Matematikos istorijos skiautiniai

Vilius Stakėnas

Pitagoras

Mes žinome jų vardus. Apytikriai žinome amžių. Susitikimo vietą, apytikslę datą. Pitagoras ir Talis. Dvidešimtmetis jaunuolis ir senas, septintą dešimtį metų pradėjęs išminčius. Miletas, apie 550 m. pr. Kristų. Taigi – žiupsnelis sausų ir nelabai patikimų užuominų... Visa kita turime įsivaizduoti. Kur jie susitiko ir kalbėjosi: Mileto aikštėje, kolonų šešėlyje slėpamiesi nuo tvaskios vidurdienio saulės, o gal kildami takeliu į pajūrio kalvas, vis pažvelgdami į snūduriuojančios Egėjo jūros tolumas?

Galime įsivaizduoti kaip susitikdavo jų žvilgsniai: savąjį kelią pradedančio jaunuolio ir į kelionės pabaigą artėjančio išminčiaus. Akys, kurias lyg kibirkštis uždega kiekviena švystelėjusi mintis, akys kurios atspindi nesiliaujantį jaunos sielos žaidimą ir akys, kurios irgi kartkartėmis sušvyti – lyg ramios įlankos vandenys prieblandoje nuo kranto žiburių, arba – tolimų žvaigždžių...

– Į Egiptą, mielas jaunuoli, į Egiptą! – tokį raginimą, kad ir kitais žodžiais, tikrai ištarė Talis. – Tik ten ieškok šaltinio savo sielos troškuliui numalšinti.

Geras patarimas, galbūt tik parama paties Pitagoro ketinimams. Pitagoras, gimęs Samose – pirmoje didesnėje saloje salų grandinėje nuo Jonijos iki žemyninės Graikijos (Atikos) – jau buvo gerokai savo gyvenime pakeliavęs. Kartu su tėvu – pirkliu, vadinasi – ir keliautoju.

Į Egiptą Pitagoras, rodos, iškeliavo jau nebe jaunystės metais. Šaltinių duomenimis – apie 535 m. pr. Kristų, galbūt – su rekomendaciniu tuometinio Samoso salos valdovo Polykrato laišku. Pitagoras jau tuomet buvo išsilavinęs žmogus, filosofijos, muzikos ir literatūros žinovas. Mokėjęs mintinai, kaip ir visi išsilavinę graikai, daugybę Homero strofų, jis, aišku, žinojo, kiek prabėgo metų, kol Odisėjas sugrįžo į Itakę: dešimt prie Trojos sienų ir dešimt metų kelionėje atgal!

Pitagoras sugrįžo į Samoso salą po penkiolikos metų. Egipte jis įgijo žinių, buvo įšventintas į žynius (mes sakytume, jam buvo suteiktas akademinis laipsnis), o Egiptui pralaimėjus kare su Persija, prarado laisvę ir kaip karo belaisvis buvo nugabentas į Babiloną. Būdamas belaisviu, atrodo, priespaudos ir prievartos, nepatyrė, nes galėjo bendrauti su Babilono išminčiais ir Pitagoro biografo Jamblicho žodžiais tariant „tobulai įvaldė babiloniečių aritmetikos, muzikos ir matematikos mokslus“.

Apie 520 m. pr. Kr. Pitagoras sugrįžo į gimtąją salą. Ji buvo pasikeitusi – kiti valdovai, galbūt ir kitos žmonių nuotaikos. Prieš penkiolika metų Pitagoras išvyko norėdamas būti mokiniu, o sugrįžo nusprendęs tapti mokytoju. Gimtinėje jis įsteigė pirmąją savo mokyklą. Įsikūręs buveinėje atokiau nuo miesto jis leido savo dienas ir naktis mąstydamas, tyrinėdamas ir mokydamas taip, kaip žyniai jį mokė Egipte. Tačiau graikas – ne egiptietis, įpratęs su šventa pagarba klausyti savo žynių žodžių. Graikas perdaug praktiškas, perdaug kritiškas, nelinkęs garbinti autoritetų ir jam perdaug rūpi konkretus, judrus jo miesto gyvenimas, kad ilgai ištvertų įkvėptas ir mįslingas mokytojo kalbas. Taigi pirmieji Pitagoro bandymai įdiegti šventos išminties želmenis gimtinės dirvoje, nepavyko. Rodos, buvo dar viena priežastis, paskatinusi Pitagorą visam laikui palikti tėvynę. Jo tėvynainiams visiškai nesuprantamas rodėsi Pitagoro noras atsiskirti nuo viešojo gyvenimo ir leisti dienas mąstant vienatvėje. Jeigu jau esi daug keliavęs, daug patyręs, jeigu jau žinai didžiojo pasaulio kelius, klystkelius ir pavojus, tai tiesiog privalai padėti tame pasaulyje orientuotis ir savo bendrapiliečiams.

Ne, nedalyvavimo viešuose visuomenės reikaluose, Pitagoro tėvynainiai negalėjo suprasti!

Pitagoriečių brolija

Porą metų praleidęs gimtinėje Pitagoras paliko ją visam laikui. Į Magna Graecia! Krotonas – miestas dabartinės Italijos pietuose tapo Pitagoro mokyklos miestu.

