  gretimumo matrica  $B = (b_{ij})$ :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ yra pradinė } j \text{ briaunos viršūnė,} \\ -1, & \text{jei } i \text{ yra galinė } j \text{ briaunos viršūnė,} \\ 0, & \textit{i viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$



# Svoriniai grafai

- Svoriniu grafu (digrafu) vadinamas grafas  $G = (V, E, w)$ , kurio briaunoms priskirtas svorio atributas (pavyzdžiui atstumas tarp viršūnių).
- Svoriniai grafai (digrafai) dažniausiai apibrėžiami gretimumo matricomis, kuriose reikšmė 1 keičiama briaunos svoriu, pavyzdžiui:



	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	15	20	0
1	0	0	0	0	0	25
2	0	0	0	0	0	0
3	15	25	0	0	0	0
4	0	0	30	0	0	10
5	0	25	0	0	0	0

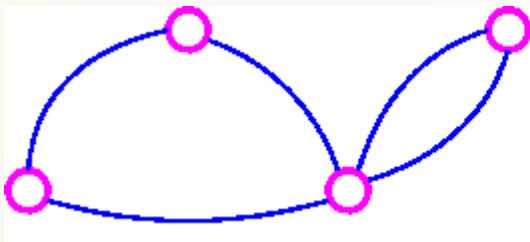
# Kitos grafų teorijos sąvokos

- Taku grafe (digrafe) vadinama viršūnių seka

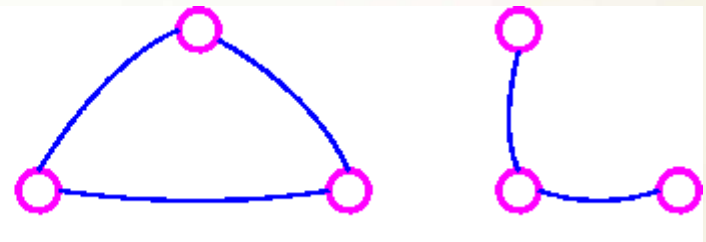
$$v_1, v_2, \dots, v_n,$$

kurioje briauna galima nukelti iš  $v_i$  viršūnės į  $v_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ .

- Grafas vadinamas jungiu, jei bet kurias dvi jo viršūnes jungia takas, kitu atveju grafas nėra jungus.



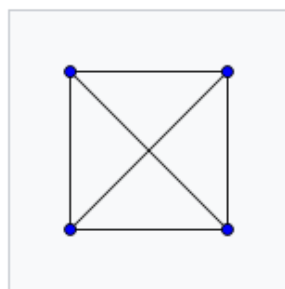
Jungus grafas.



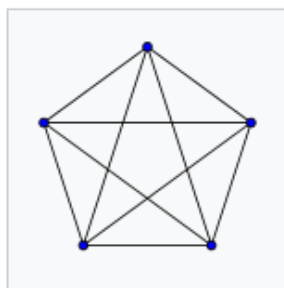
Nejungus grafas.

# *Pilnasis grafas*

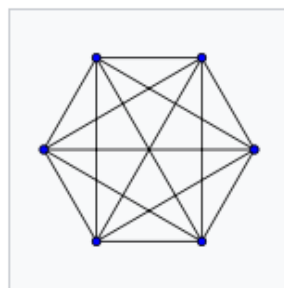
- Grafas vadinamas pilnuoju, jei bet kurias dvi jo viršūnes jungia briauna. Pilnasis grafas žymimas  $K_n$  ir turi  $n(n-1)/2$  briaunų:



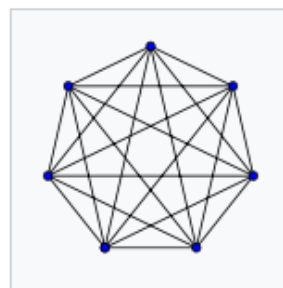
$K_4$



$K_5$



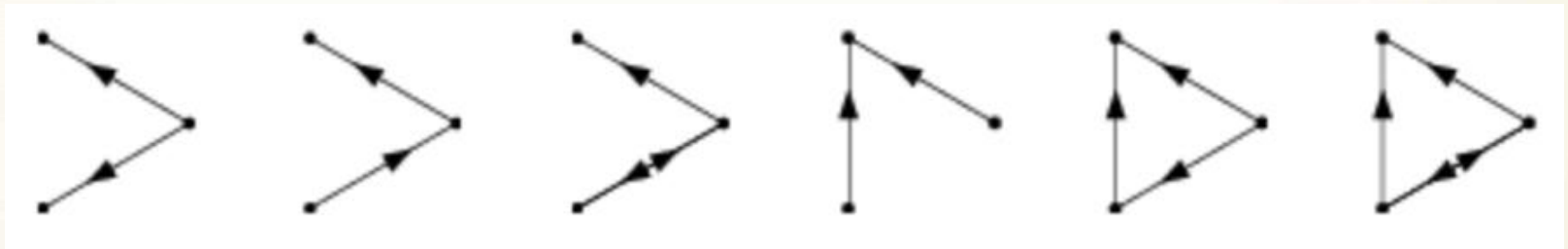
$K_6$



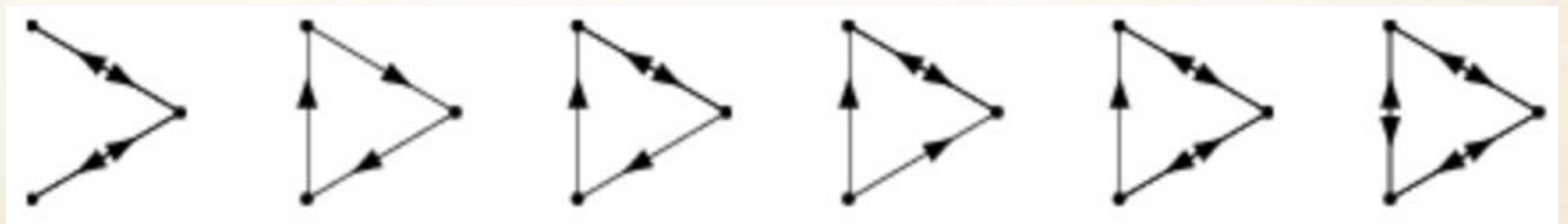
$K_7$

# Kitos grafų teorijos sąvokos

- Digrafas vadinamas silpnai jungiu, jei, ignoruojant briaunų kryptis, bet kurias dvi jo viršūnes jungia takas:

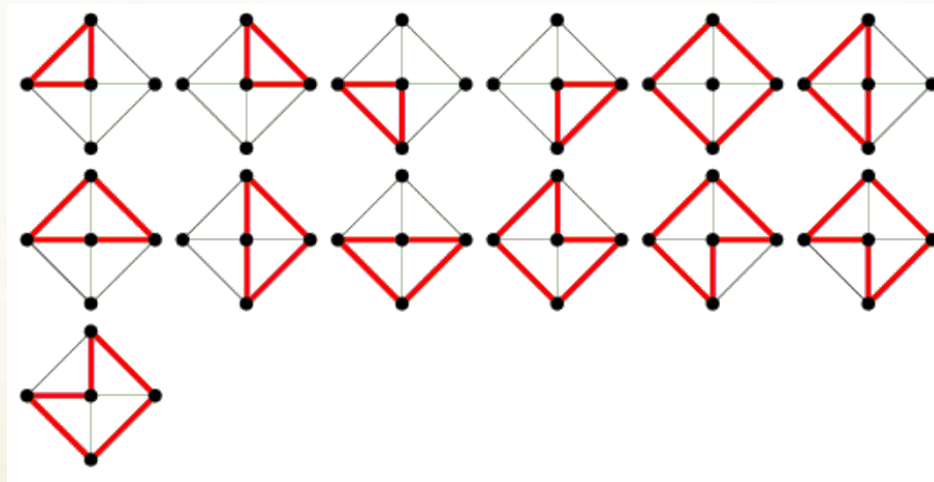
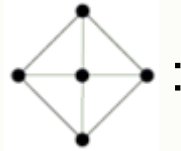


- Digrafas vadinamas stipriai jungiu, jei egzistuoja takas tarp bet kurių dviejų jo viršūnių (neignoruojant briaunų kryptių):



# Kitos grafų teorijos sąvokos

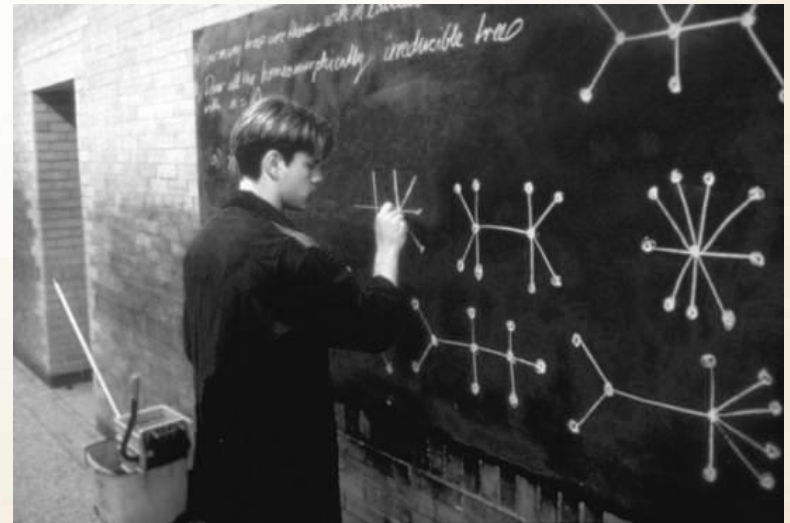
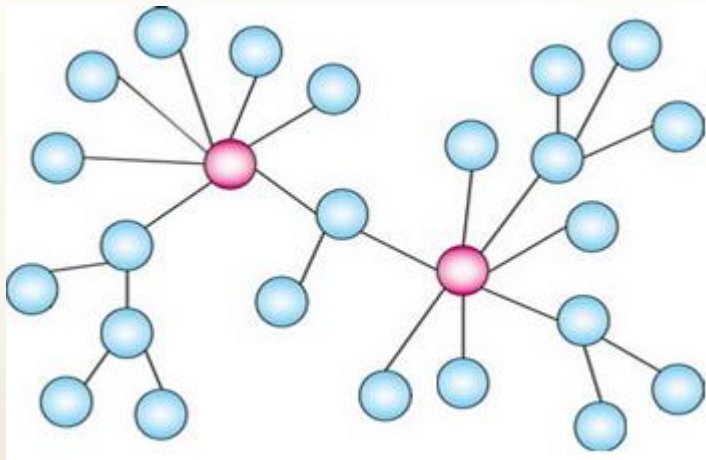
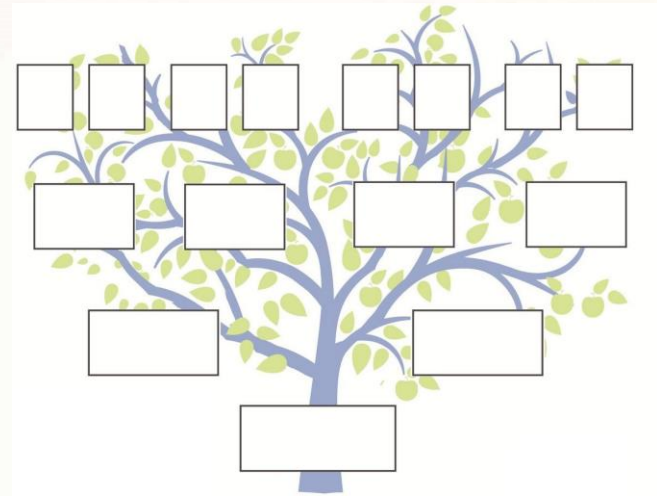
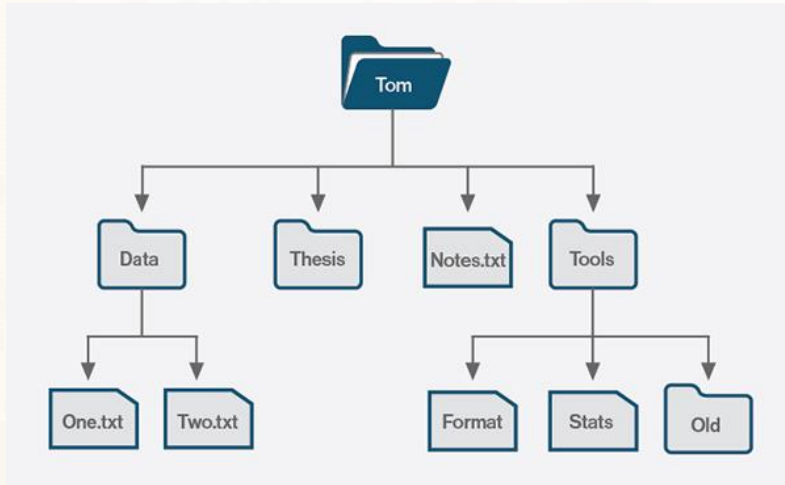
- Ciklu grafe vadinamas bent dviejų viršūnių takas, kurio pradžia ir pabaiga sutampa.
- Cikliniu grafu vadinamas grafas, turintis bent vieną ciklą.
- Ciklų pavyzdžiai grafe



- Medžiu vadinamas jungus grafas, neturintis ciklų.



# Medžiai

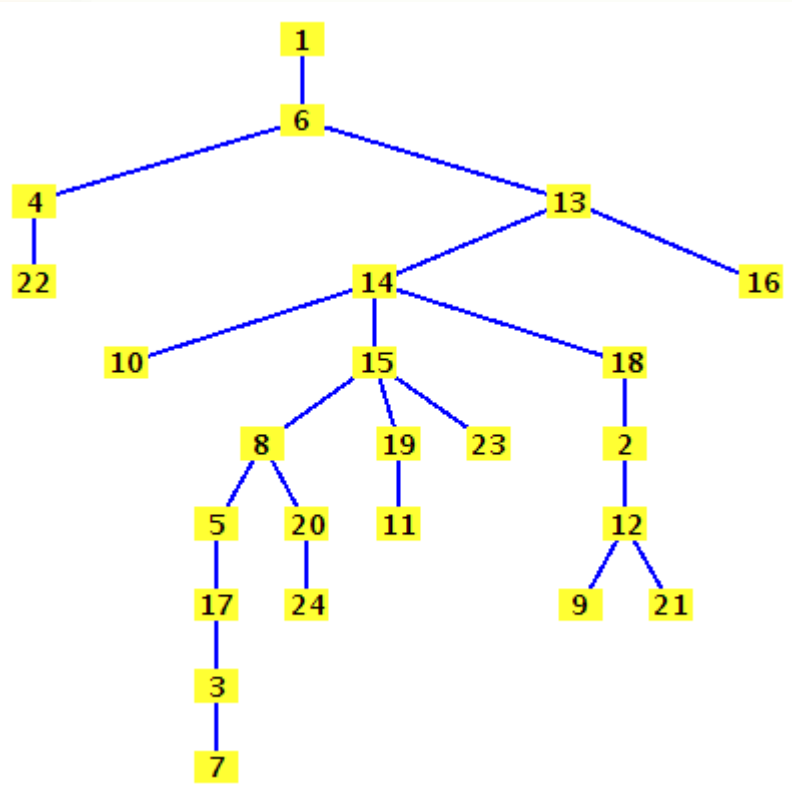




## ***Medžių užrašymo būdai***

- Gretimumo matrica.
- Incidentumo matrica.
- Briaunų aibe.
- Priuferio kodu.