Kaip susiglaudžia spalvingas, aistringas, sudėtingas ir pavojingas gyvenimas į kelis sausus žodelius – nuvyko ir įkūrė mokyklą!

Laikmetį, kuriame gyveno Pitagoras, filosofas Karlas Jaspersas pavadino „ašiniu laiku“. Pagrindą tokiai sąvokai teikia nepaprastai intensyvūs dvasinio kelio gyvenime ieškojimai sutelkti maždaug tuo pačiu metu gyvenusių mąstytojų mokymuose: Konfucijaus (apie 551-479 m. pr. Kr.), Budos (apie 563-583 pr. Kr.), Zaratustros (apie 628-551 pr. Kr.), Pitagoro – taip pat.

Kokia buvo Pitagoro mokykla? „Mokykla“ – kasdienės mūsų kalbos žodis. Kasdienės kalbos žodžiai yra tarsi akiniai, kurie suteikia tam, ką matome nustatytą atspalvį.

Pasirėmę įvairiuose šaltiniuose išbarstytomis nuomonėmis ir užuominomis apie Pitagoro veiklą Krotone, jo mokyklą apibūdintume kaip bendruomenę, broliją, turinčią savo gyvenimo taisykles, universitetą, kuriame skaitomos paskaitos ir atliekami tyrimai, o gal būt ir kaip politinę partiją... Taigi pitagoriečiai gyveno pagal savas taisykles, atitinkančias jų pažiūras į pasaulį ir siekė savo tikslo. Kokio tikslo? Skaidrinti, gryninti, tobulinti savo sielą! O priemonės šiam tikslui pasiekti – teisingas gyvenimo būdas ir filosofijos bei matematikos studijos. Štai taip! Pitagoriečiais lygiomis teisėmis galėjo būti tiek vyrai, tiek moterys. Ar pitagoriečių tikslas bei priemonės atrodo naivios ir beviltiškai pasenę? Nemanau. Beje, patys žodžiai filosofija ir matematika į pasaulį irgi, ko gero, paleisti pitagoriečių. Filosofija jiems reiškė išminties meilę, o matematika – visa, kas tyrinėjama.

Visa yra skaičiai!

Teiginys skamba gana šiuolaikiškai: pasitelkę skaičius vertiname, lyginame, priimame sprendimus. Tačiau šis pitagoriečių teiginys mums turi visai kitą prasmę, nei jiems. „Visa yra skaičiai“ mums tereiškia, kad jais naudojamės kaip universaliu įrankiu, padedančiu prisitaikyti ir orientuotis. O pitagoriečiai laikė skaičius pačios būties pagrindu!

Keistas, nesuprantamas ir naivus teiginys? Tačiau ir pitagoriečiams mes, ko gero, atrodytume keisti. Kuo? Pirmiausia, kad dažnai tenkinamės nelabai aiškiomis, neįsisąmonintomis žiniomis. Pavyzdžiui? Nagi pabandykite paaiškinti patys sau, kas gi yra tie skaičiai. Kur ir kaip jie yra? Neabejoju, kad po kelių pradinių įžvalgų, pajusite, kad tai, ką galite pasakyti apie skaičius, jūsų pačių nebeįtikina. O pitagoriečiams skaičių būtis buvo tokia pat reali, kaip akmenų ar medžių.

Na, bet būties pagrindus tai jau už pitagoriečius suvokiame tikrai geriau! Ar tikrai? Iš tiesų, žinome: molekulės, atomai... O kas toliau – tuštuma, elementariosios dalelės, kurių buvimą fiksuoja sudėtingiausi prietaisai, o savybes aprašo matematinės lygtys... Toks ir tėra mūsų pranašumas – įprotis gyventi, susitaikius su mintimi, kad negalime galutinai, tvirtai žinoti.