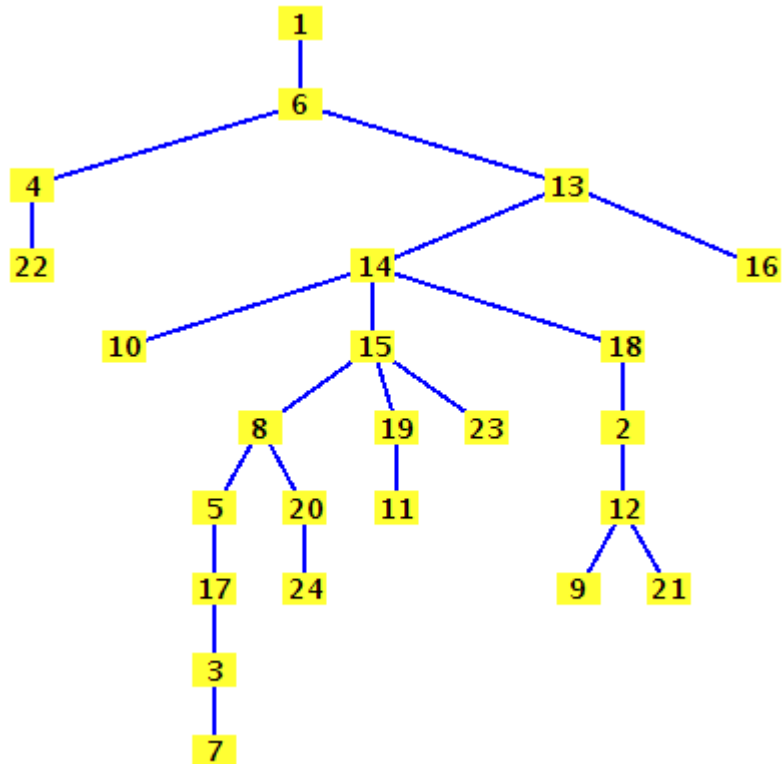
# Medžio užrašymas gretimumo matrica



0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

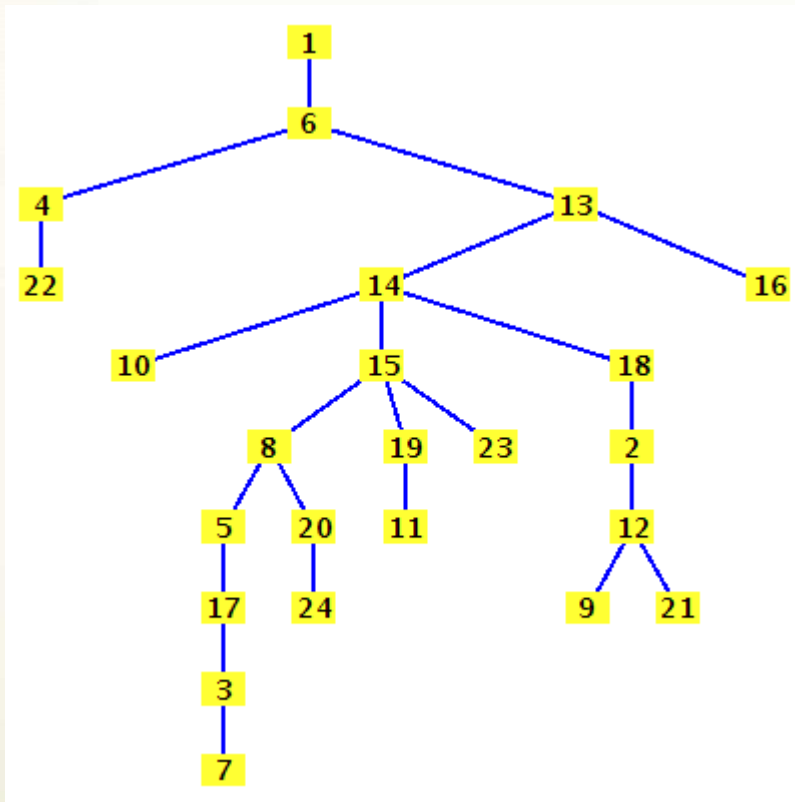


# Medžio užrašymas briaunų aibe



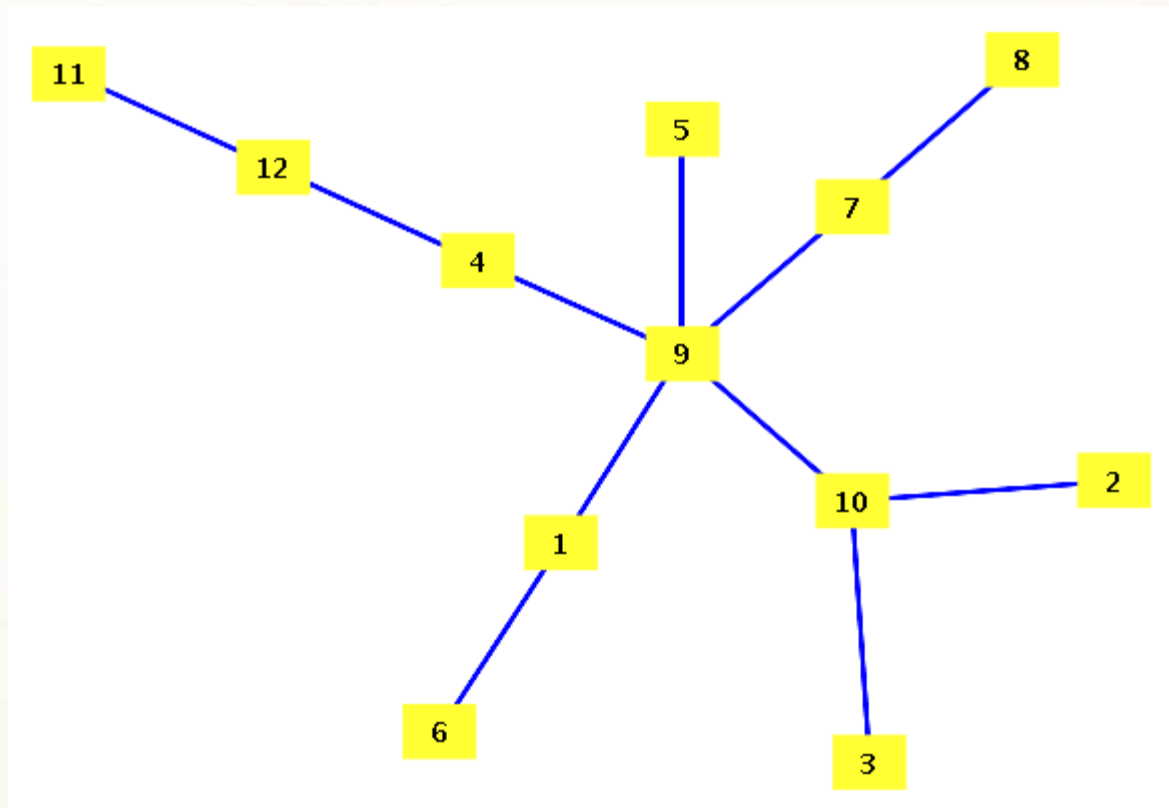
$E = \{\{1, 6\}, \{2, 12\}, \{2, 18\}, \{3, 7\}, \{3, 17\},$   
 $\{4, 6\}, \{4, 22\}, \{5, 8\}, \{5, 17\}, \{6, 13\}, \{8, 15\},$   
 $\{8, 20\}, \{9, 12\}, \{10, 14\}, \{11, 19\}, \{12, 21\},$   
 $\{13, 14\}, \{13, 16\}, \{14, 15\}, \{14, 18\}, \{15, 19\},$   
 $\{15, 23\}, \{20, 24\}\}$

# Medžio užrašymas Priuferio kodu



$\alpha = [6, 3, 17, 12, 14, 19, 13, 5, 8, 15, 12, 2, 18, 14, 4, 6, 13, 14, 15, 15, 8, 20]$

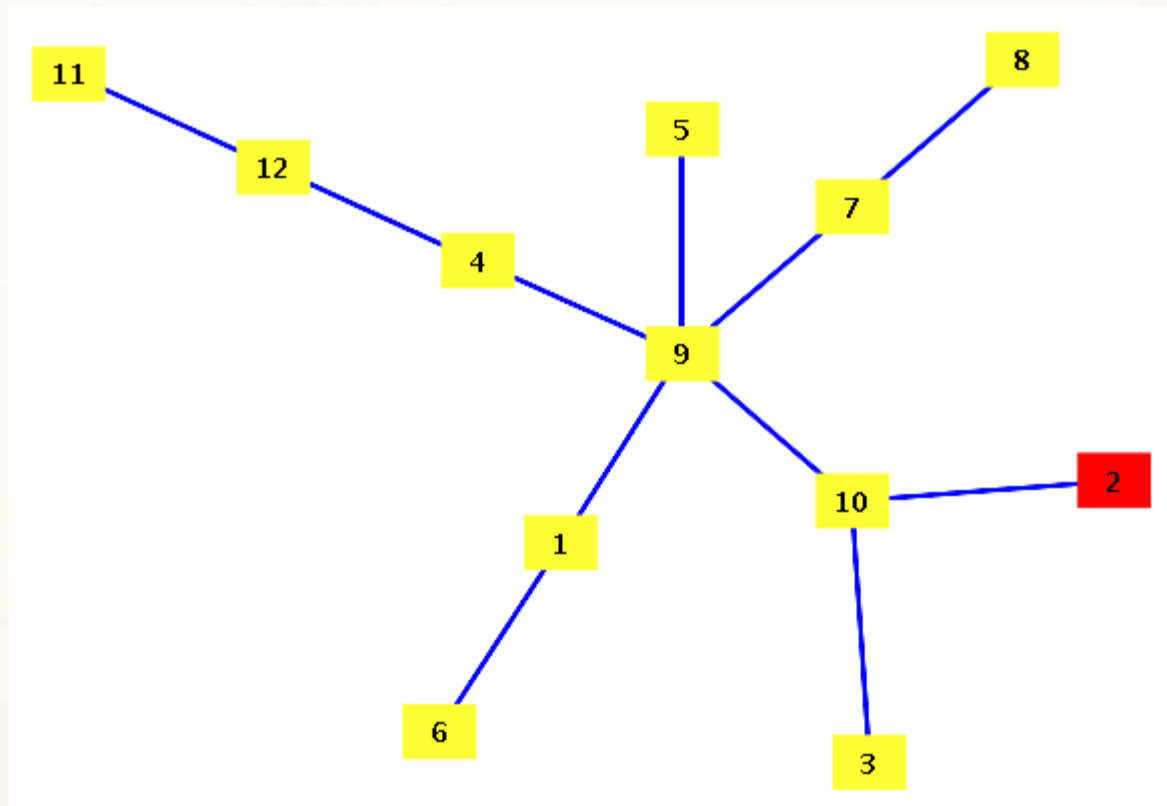
# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



$$\alpha = []$$

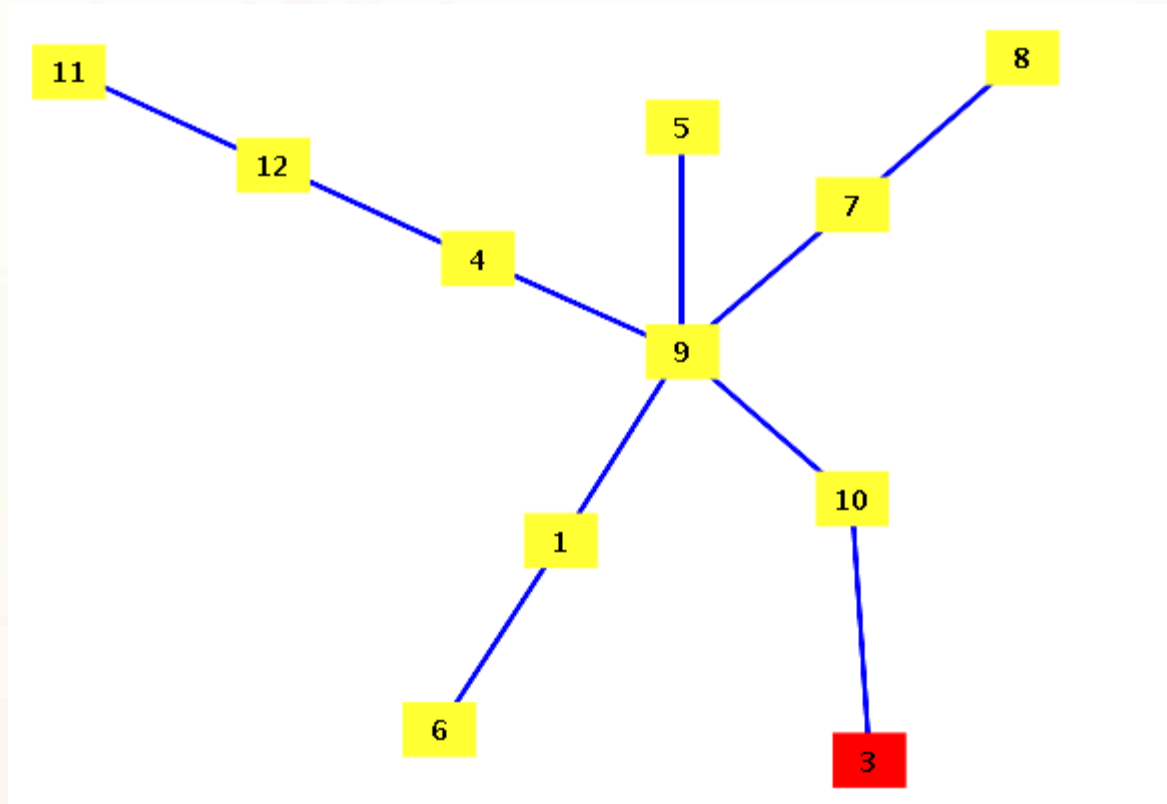


# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



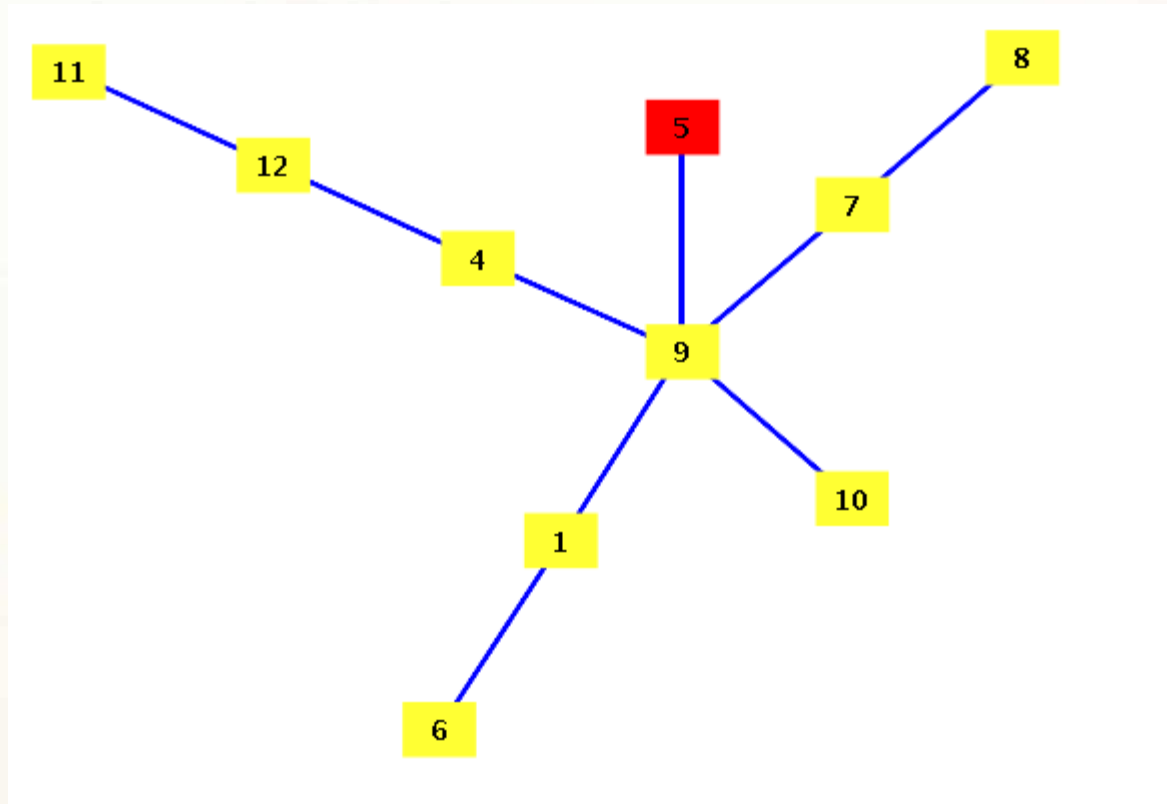
$$\alpha = [10]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



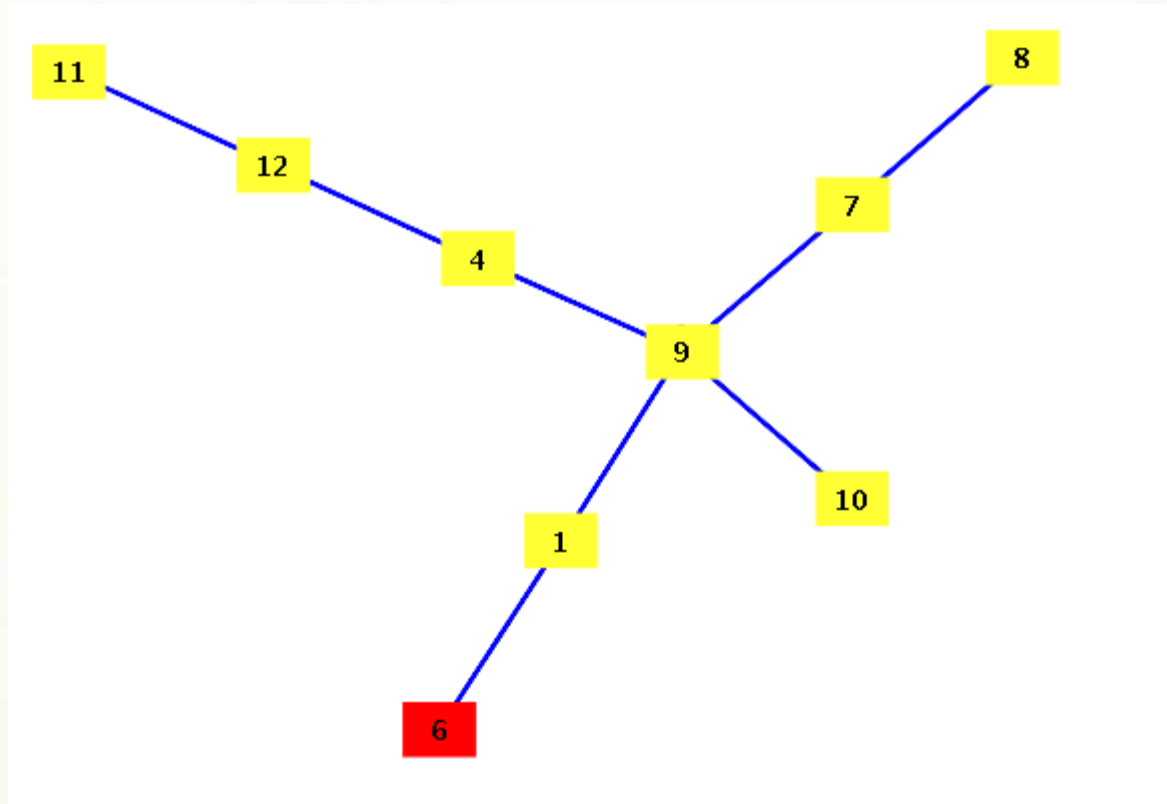
$$\alpha = [10, 10]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



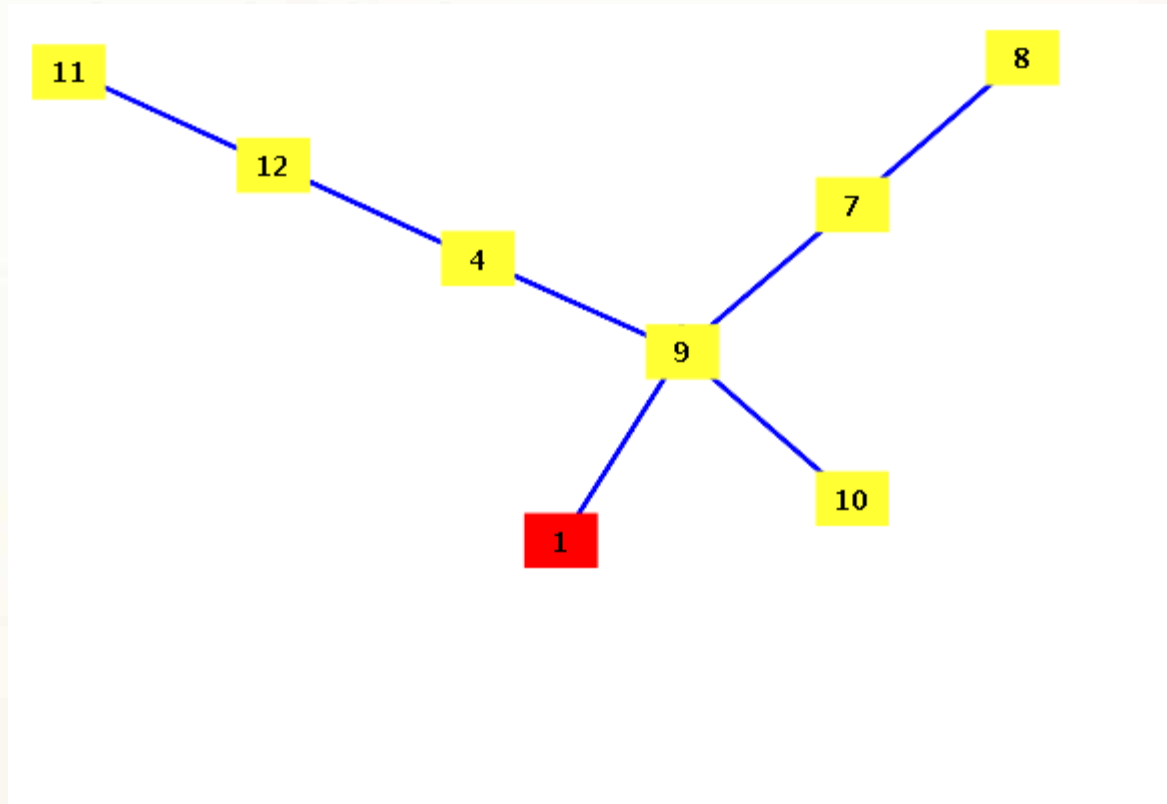
$$\alpha = [10, 10, 9]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



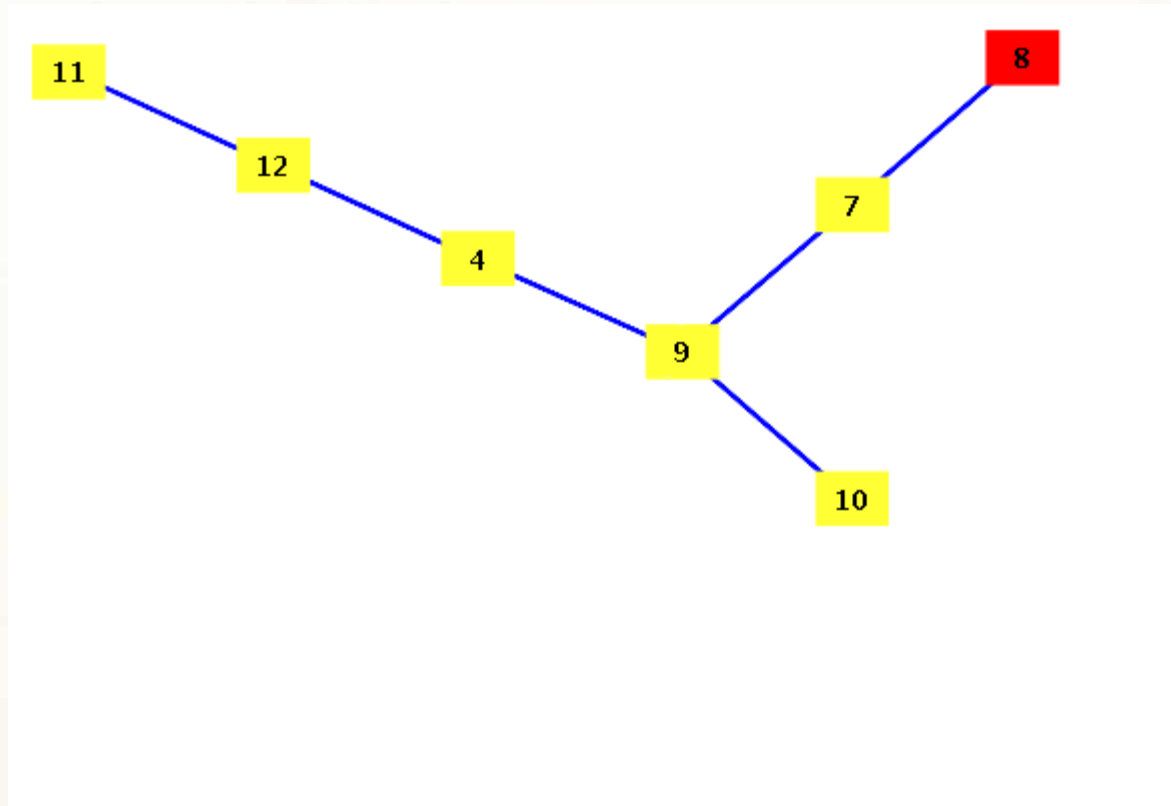
$$\alpha = [10, 10, 9, 1]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9]$$

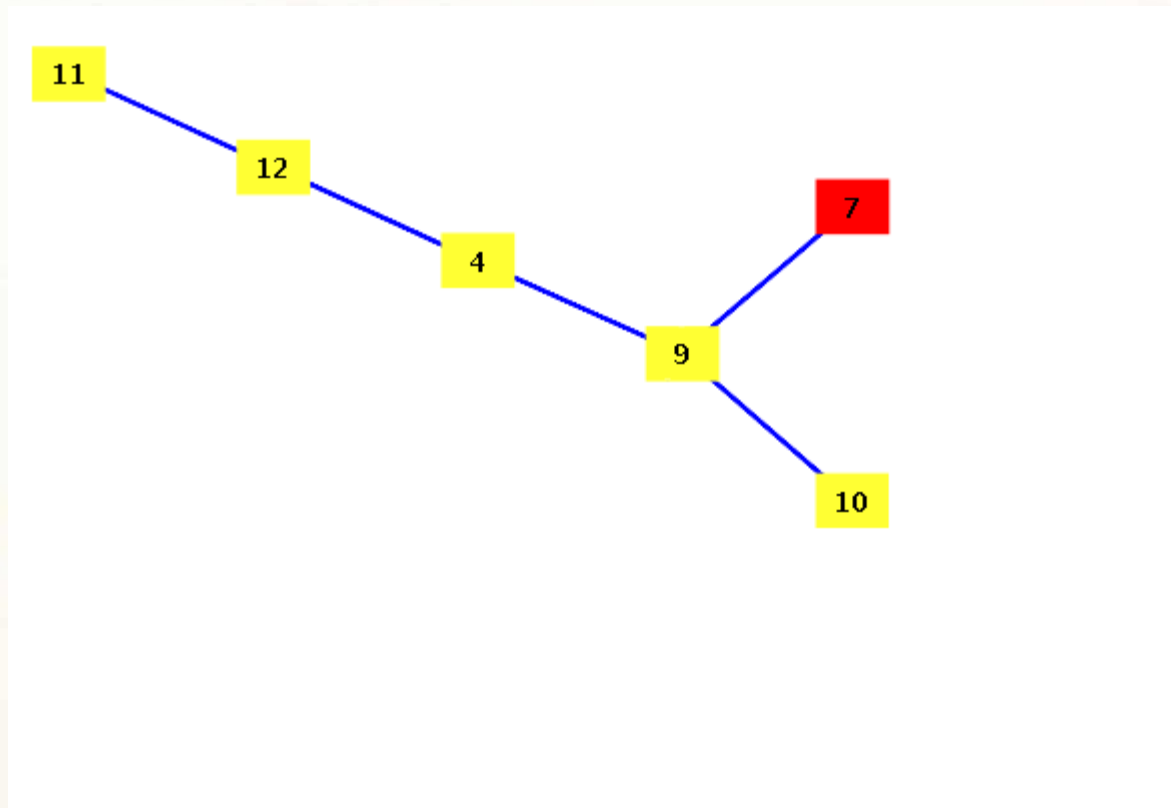
# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7]$$

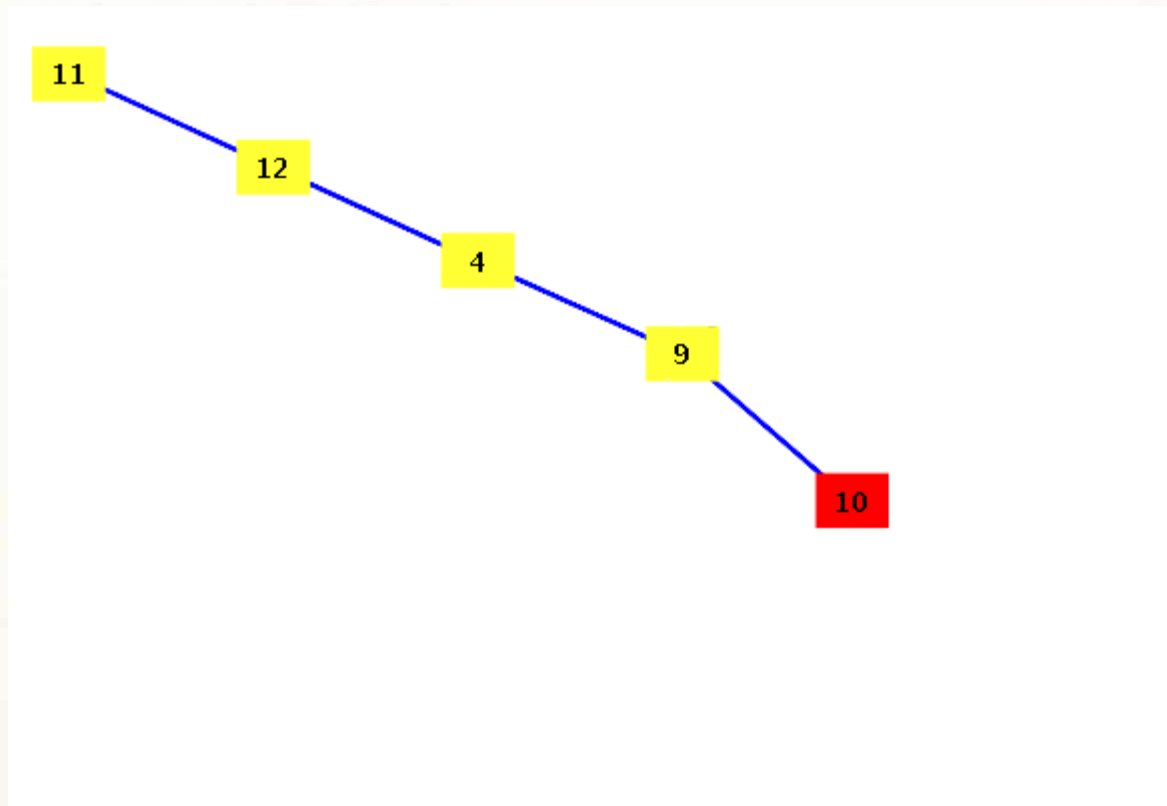


# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



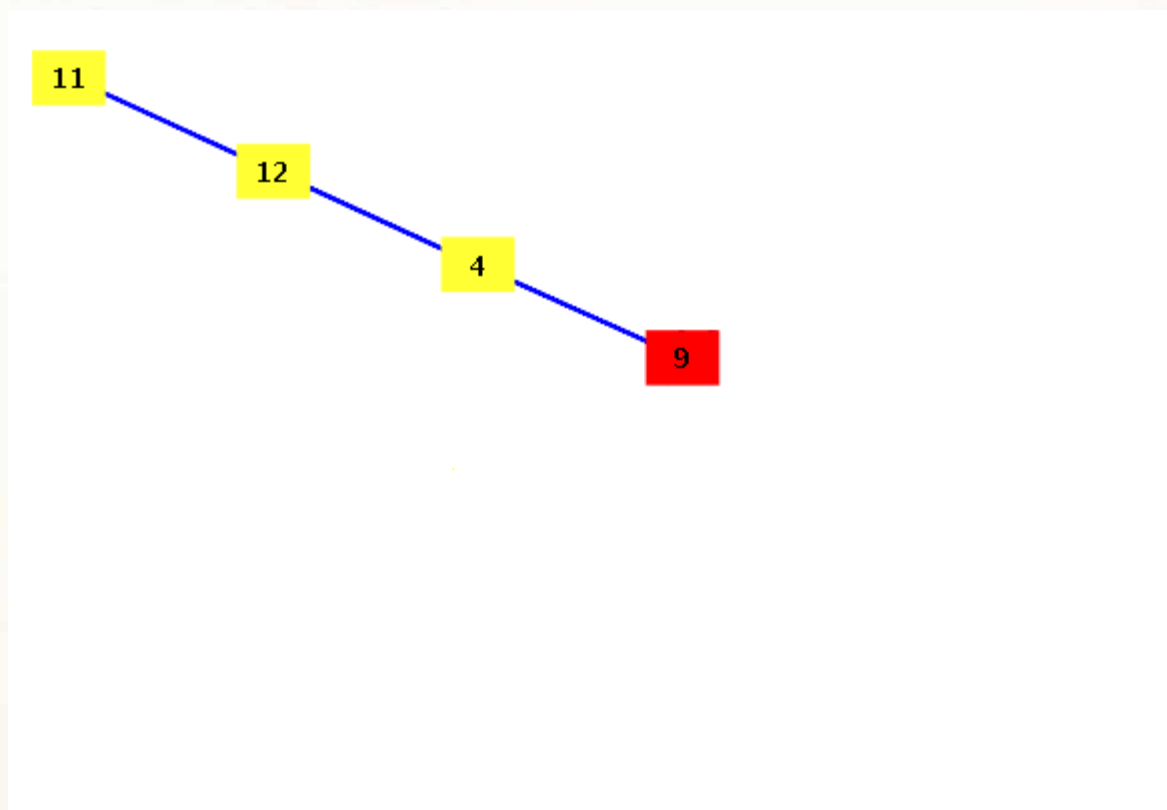
$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7, 9]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