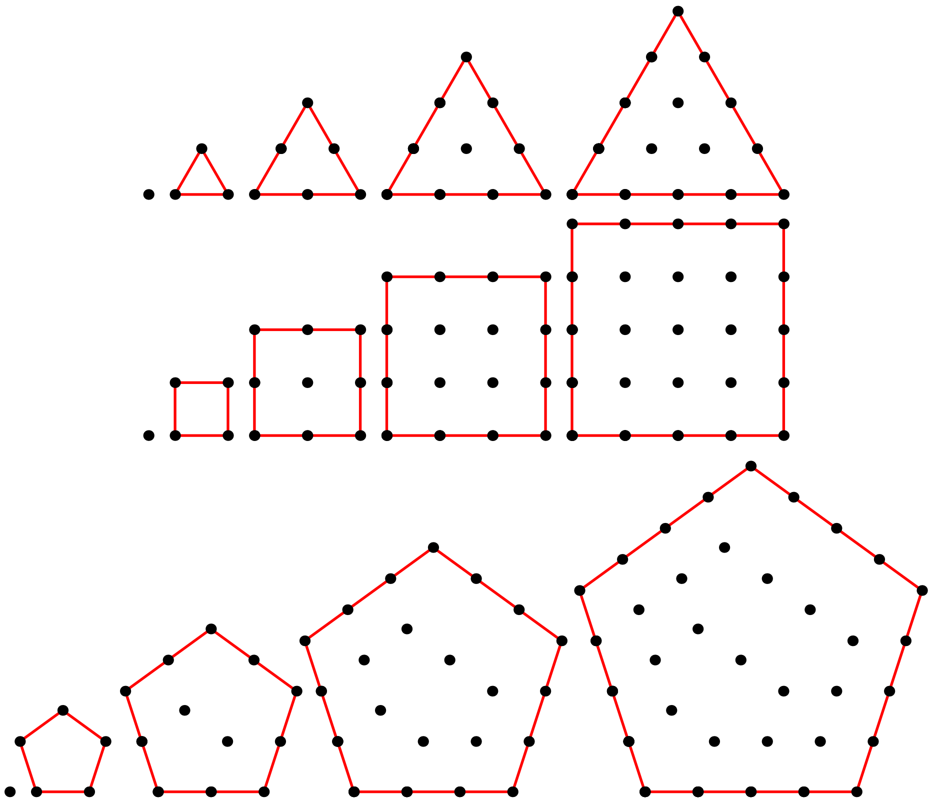
Pitagoriečiai – priešingai nei mes – tikėjo, kad yra galutinis tvirtas visos būties pagrindas ir tas pagrindas – skaičiai! Jie ne tik turi įvairias savybes, bet ir paskirtį bei įtakos sritis. Vienetas kuria visus kitus skaičius, tai – proto skaičius. Dvejetas – pirmasis lyginis, tai moteriško prado skaičius. Trejetas – vyriškas skaičius, harmonijos skaičius. Ir taip toliau... Švenčiausiu skaičiumi pitagoriečiai laikė dešimtį:

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Dešimtis tarsi saugo, „apgaubia“ visus tikrovės geometrijos „kūrėjus“: vienetas sukuria tašką, dvejetas (du taškai) sukuria atkarpą – vienmatę figūrą, trejetas sukuria trikampį – plokštumos figūrą, keturi taškai, nesantys vienoje plokštumoje apibrėžia tetraedrą, trimatės erdvės kūną...

Taigi skaičiai glūdi už tikrovės daiktų. Kaip jie tarpusavyje dera, priklauso nuo tų skaičių santykio. Šios minties patvirtinimą Pitagoras surado muzikoje. Darnius sąskambius galime išgauti braukdami per stygas, kurių ilgių santykį galime reikšti nedideliais skaičiais.

Tikėtina, kad geometrinių figūrų sandarą pitagoriečiai suvokė panašiai kaip skaičių. Skaičius 100 yra šimto vienetų „vėrinys“, atkarpa gal būt irgi – „taškų vėrinys“? Tokios nuomonės atšvaitus galime atpažinti geometriniuose pitagoriečių skaičiuose. Skaičiuodami taškus, išdėstytus ant trikampių kraštinių, gauname trikampių skaičių seką, ant keturkampių – keturkampių skaičių seką ir t.t.



Trikampiai, kvadratiniai ir penkiakampiai skaičiai

Pažymėkime $S_n(k)$ n-ąjį k-kampį skaičių, atitinkantį taisyklingąjį k-kampį, $n = 1, 2, \ldots$. Taigi

$$S_1(3) = 1,\ S_2(3) = 3,\ S_3(3) = 6,\ \ldots,\ S_n(3) = S_{n-1}(3) + n.$$

n-asis trikampis skaičius yra tiesiog n pirmųjų natūrinių skaičių suma:

$$S_n(3) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Savo ruožtu

$$S_1(4) = 1,\ S_2(4) = 4,\ S_3(4) = 9,\ \ldots,\ S_n(4) = S_{n-1}(4) + 2n - 1.$$

Taigi kvadratinis skaičius yra n pirmųjų nelyginių skaičių suma. Kadangi $S_n(4) = n^2$, tai

$$n^2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n - 1.$$

Trikampiai ir kvadratiniai skaičiai yra aritmetinių progresijų sumos. Įsižiūrėjus į brėžinius ir kiek pagalvojus galima įsitikinti, kad skaičius $S_n(k)$ lygus n aritmetinės progresijos narių sumai, pirmasis progresijos narys yra 1, o skirtumas lygus $k - 2$:

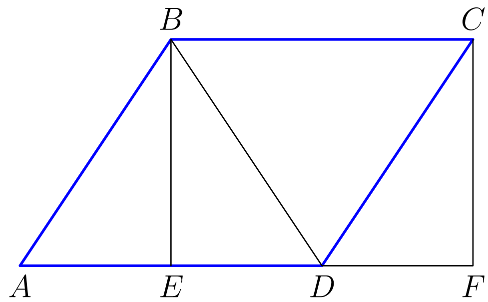
$$\begin{aligned} S_n(k) &= S_{n-1}(k) + (k-2)(n-1) + 1, \\ S_n(k) &= 1 + ((k-2)+1) + (2(k-2)+1) + \cdots + ((k-2)(n-1)+1). \end{aligned}$$

Tikrovės, kurioje gyvename, pagrindas – anapus. Tą skelbia visos religijos, prie tokios išvados priėjo daugelis mąstytojų. Žmogus gali užmegzti ryšį su ta pamatine būtimi per maldą, per mistines įžvalgas, tačiau pažinti jos žmogus negali. Pitagoro pažiūros negali nestebinti savo drąsiu optimizmu: taip, būties pagrindas (skaičiai) nematomi, tačiau juos galima pažinti ir tyrinėti!

Atrodo, lemtis pagailėjo Pitagoro ir jam gyvenant neatskleidė tų klausimų apie būtį, į kuriuos neįmanoma atsakyti galvojant, kad „visa yra skaičiai“.

Reikšminga (ir pavojinga) teorema

Tai teorema, apie kurią visi šį bei tą žino: kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio įžambinės yra tokio pat ploto, kokį gauname sudėję kvadratų, nubraižytų, ant statinių, plotus. Teorema tvirtai susieta su Pitagoro vardu. Kad jis pirmasis ją atskleidė, didžiai abejotina. Greičiausiai jis apie ją sužinojo iš Babilonijos žynių. Kad babiloniečiams buvo žinomas stačiojo trikampio kraštinių ilgių sąryšis (gal būt tik atskirų trikampių, kurių kraštinių ilgius galima nusakyti sveikais skaičiais, atvejai) liudija išlikę molinės lentelės. Legenda, kad atskleidęs šią teoremą, Pitagoras paaukojo dievams jaučių – visiškai neįtikėtina. Juk pitagoriečiai buvo vegetarai, nes tikėjo, jog sielos persikūnija. Iš panašaus tikėjimo kilo ir kitas draudimas, kurio laikėsi pitagoriečiai – valgyti pupas.



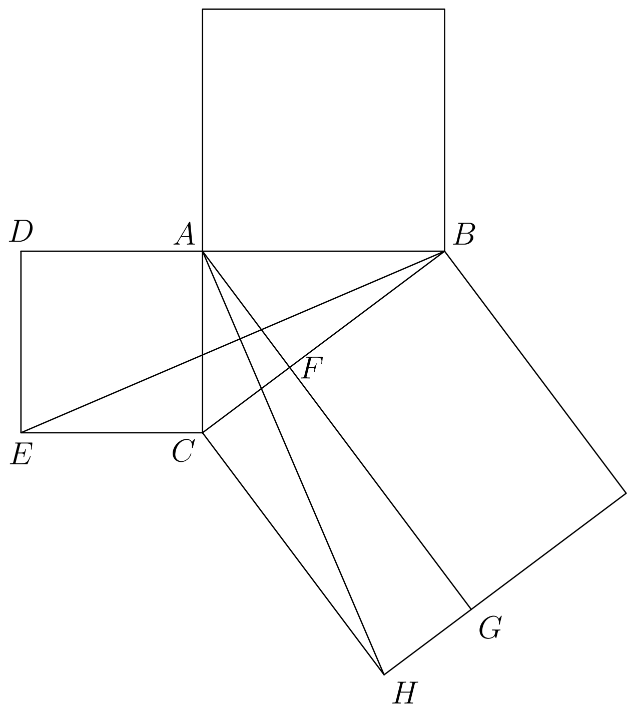
$ABCD$ – lygiagretainis, $BE \perp AD, CF \perp AF$. Kadangi $\triangle ABE = \triangle CDF$, tai lygiagretainis $ABCD$ ir stačiakampis $BCEF$ yra vienodo ploto. Jų pagrindo kraštinės ir aukštinės lygios: $AD = EF$ ir BE – bendra aukštinė. Lygiagretainį $ABCD$ sudaro du lygūs trikampiai $\triangle ABC = \triangle BCD$, turintys tokio pat ilgio pagrindo kraštinę ir aukštinę kaip stačiakampis $BCEF$. Taigi trikampio ABC plotas lygus pusei stačiakampio $BCEF$ ploto.

Tad kas gi iš tikrųjų sieja Pitagorą su jo vardu vadinama teorema. Tikėtina, kad jis ją įrodė. Ką pitagoriečiams reiškė įrodymas, kaip jie samprotavo? Tikrų žinių apie tai neliko. Galime manyti, kad tas Pitagoro teoremos įrodymas, kurį „Pradmenyse“ pateikia Euklidas buvo sukurtas paties meistro. Apskritai, matyt, bent dviejose pirmosiose „Pradmenų“ knygose (iš viso jų trylika) dėstomos žinios, kurias jau buvo įgiję pitagoriečiai.

Taigi panagrinėkime tą senąjį Pitagoro teoremos įrodymą, tikėdami, kad jame žybčioja paties Pitagoro minčių atšvaitai.

Pirmiausia įsitikinkime, kad visi lygiagretainiai su vienodais pagrindais ir vienodomis aukštinėmis yra lygiapločiai. Iš tiesų, lygiagretainis lygiaplotis su stačiakampiu, turinčiu tą patį pagrindą kaip lygiagretainis ir tą pačią aukštinę. Taigi visi lygiagretainiai, turintys vienodus pagrindus ir vienodas aukštines, lygiapločiai su tuo pačiu stačiakampiu, taigi ir patys yra lygiapločiai. Iš dviejų vienodų trikampių galime sudėti lygiagretainį, kurio vienas pagrindas lygus trikampio kraštinei, o aukštinė – trikampio aukštinei. Todėl trikampio plotas lygus pusei ploto stačiakampio, kurio vienas statinys lygus trikampio kraštinei, o kitas – į šią kraštinę nuleistai aukštinei. Taigi jei trikampiai turi po lygią kraštinę ir aukštinės, nuleistos į šias kraštines taip pat lygios, tai trikampiai lygiapločiai.