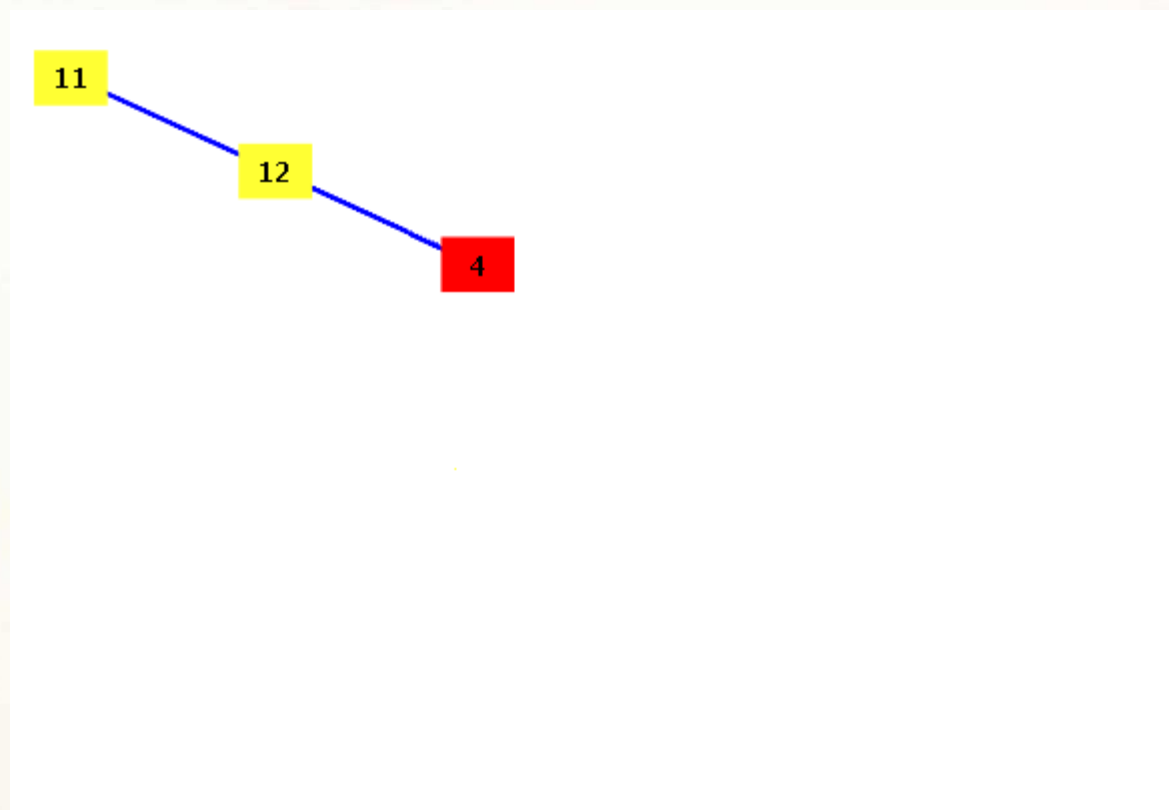
$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7, 9, 9]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7, 9, 9, 4]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



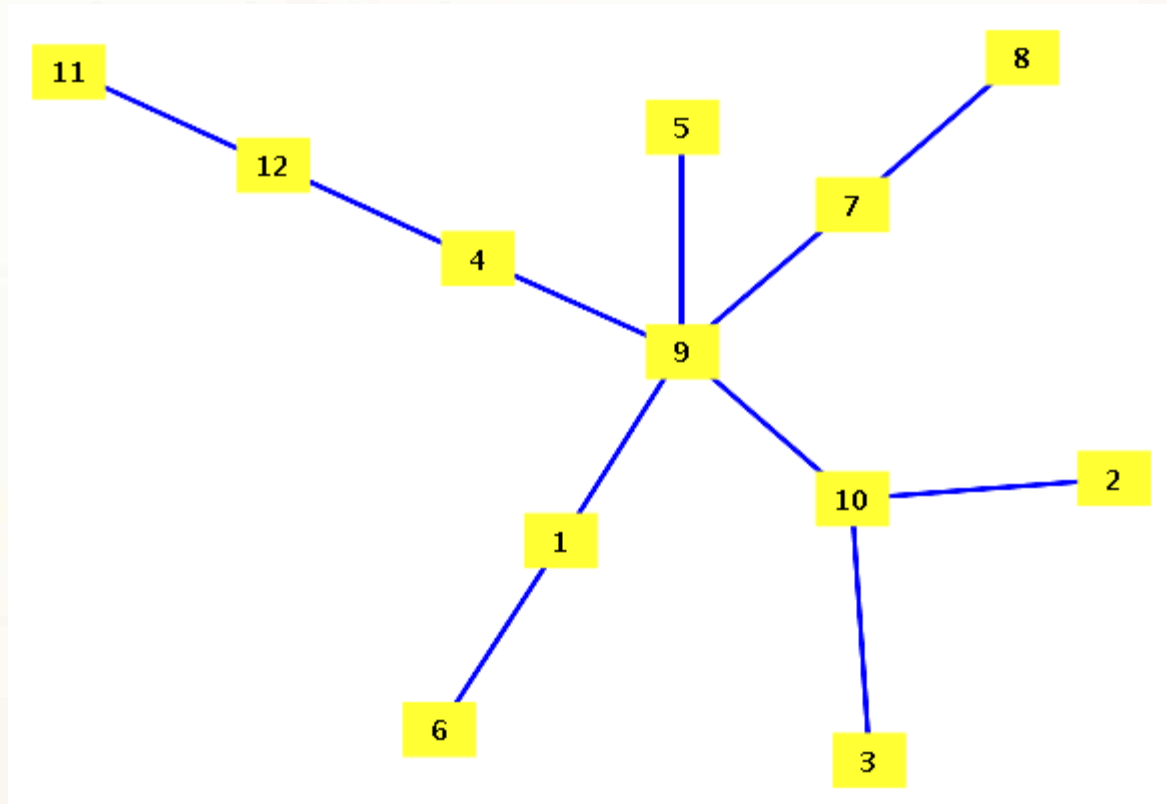
$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7, 9, 9, 4, 12]$$

## ***Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį***



$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7, 9, 9, 4, 12]$$

# *Priuferio kodas ir jo sudarymas pagal medį*



$$\alpha = [10, 10, 9, 1, 9, 7, 9, 9, 4, 12]$$



# ***Medžio generavimas pagal Priuferio kodą***

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

## ***Medžio generavimas pagal Priuferio kodą***

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}\}$$



## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [5, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [5, 4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{5, 11\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [4, 3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{5, 11\}, \{4, 5\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [3, 2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{5, 11\}, \{4, 5\}, \{4, 3\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [2, 1]$$

$$V = \{1, 2, 3, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{5, 11\}, \{4, 5\}, \{4, 3\}, \{3, 2\}\}$$



## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = [1]$$

$$V = \{1, 2, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{5, 11\}, \{4, 5\}, \{4, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 1\}\}$$

## *Medžio generavimas pagal Priuferio kodą*

$$\alpha = []$$

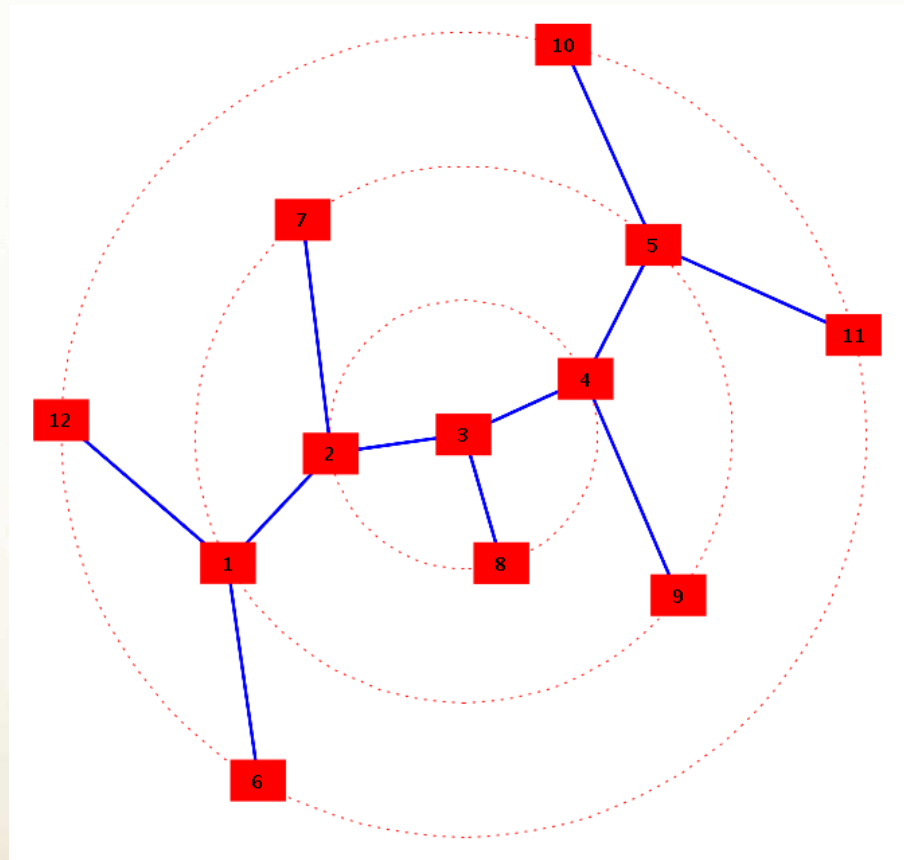
$$V = \{1, 12\}$$

$$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{5, 11\}, \{4, 5\}, \{4, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 12\}\}$$

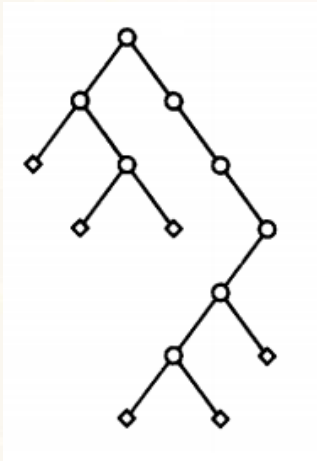
# Medžio generavimas pagal Priuferio kodą

$\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1]$

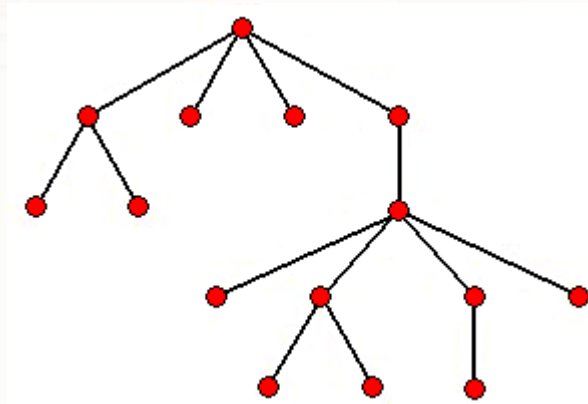
$E = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \{5, 11\}, \{4, 5\}, \{4, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 12\}\}$



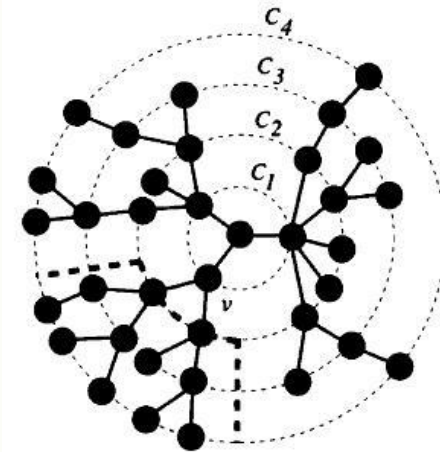
# Medžių vizualizacijos algoritmų raida



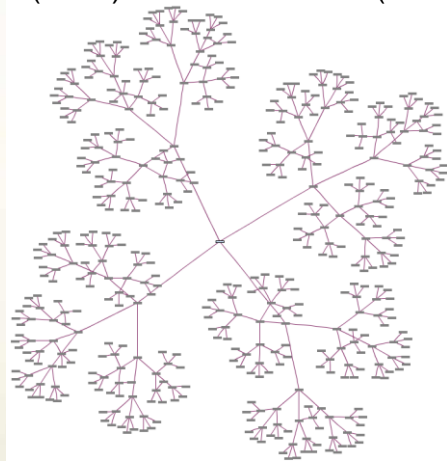
Binarieji medžiai  
Wetherell ir Shannon (1979)



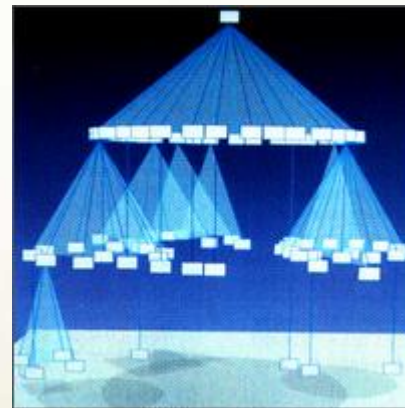
Numeruotieji medžiai  
Walker (1990)



Radialinis medžių vaizdavimas  
Eades (1992)



Žiediniai medžiai  
Melancon ir Herman (1998)



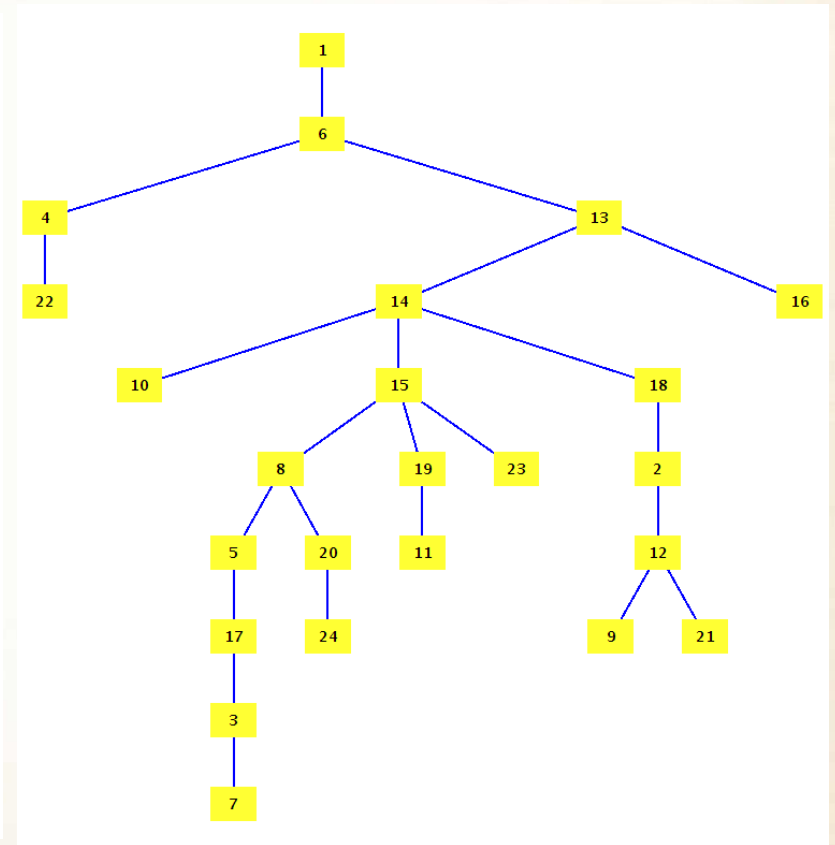
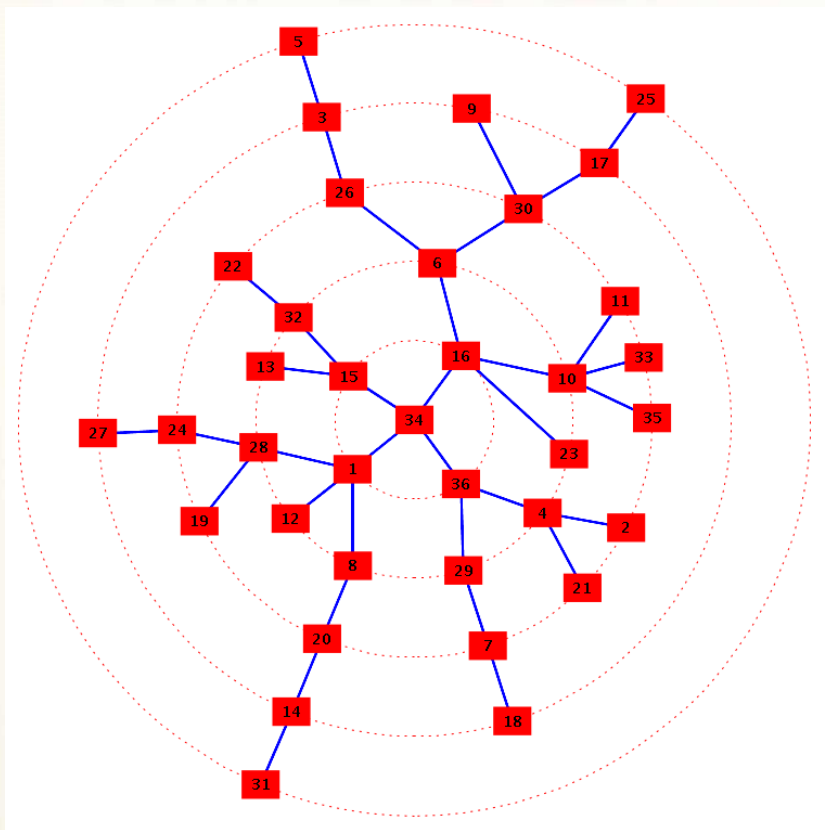
Kūginiai medžiai  
Robertson (1991)

# ***Estetiniai reikalavimai medžių vizualizacijai***

(remiantis *Di Battista et al. (1994), Section 2.1.2, Aesthetics, pp. 14–16.*)

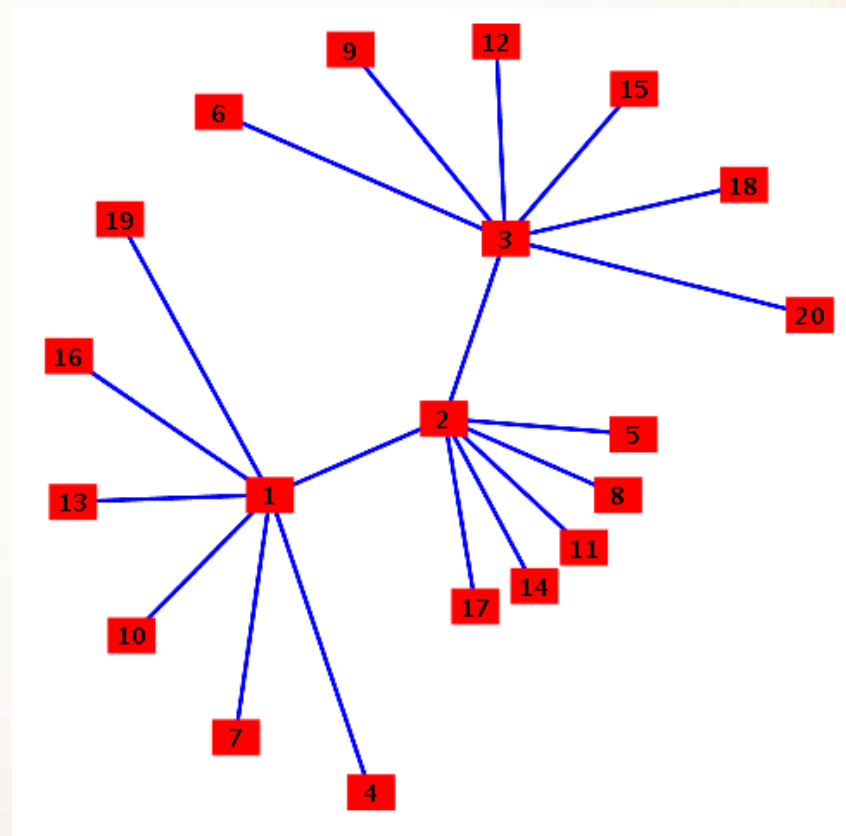
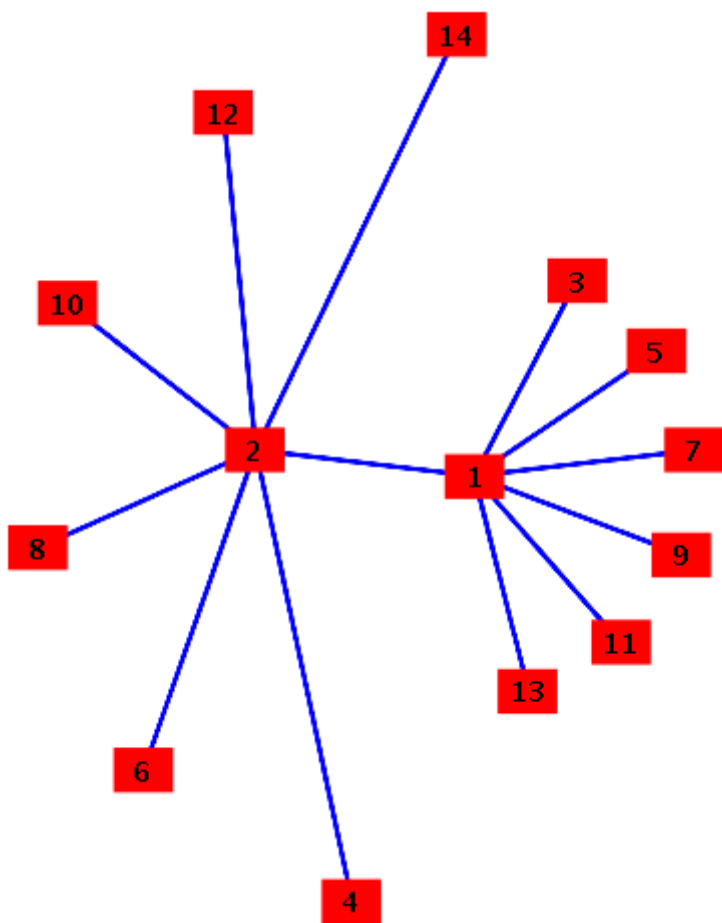
- 1) Minimalus briaunų susikirtimų skaičius
- 2) Tolygus viršūnių pasiskirstymas
- 3) Maža grafo briaunų ilgių imties dispersija
- 4) Simetrinis grafo vaizdavimas (jei yra galimybė)

# Radialinis ir hierarchinis medžių vaizdavimas

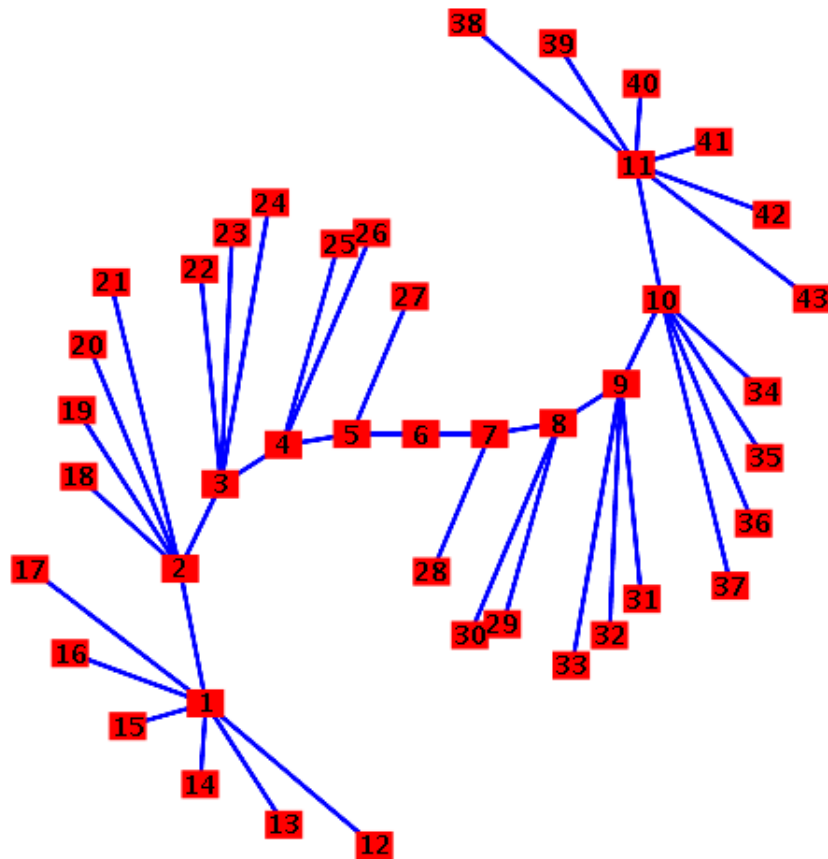
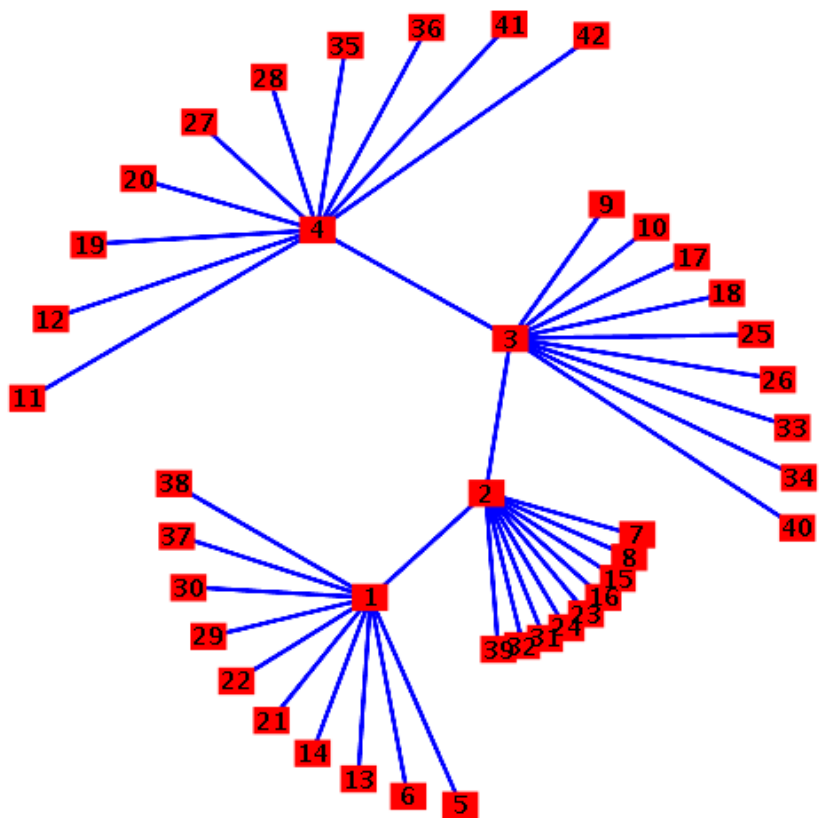




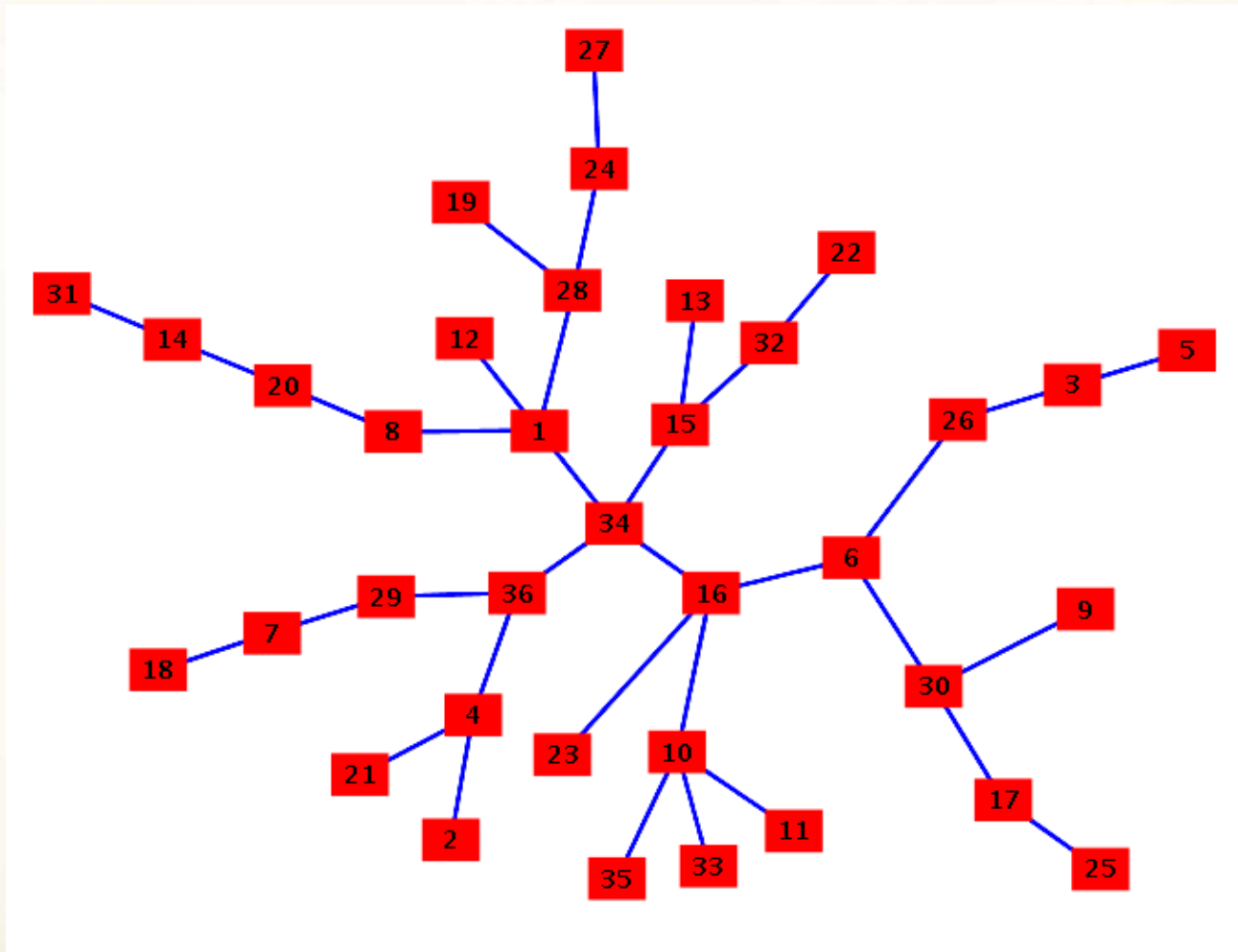
# Radialiniu būdu pavaizduoti medžiai pagal ciklinius Priuferio kodus



# Radialiniu būdu pavaizduoti medžiai pagal ciklinius Priuferio kodus



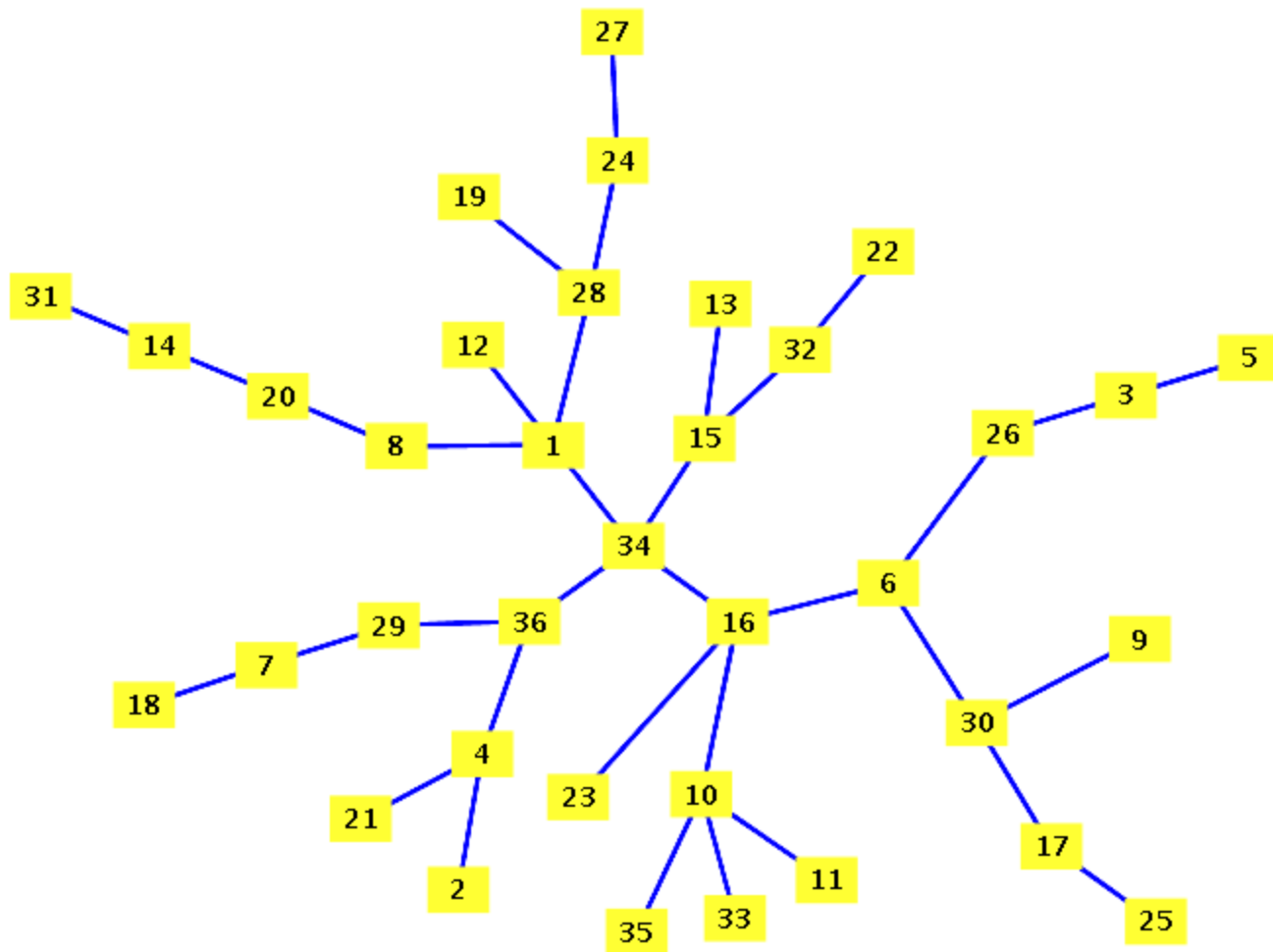
# Medžio centro ir ilgiausių takų paieška