Apsiginklavę šia išvada imkimės Pitagoro teoremos. Ji teigia: kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio įžambinės yra lygiaplotis su figūra, sudaryta iš dviejų, ant trikampio statinių nubraižytų kvadratų.

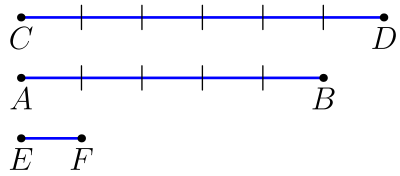


Įsižiūrėkime į trikampius EBC ir ACH. Viena vertus, jie lygūs. Kita vertus trikampio EBC plotas lygus pusei kvadrato $ADEC$ ploto, o ACH plotas lygus pusei stačiakampio $CFGH$ ploto (pagrindai ir aukštinės vienodos!). Iš to gauname, kad kvadratas $ADEC$ ir stačiakampis $CFGH$ yra lygiapločiai. Analogiškai gauname, kad kvadratas, nubraižytas ant statinio AB yra lygiaplotis su stačiakampiu, kurio statiniai yra FG ir BF. Taigi kvadrato su kraštine BC plotas lygus ant statinių nubraižytų kvadratų plotų sumai.

Ironiška, kad ši teorema, kurią nebijodami suklysti, galime pavadinti svarbiausiu pitagoriečių laimėjimu, slėpė pavojų visai jų pasaulėžiūrai. Įsivaizduokite, kad įsitikrinę, jog „pasaulį valdo skaičiai“ ir pasiekę intelektualinę palaimą, kurią suteikia pasaulio sąrangos suvokimas, jūs surandate nedidelę dailią gėlę, o kai į ją įsižiūrite, ji tampa godžia liepsna ir sunaikina visa, kas buvo įprasta ir suprantama. Pasaulis liko toks pat, tačiau jo spindesys jau nebėra atlygis už jūsų pastangas, tiktai pašaipa ir abejingumas.

Kiekvienas matematikas, patyręs, kad visa jo samprotavimų grandinė žlunga dėl netikėtai atsiskleidusios detalės, žino tą atsiradimo „prieš suskilusią geldą“ jausmą.

Tikėtina, kad Pitagoro teoremos ir savo pasaulėžiūros nesuderinamumą pitagoriečiai atskleidė nagrinėdami lygiašonį statųjį trikampį. Pažvelgsime į atsivėrusią prieštarą kiek kitaip pasitelkę turtingesnį matematinį kontekstą.



Atkarpa EF yra atkarpų AB ir CD bendrasis matas. Šių atkarpų ilgių santykis išreiškiamas skaičiais $5:6$

Įsivaizduokime dvi paprasčiausias atkarpas AB ir CD. Jeigu „viskas yra skaičiai“, tai juos pasitelkę atkarpas galėsime palyginti. Tarkime, surandome atkarpą EF, kurį į atkarpą AB telpa m kartų, o į CD – n kartų. Tada atkarpą EF turime teisę pavadinti bendruoju abiejų atkarpų matu, o jų ilgių santykį galime išreikšti skaičiais $m:n$. Jeigu skaičiai m, n turi bendrą daliklį $d>1$, tai $m=dm^*, n=dn^*$, ir atkarpa d kartų ilgesnė už EF irgi yra bendrasis abiejų atkarpų matas, o ilgių santykį galime reikšti skaičiais $m^*:n^*$. Šie skaičiai neturi didesnių už 1 bendrųjų daliklių. Kiek pagalvoję įsitikinsime, kad jeigu bet kurioms dviems iš nagrinėjamų atkarpų galime surasti bendrąjį matą, tai galima bendrąjį matą surasti ir trims (ar daugiau) atkarpoms, o jų ilgių santykį galėsime išreikšti skaičiais, kurie neturi didesnio už 1 bendrojo daliklio.

O dabar pasirinkime nors atkarpą ir nubraižykime statųjį lygiašonį trikampį, kurio statiniai lygūs pasirinktajai atkarpai. Tarkime, suradome bendrąjį statinio ir įžambinės matą ir išreiškėme ilgių santykį skaičiais $m:n$, kurie neturi didesnių už 1 bendrųjų daliklių. Tada kvadratą, nubraižytą ant statinio galime padalyti į m^2 kvadratėlių, kurių kraštinės lygios bendrajam statinio ir įžambinės matui, o kvadratą, nubraižytą ant įžambinės – į n^2 tokių kvadratėlių. Tačiau Pitagoro teorema teigia, kad šis kvadratas yra lygiaplotis su figūra, sudaryta iš ant statinių nubraižytų kvadratų, taigi

$$m^2+m^2=n^2, \quad 2m^2=n^2.$$

Iš pastarosios lygybės matome, kad n turi būti lyginis, t. y. $n=2k$, tačiau tada $m^2=2k^2$, t. y. ir m turi būti lyginis! Ši išvada prieštarauja teiginiui, kad m, n yra tarpusavyje pirminiai. Kas negerai šiame paprastame samprotavime apie statųjį lygiašonį trikampį? Prielaida, kad statinys ir įžambinė turi bendrąjį matą, t. y. kad šios atkarpos gali būti padalytos į skirtingus skaičius vienodų atkarpėlių. Ši išvada rodo, kad skaičiai „nėra viskas“, galima nurodyti netgi paprasčiausias atkarpų poras, kurių savybių negalime paaiškinti skaičiais! O ką jau kalbėti apie dar sudėtingesnius darinius ir reiškinius.