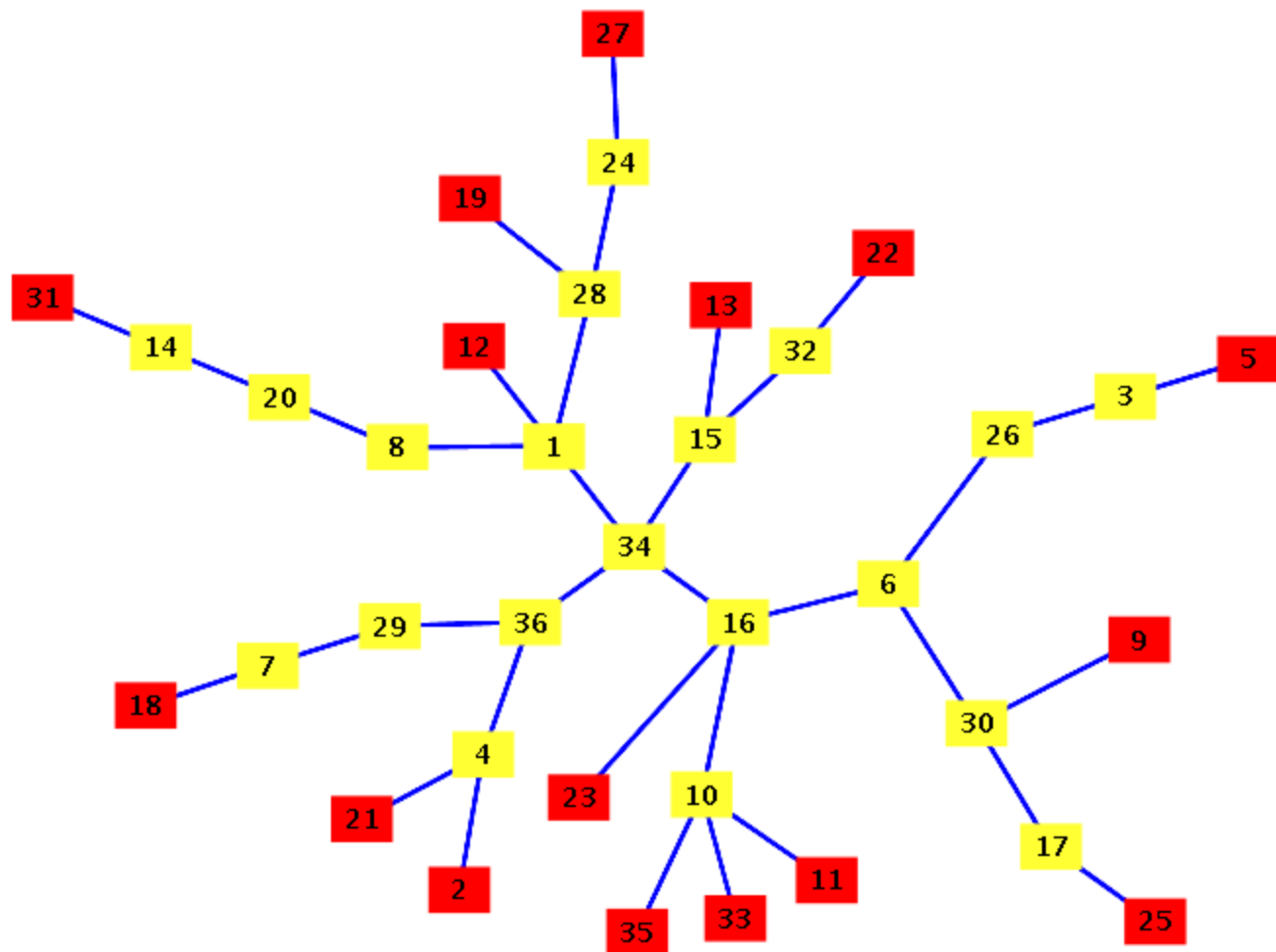


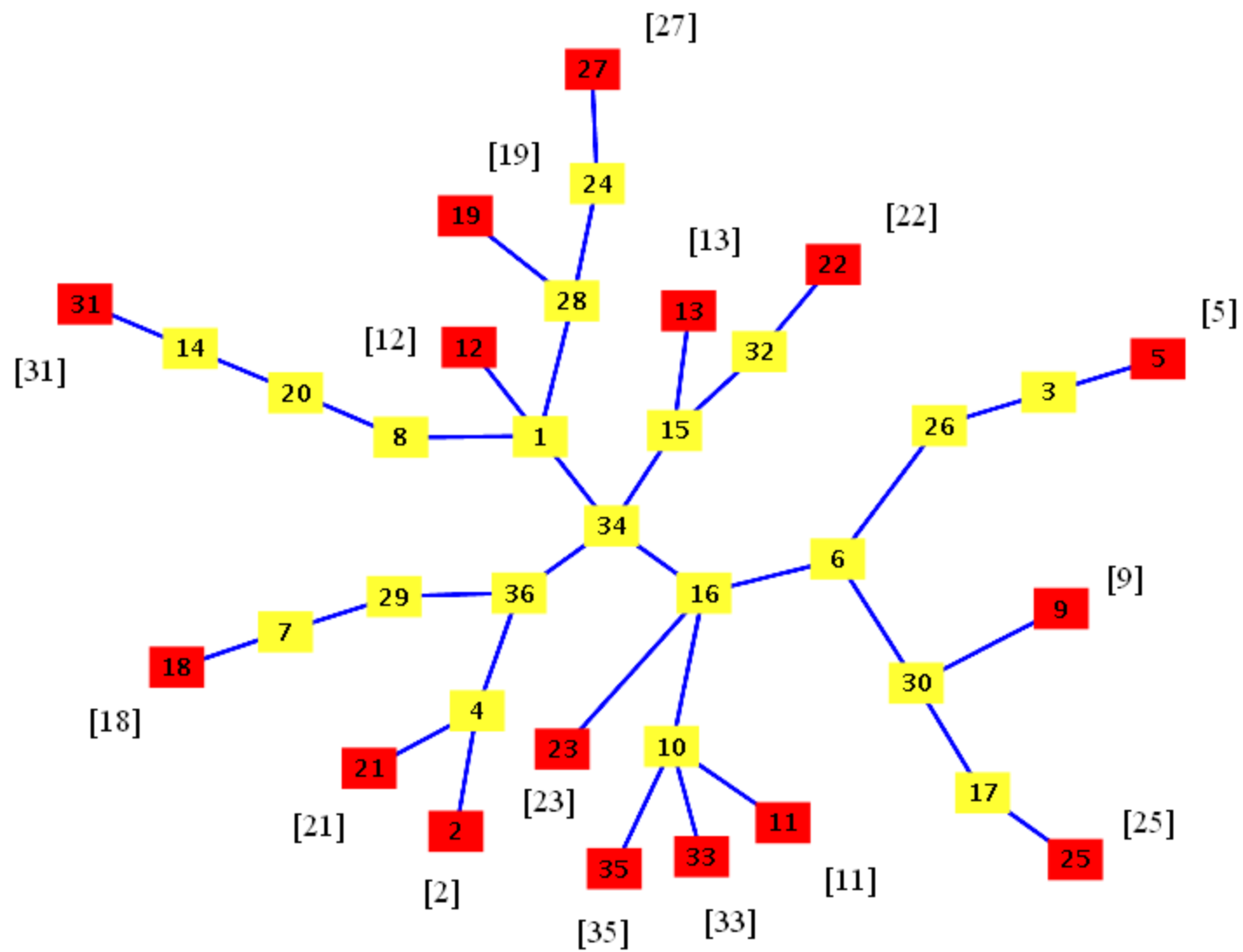
Takas<sub>1</sub> = [31, 14, 20, 8, 1, 34, 16, 6, 26, 3, 5]

Takas<sub>2</sub> = [31, 14, 20, 8, 1, 34, 16, 6, 30, 17, 25]

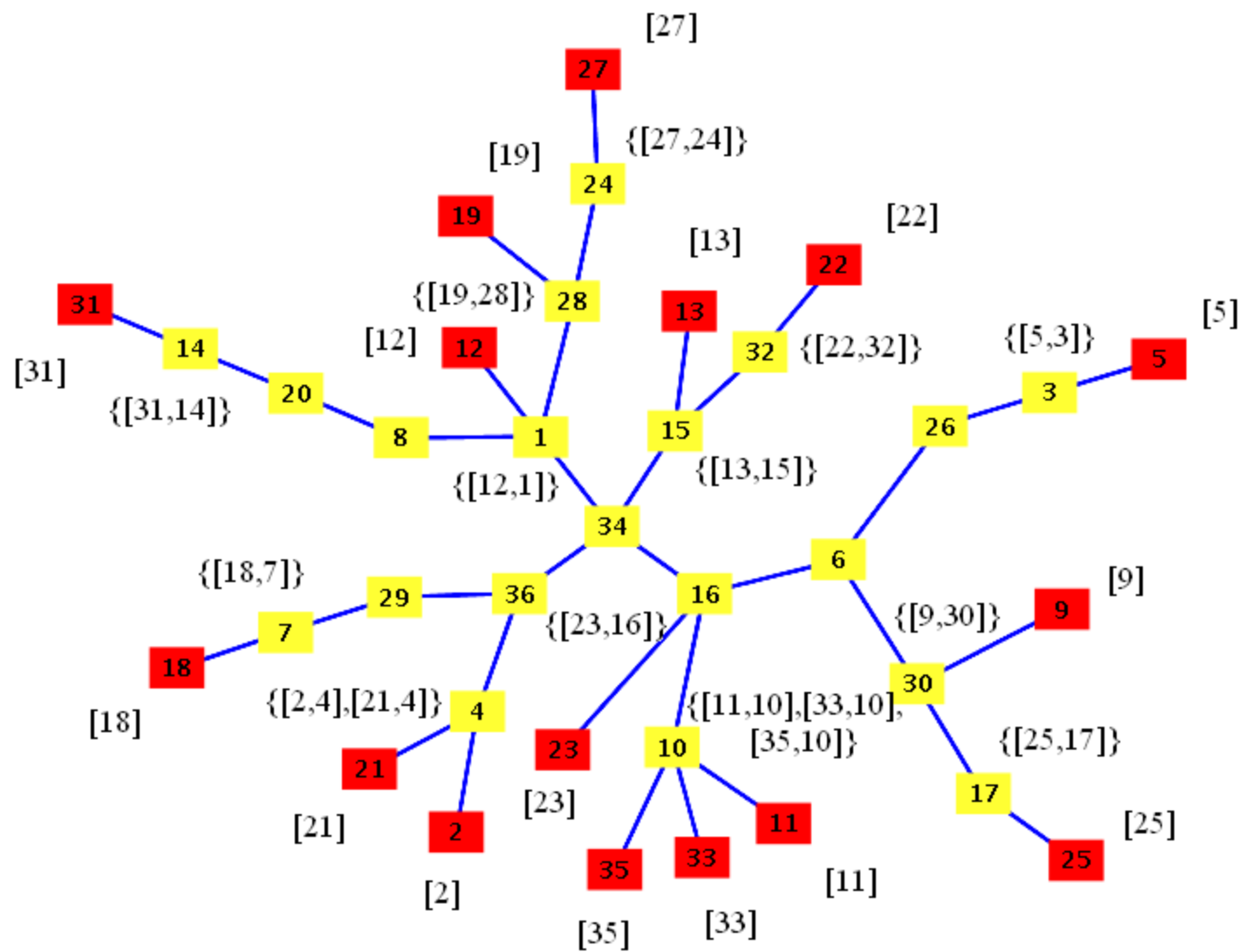
Centras = [34]