Tikėtina, kad šios pitagoriečių pasaulėžiūrai pražūtingos išvados pats Pitagoras nesužinojo. O vėlesnių amžių matematikai ją suvokė kaip iššūkį:

jeigu geometrinių ryšių negalima paaiškinti skaičiais, vadinasi – reikalingos naujos sąvokos ir nauji samprotavimo būdai. Ir jie buvo sukurti! Apskritai matematikams yra būdingas racionalus optimizmas, kurio galėtų pasimokyti ir kitose srityse nesėkmes patiriantys žmonės: jeigu tikslo negali pasiekti įprastais būdais, pakeisk požiūrį į jį. Atkarpų ilgių santykių negalima išreikšti skaičiais? O gal ir nebūtina? Gal pakanka išmokti tuos santykius palyginti, pavyzdžiui, išmokti nustatyti, kada vienos atkarpų poros santykis didesnis, kad mažesnis už kitos?

Taigi pats paprasčiausias lygiašonis statusis trikampis pasirodė esąs tikra praraja pitagoriečių pasaulėžiūrai. Tačiau yra ir „visiškai pitagorietiškų“ stačiųjų trikampių, t. y. tokių, kurių statiniai ir įžambinė turi bendrąjį matą. Jeigu parinksime bet kokius natūraliuosius skaičius $m > n$ ir nubraižysime trikampį, kurio kraštinių ilgiai yra atitinkamai

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{1}$$

trikampis bus statusis. Iš tikrųjų, lengva patikrinti, kad $a^2 + b^2 = c^2$. O išvada, kad trikampis su kraštinėmis, kurių ilgiai tenkina tokią lygybę, yra statusis, gaunama iš atvirkštinės Pitagoro teoremos.

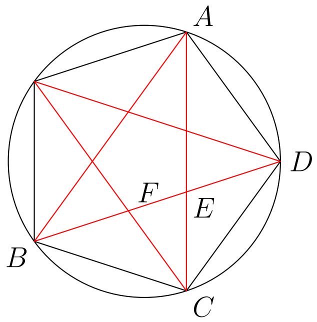
Taigi yra daug stačiųjų trikampių su bendramatėmis kraštinėmis. Ar galima juos visus kaip nors apibūdinti? Taip. Jeigu stačiojo trikampio statiniai ir įžambinė turi bendrąjį matą, tai egzistuoja tokie skaičiai m, n, kad statinių ir įžambinės ilgių santykius galima nusakyti skaičiais (1).

Pentagrama ir kiti geometrijos brangakmeniai

Penkiakampei žvaigždei – figūrai, kurią sudaro taisyklingojo penkiakampio įstrižainės, įvairios tautos teikė įvairias simbolines prasmes. Keleiviams iš XX amžiaus žvaigždė mena komunistų partijų vėliavas ir Raudonosios Armijos paradus ir žygius. Tačiau žvilgtelėkime į gilesnius istorijos vandenis: prieš gerus penkis tūkstančius metų penkiakampę žvaigždę jau braižė šumerai...

O pitagoriečiams penkiakampė žvaigždė buvo matematinio tobulumo simbolis. Iš tiesų, joje tarsi brangakmenius galime įžvelgti subtilius matematinius sąryšius. Panagrinėkime juos. Ar pitagoriečiai juos žinojo? Į šį klausimą negalima duoti neabejotino atsakymo – šaltiniai pernelyg skurdūs ir mes nežinome, kuriuos Euklido „Pradmenyse“ išdėstytus matematinius teiginius galime sieti su pitagoriečiais.

Kaip nubraižyti penkiakampę žvaigždę, jeigu galima naudotis tik klasikiniais geometriniais įrankiais – liniuote ir skriestuvu? Jeigu nubraižysime taisyklingąjį penkiakampį, tai žvaigždę gausime nubrėžę jo įstrižaines. O kaip nubraižyti taisyklingąjį penkiakampį? Kaip nubraižyti kitus taisyklinguosius daugiakampius? Prisiminę mokyklinę geometriją (jos branduolį sudaro graikų sukurtos žinios!) galėsime teigti, kad taisyklingojo trikampio, kvadrato braižymas sunkumų nekelia. Taip pat nesunku pasinaudojus taisyklingojo n-kampio brėžiniu nubraižyti dvigubai daugiau kraštinių turinčius taisyklinguosius daugiakampius. Todėl galime nubraižyti taisyklingąjį trikampį, keturkampį, šešiakampį, aštuonkampį. Jei mokėtume nubraižyti taisyklingąjį penkiakampį, tai nubraižytume ir dešimtkampį. Taigi taisyklingųjų daugiakampių rikiuotės pradžioje klaustukai kybo virš penkiakampio, septynkampio ir devynkampio... Pažvelkime į taisyklingojo penkiakampio brėžinį. Dvi jo įstrižainės ir kraštinė sudaro lygiašonį trikampį ABC.



Taisyklingajame penkiakampyje knibždėte knibžda aukso pjūvio skaičių:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DE} = \frac{DF}{DE} = \frac{BE}{BF}.$$

Kampo prieš pagrindą BC didumas lygus $180°/5 = 36°$, kampai prie pagrindo yra dvigubai didesni, jų didumai lygūs $72°$. Tokį trikampį kartais vadina auksiniu, tuoj sužinosime kodėl. Jeigu tokį trikampį nubraižytume, nebebūtų sunku nubraižyti ir taisyklingą penkiakampį: apibrėžtume apie trikampį apskritimą ir skriestuvu vieną po kito pažymėtume kitas penkiakampio kraštines (pavyzdžiui, apskritimas, kurį nubrėžtume iš centro A spinduliu BC kirstų pradinį apskritimą dviejuose taškuose, kurios yra penkiakampio viršūnės.

Penkiakampio įstrižainės ir kraštinės sudaro daug trikampių. Įsižiūrėkime į du: $\triangle ABC$ ir $\triangle AED$. Jie yra lygiašoniai ir panašūs. Pasinaudoję panašumu parašykime:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{ED}{AE}.$$

Tačiau $BC = AD = AE$ ir $ED = EC$, taigi

$$\frac{AE}{AC} = \frac{EC}{AE} \quad \text{arba} \quad \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{EC}. \tag{2}$$

Ši lygybė rodo, kad taškas E dalija kraštinę AC ypatingu būdu: kraštinės ir didesnės dalies ilgių santykis lygus didesnės ir mažesnės dalių ilgių santykiui. Toks atkarpos dalijimo būdas – Antikos graikų išradimas. XIX amžiuje šį atkarpos dalijimo būdą imta vadinti aukso pjūviu, o patį santykį - aukso pjūvio skaičiumi.

Aukso pjūvio skaičių nesunku surasti. Iš tikrųjų, jeigu AC ilgis lygus vienetui, tai pažymėję AE ilgį x iš (2) gausime:

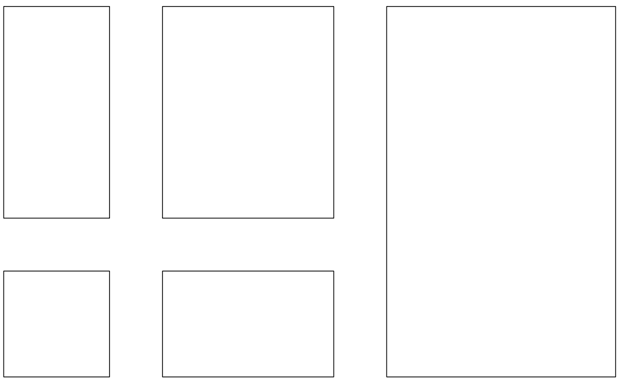
$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}, \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aukso pjūvio skaičių įprasta žymėti raide φ. Šitaip žymėdami mes primename (tiems, kas žino!) didįjį graikų skulptorių Fidiją, kurio graikiškai užrašytas vardas prasideda šia raide. Taigi

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Skaičius φ nors ir neužrašytas slypi daugybėje meno ir architektūros kūrinių. Iš kelių stačiakampių jūs visada išskirsite tą, kurio kraštinių santykis lygus aukso pjūvio skaičiui. Jeigu norėsite, kad jūsų paveikslas ar nuotrauka keltų darnos pojūtį, rinksitės būtent tokį stačiakampį. Jeigu jūsų sumanymas kitoks – skaičiumi φ naudositės, kaip atskaitos tašku, nuo kurio stengiamasi nutolti.

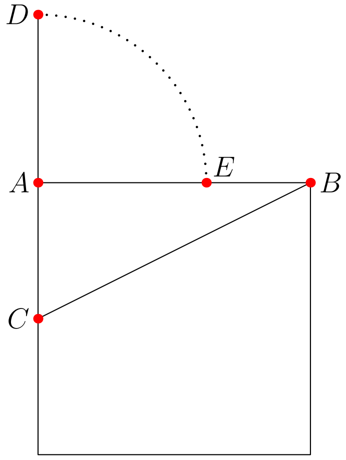
Taisyklingojo penkiakampio įstrižainės ir kraštinės ilgių santykis lygus aukso pjūvio skaičiui. Taigi lygiašonis trikampis ABC nusipelno auksinio vardo, nes jo šoninės kraštinės ir pagrindo ilgių santykis lygus φ.



Daugelio akims stačiakampis, kurio kraštinių santykis lygus aukso pjūvio skaičiui, teikia dermės ir ramybės pojūtį. Kvadratas irgi harmoninga figūra, tačiau ar atsiranda jausmas, kad šiai figūrai stinga subtilumo? Panašus jausmas kyla klausant žmogaus, kuris sako tiesą, tačiau pernelyg jau tiesmukais žodžiais.