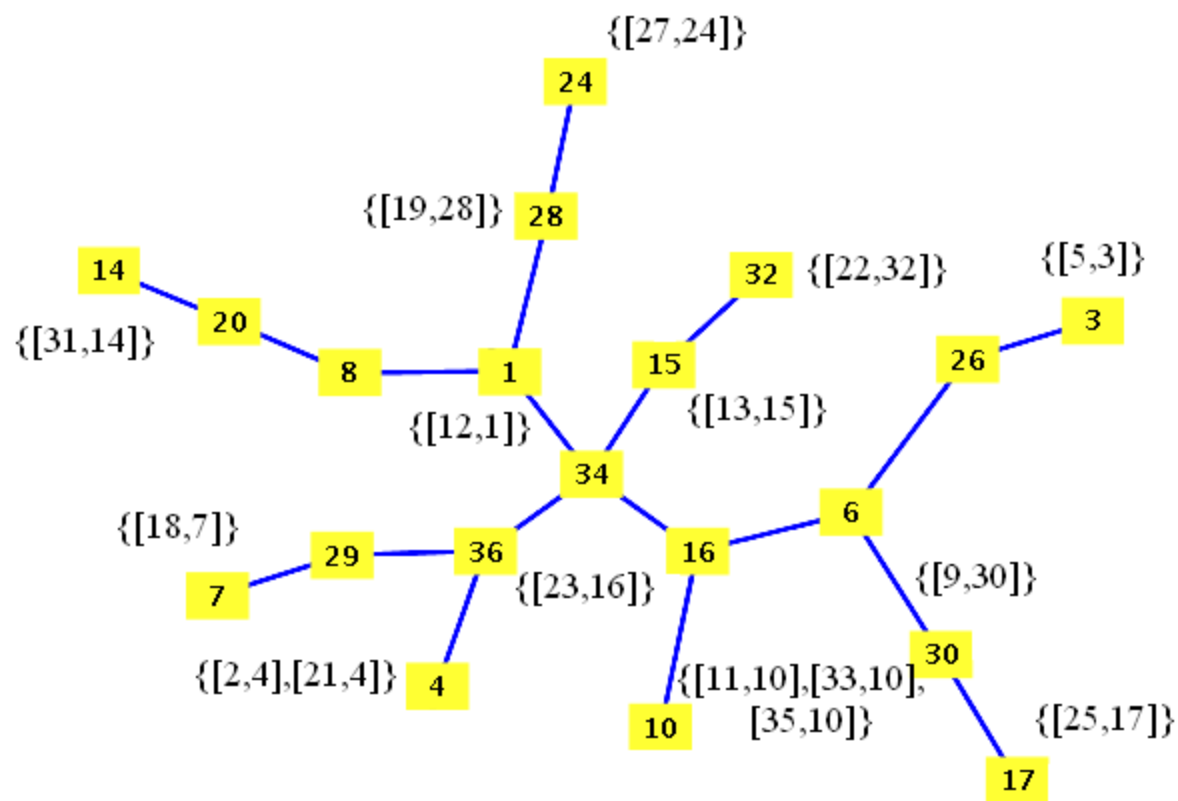


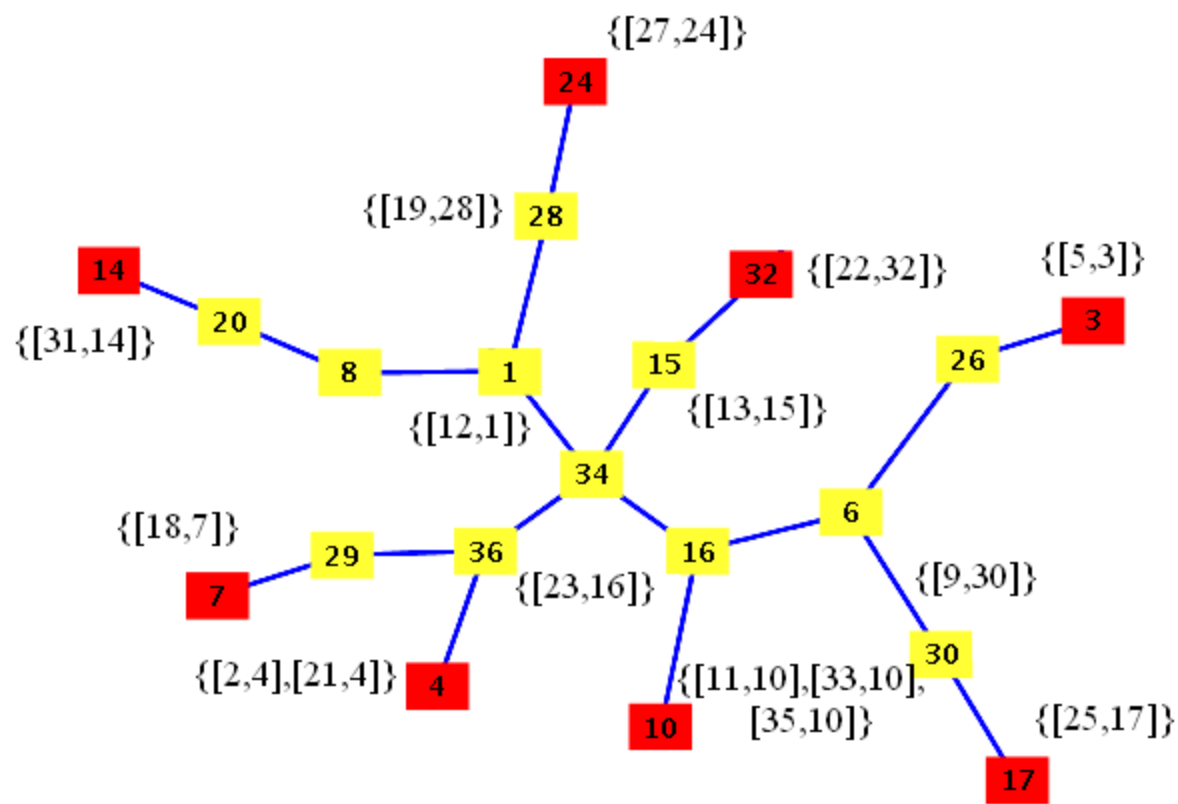


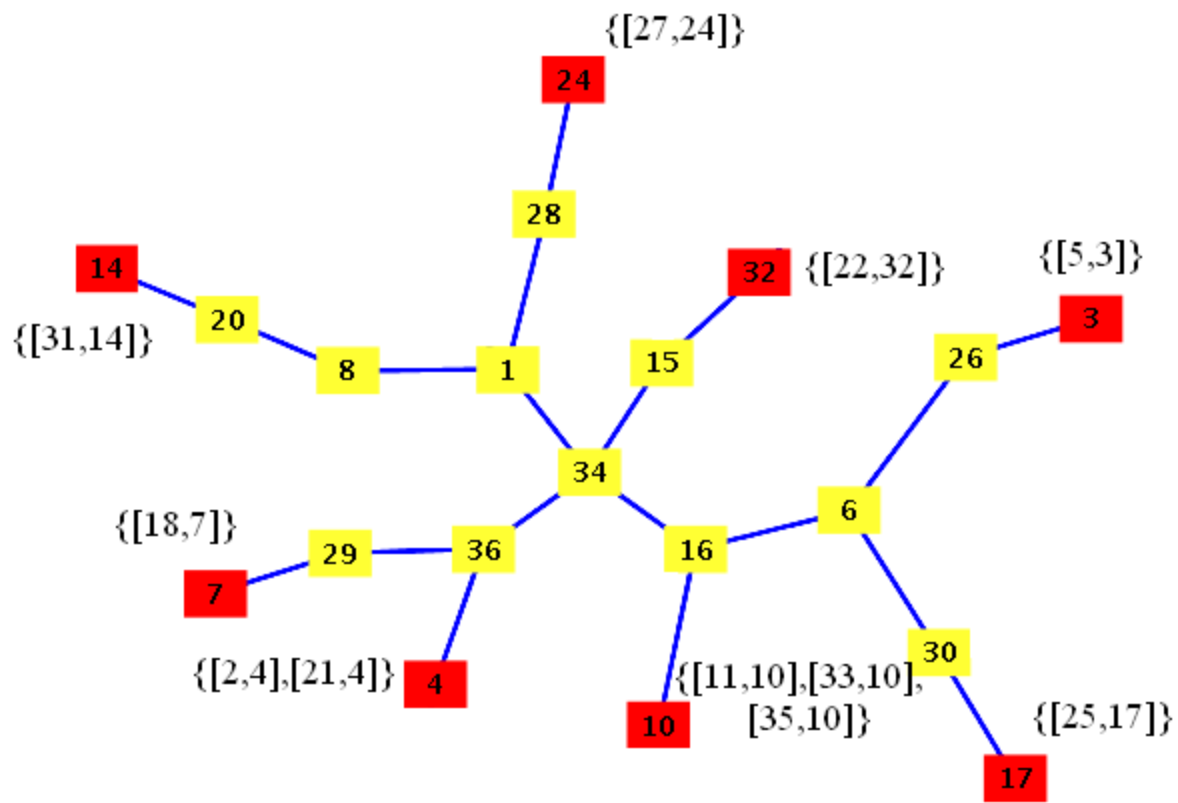


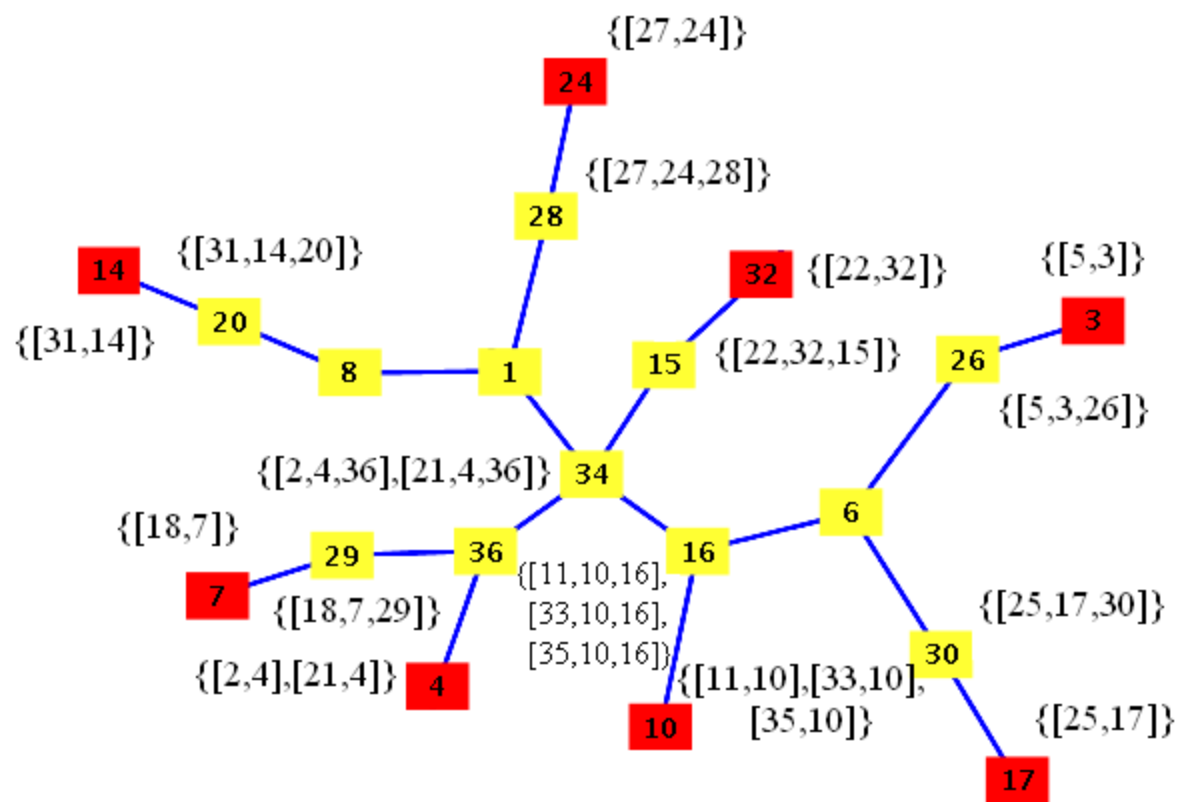


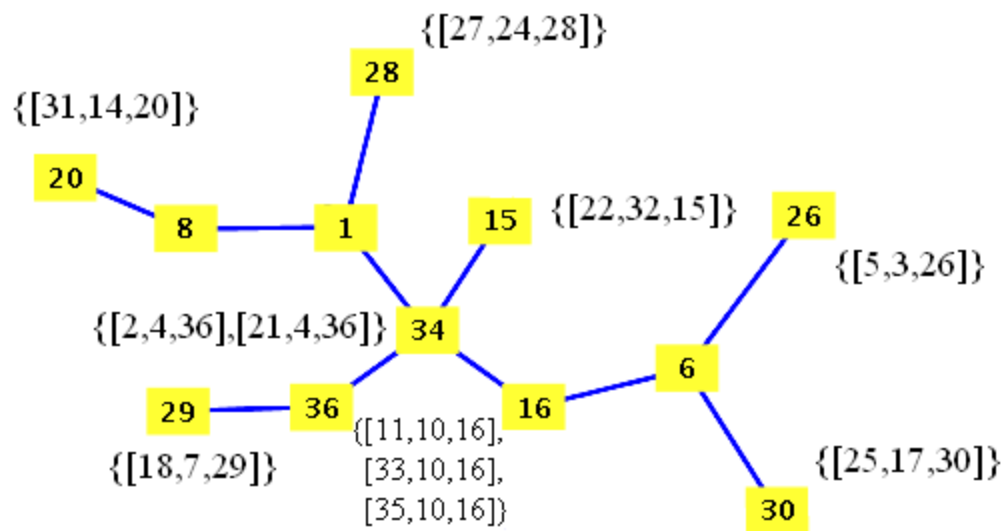


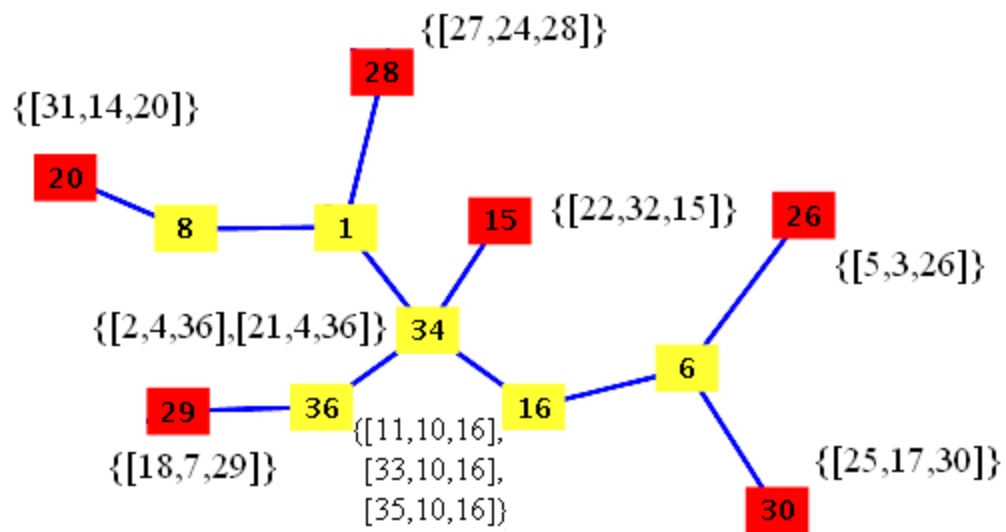




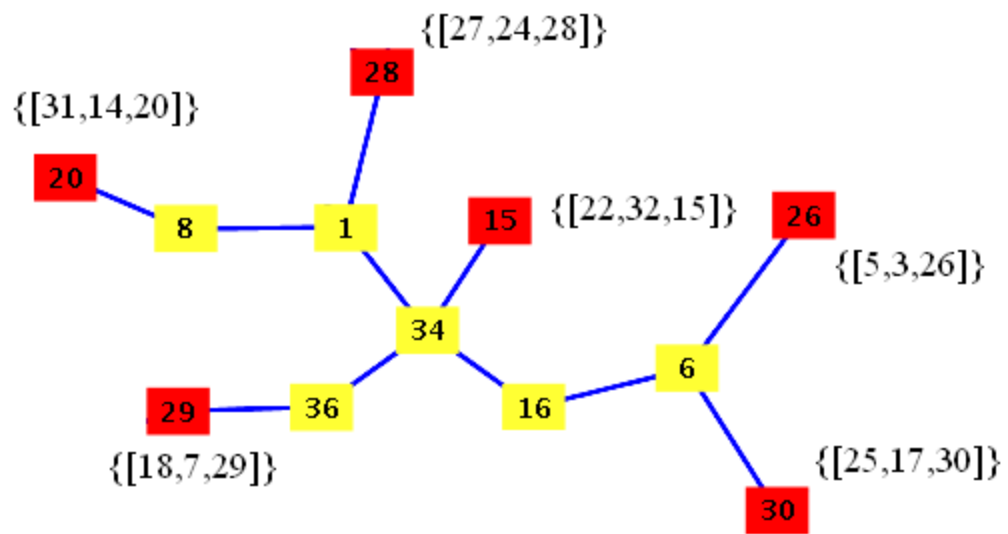


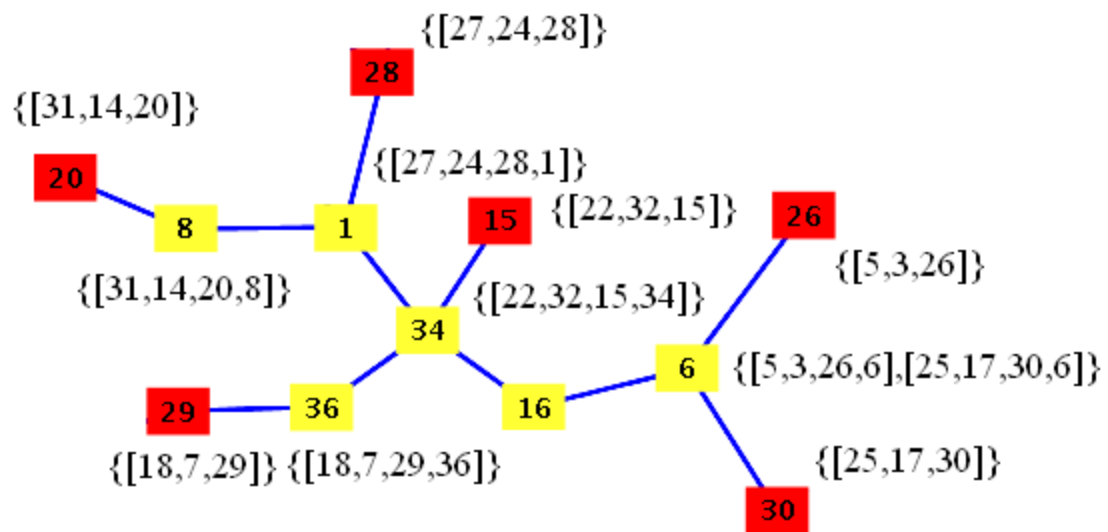


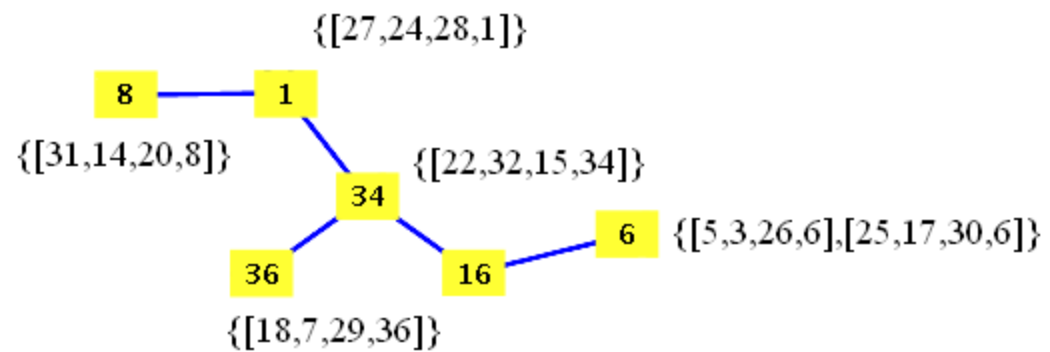


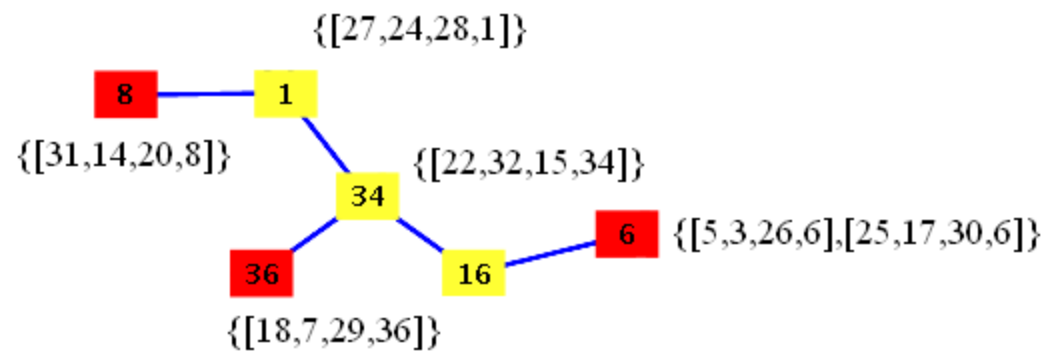


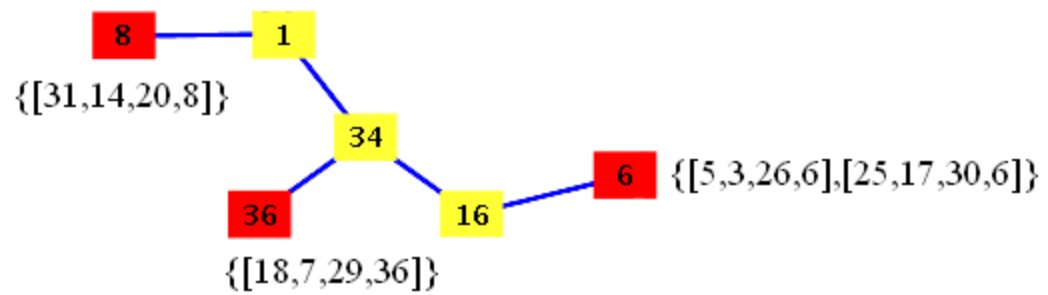


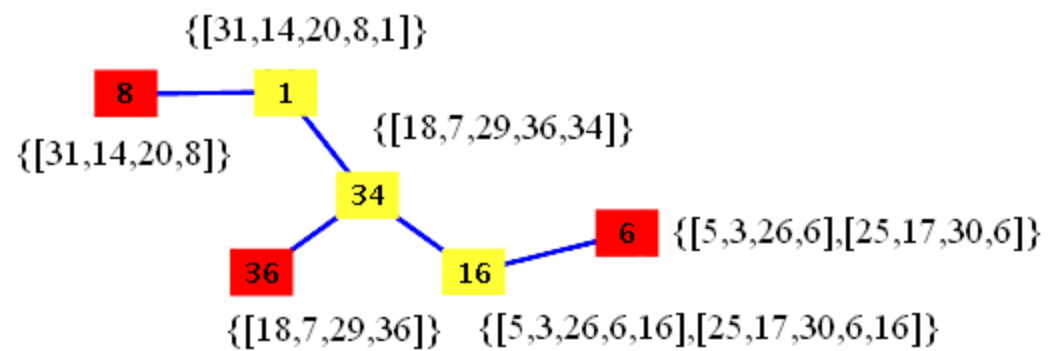












{31,14,20,8,1}

1

{18,7,29,36,34}

34

16

{5,3,26,6,16},[25,17,30,6,16]}



{[31,14,20,8,1]}

1

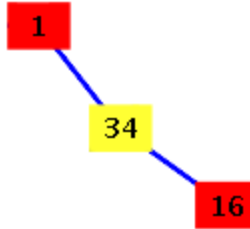
{[18,7,29,36,34]}