Tarkime, reikia nubraižyti taisyklingąjį penkiakampį, kai duota jo įstrižainė. Padaliję duotąją atkarpą aukso pjūvio santykiu galėsime nubraižyti auksinį trikampį, kurio šoninė kraštinė lygi duotajai kraštinei. Apibrėžę apie šį trikampį apskritimą ir per šoninių kraštinių vidurio taškus nubrėžę statmenis šoninėms kraštinėms, raskime taškus, kuriuose jie kerta atitinkamus apskritimo lankus gausime likusias dvi taisyklingojo penkiakampio viršūnes.

Taigi – aukso pjūvis. Kaip padalyti atkarpą aukso pjūvio santykiu? Tuoj parodysiu, kaip graikai tai darė...



AB – kvadrato kraštinė, $AC = \frac{1}{2}AB, CD = BC, AE = AD$, E dalija AB aukso pjūvio santykiu.

Įsižiūrėjau į brėžinį ir pradėjau galvoti apie graikų matematikos „žmoniškumą“. Visus samprotavimus ir santykius jie reiškė žodžiais. Tai nelabai patogu, tačiau žodžiai nekelia baimės, jie žmogaus „nepranoksta“, jie skirti „atverti“. Mes naudojamės ištobulinta simbolių ir žymėjimų kalba, tačiau kam niekada nėra kilęs jausmas, kad jie „paslepia“? Mes įpratome naudotis simboliais taikydami veiksmų su jais taisykles. Kartais tokie veiksmai pateikia netikėtas išvadas ir tuomet atrodo, kad jos tarsi padiktuotos Delfų orakulo. Simbolinė kalba grąžino į matematiką mistiką, kurią pasiryžę viską išsiaiškinti ir pagrįsti, buvo išguję graikai!

Kitas nuostabus graikų matematikos bruožas – konstruktyvumas. Tyrinėti galima tik tai, kas sukurta, sukonstruota, be to – paprasčiausiais įrankiais: skriestuvu ir liniuote. Toks požiūris į matematiką nebesugrįš.[1]

[1] Buvo bandymas jį grąžinti XX a. viduryje, bandant peržiūrėti matematinius įrodymus ir siekiant atsisakyti visų nekonstruktyvių samprotavimų. Tačiau pasirodė, kad atsisakydami jų esame priversti labai nuskurdinti matematiką, atsisakydami daugelio jos teiginių. Atsisakyti sunkiu triūsu įgyto turto visada skausminga. Todėl konstruktyvizmo kryptis matematikoje taip ir liko šalikeliu, kuriuo mažai kam įdomu keliauti.

Pitagoro gyvenimas: maždaug 569-475 pr. Kr.

Gimtinė – Samoso sala. Tėvas pirklys. Vaikystėje keliavo su juo. Gerai grojo lyra, deklamavo Homerą. Geometrijos mokytojai – Talis ir Talio mokinys Anaksimandras. Apie 553 m. pr. Kr. – į Egiptą. Pokalbiai su žyniais, pats gavo žynio šventimus. 525 m. pr. Kr. persai užėmė Egiptą. Pitagoras – karo belaisvis, į Babiloną. Nelaisvė išėjo į naudą: bendravimas su Babilono magais, aritmetikos ir muzikos studijos. Apie 520 m. pr. Kr. gimtinėje. Įsteigė mokyklą: susėsdavo puslankiu. Gimtinėje pranašu nebūsi. Apie 518 m. pr. Kr. Italijoje, pitagoriečių mokykla Krotone. Artimiausių mokinių (matematikų) ratas: kartu gyveno, neturėjo nuosavybės, vegetarai, laikėsi griežtų gyvenimo taisyklių. Vyrai ir moterys. Pitagoro žmona irgi matematikė. Atradimus laikė bendrais, autoryste nesipuikavo. Didysis pitagoriečių ratas – gyveno savo namuose, galėjo turėti nuosavybę ir valgyti mėsą. Apie 508 m. pr. Kr. pirmieji išpuoliai prieš pitagoriečius. Biografo (Jamblicho) nuomone juos surengė kilmingas Krotono pilietis, labai norėjęs tapti pitagoriečiu, bet dėl netinkamo charakterio nepriimtas. Mokykla išvaikyta, Pitagoras pasitraukė į Metapontą. Mirties aplinkybės nėra aiškios. Pitagoras manė, kad svarbiausia gyvenime – lavinti, gryninti sielą. Kelias – intelektuali veikla, griežtų etinių principų laikymasis. Visiškai sutinku su tuo. Pitagoriečiai sakydavo maždaug taip: „brėžinys – laiptelis, o ne pinigas“, kitaip tariant tyrinėti reikia, kad tobulėtum, o ne pelnytumeisi. Ir tam aš visiškai pritariu. Pitagoriečių yra ir mūsų laikais, nors jie ir patys to nežino.

Šaltiniai

- A. Baltrūnas. *Pitagoras*, Matematikos žurnalas $\alpha + \omega$, 1997,2, 55-60.
- J. J. O'Connor, E. F. Robertson. *Thales of Miletus.*
- G. J. Allman. *Greek geometry from Thales to Euclid*, Hodges, Figgis & co., Green & co., Dublin, London, 1889.
- Iamblichus. *The life of Pythagoras*, Krotona ; Hollywood, Calif. : Theosophical Pub. House, 1918.