34

16

{[5,3,26,6,16],[25,17,30,6,16]}

{[31,14,20,8,1]}



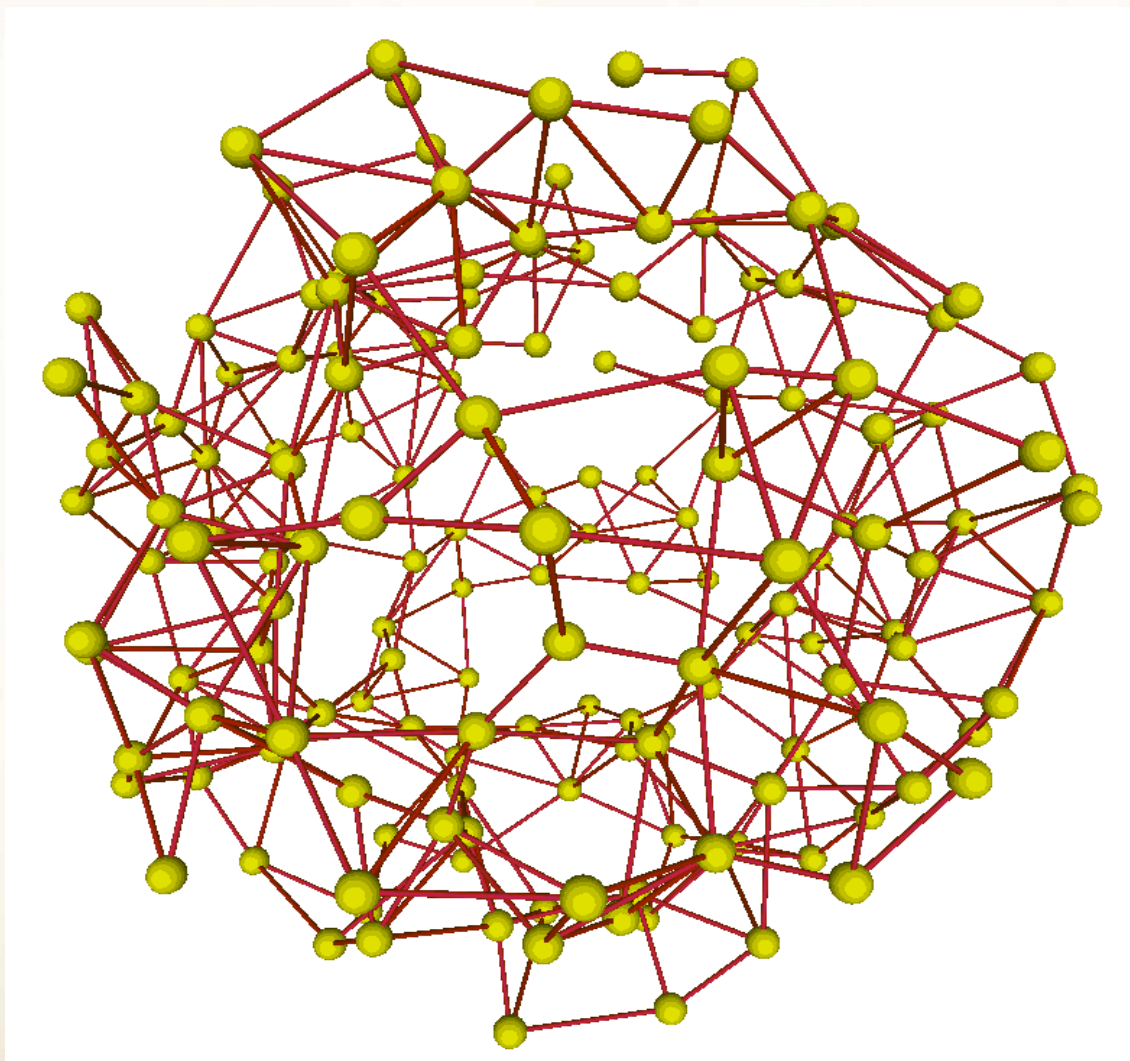
{[5,3,26,6,16],[25,17,30,6,16]}

Takas<sub>1</sub> = [31, 14, 20, 8, 1, 34, 16, 6, 26, 3, 5]

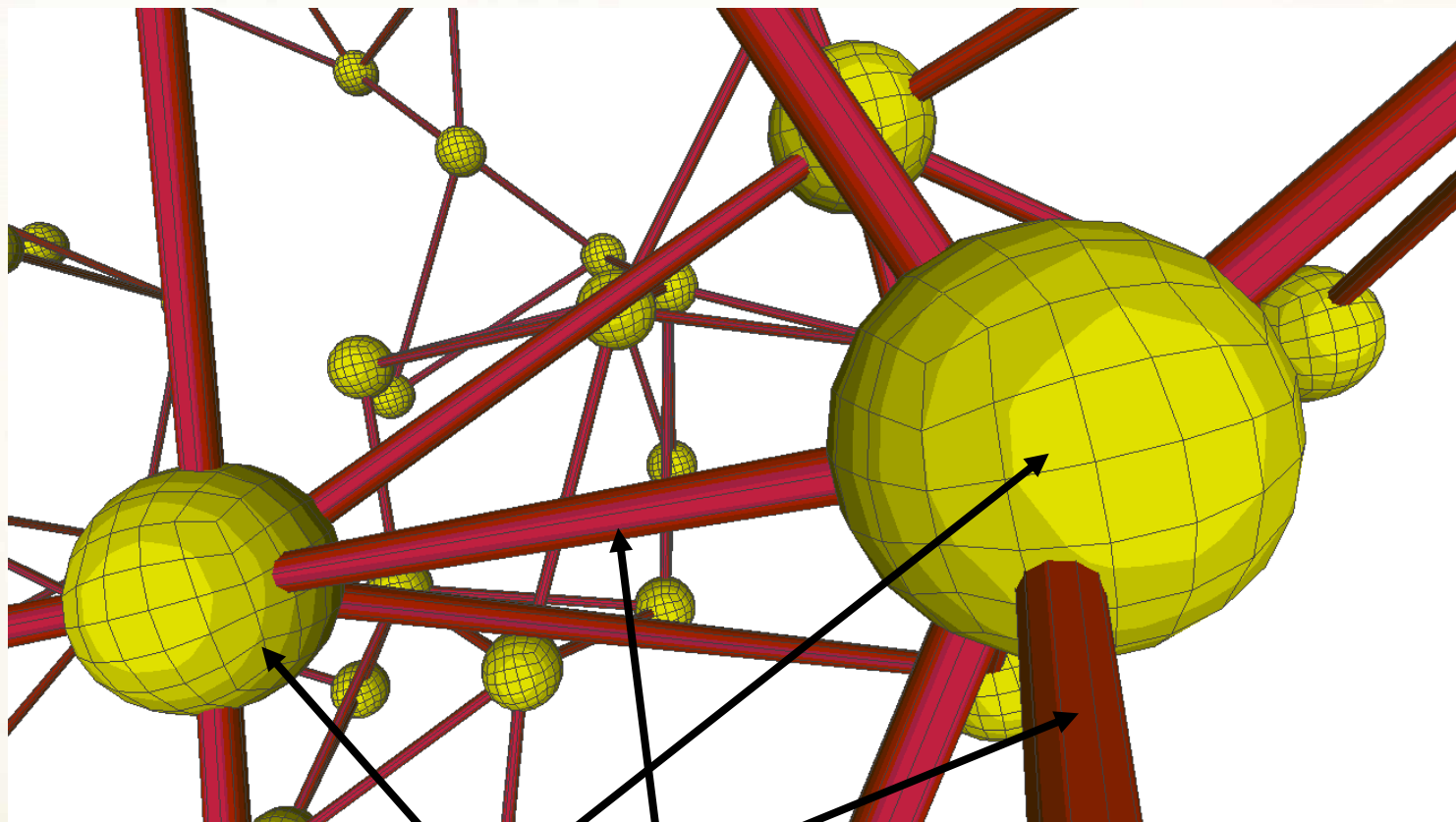
Takas<sub>2</sub> = [31, 14, 20, 8, 1, 34, 16, 6, 30, 17, 25]

Centras = [34]

# ***Grafų vizualicazija off formatu***

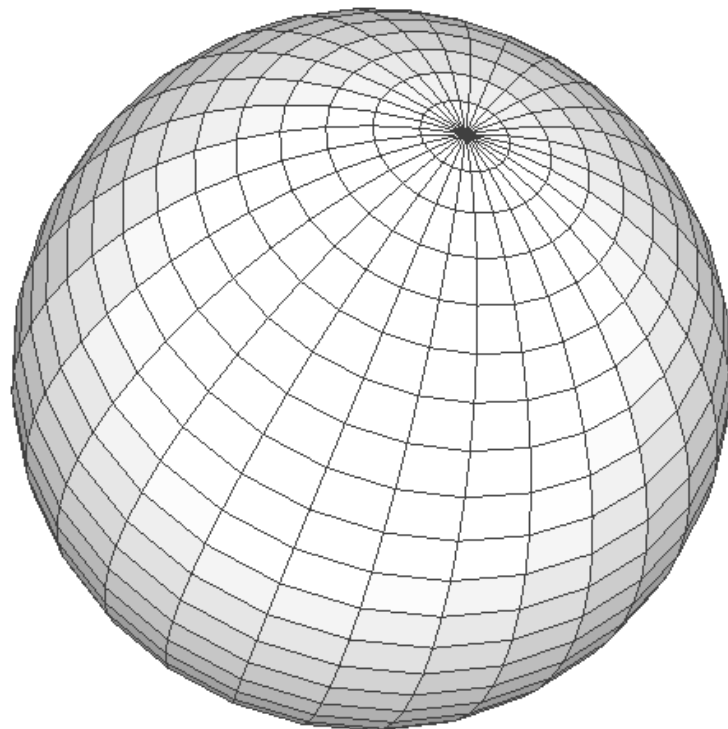
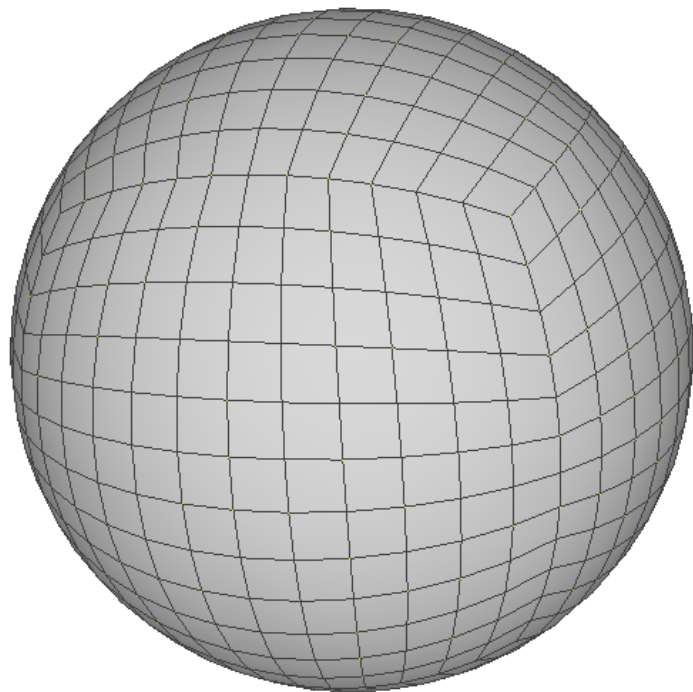


# *Grafų vizualizacija off formatu*

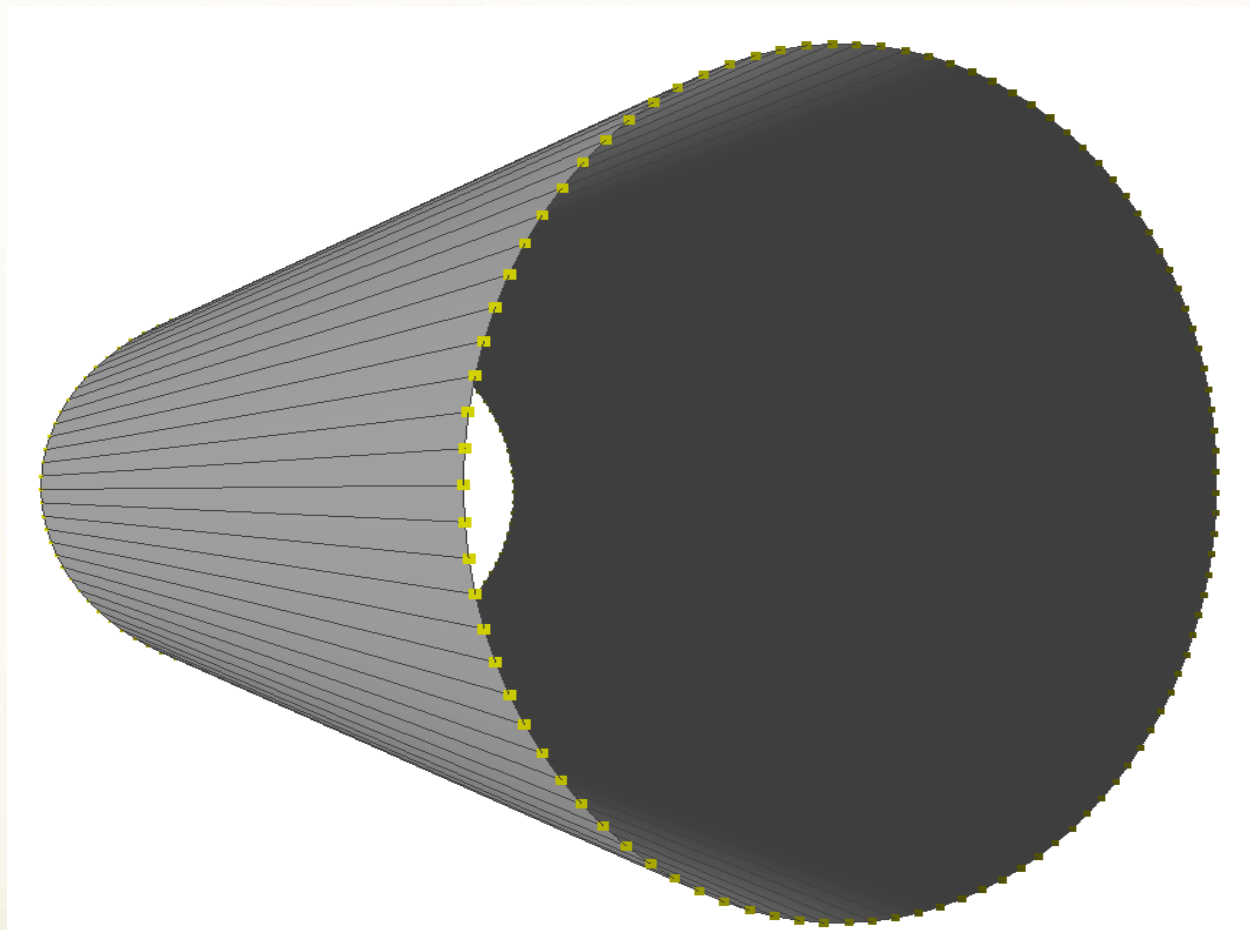


Sfera + cilindras trimatėje erdvėje

# ***Sferos vizualizacija off formatu***



# ***Cilindro vizualizacija off formatu***





***Ačiū už dėmesį.***

***Klausimai?***