

Matematikos istorijos skiautiniai

VILIUS STAKĖNAS

Nauji žmonės

Nesu tikras, ar viskas, kas mūsų Žemėje dėjosi: judėjo, skardėjo, skambėjo ir dvelkė, nėra įrašyta ir saugoma kokiose nors nepalyginti tobulesnėse laikmenose nei mūsų skaitmeninės. Jei taip – ką gi išvystume aplanko „*Egėjo pusiasalis*“ trijų-keturių tūkstančių metų senumo įrašuose? Akmenis, skurdžią augmeniją, kalnų ožkeles, žydrus vandenius... Nepatikėtum, kad kažkur čia bus pakabintas mūsų civilizacijos lopšys. Kur, šioje akmenynėje?

Nukreipk žvilgsnį į pietryčius ir pamatysi ... nebe naivias kūdikystės amžiaus tautas, bet subrendusias, jau spėjusias patirti darbų, kovų ir lemties nuovargį. Išvysi Egipto sfinkną, daug kartų savo valdovus pakeitusią Tarpupio žemę, Kretos rojaus griuvėsius...

Jeigu praleistume dar kelis monotoniškus, vis tų pačių jūros atodūsių ar įtūžio priepuolių sklidinčius dešimtmečius, išvystume, kaip vis dažniau ant uolų pasirodo kitokie žmonės. Sustoja ir žvalgo horizontus, iš melsvų ūkų išnyrančias salas. Jų apdarai grubūs, ginklai nedailūs, kalba šiurkšti, tačiau jie stiprūs, greiti, ryžtingi, o žvilgsniai skvarbūs, ir juose nėra nei užuominos to oraus susikaupimo, o kartu ir atšvaito liūdesio, kuris atsiranda akyse žmonių, daug žinančių, patyrusių ir daug apie tai mąščiųsių.

Prieš maždaug pusketvirto tūkstančio metų į Egėjo pusiasalį atėjo nauji žmonės, regis, kažkur iš Vengrijos slėnių. Save jie vadino helėnais, o kaimyninės ir tolimesnės tautos pradėjo vadinti juos graikais.

Helėnai neturėjo, matyt, nei šlovingos istorijos atminties, nei iš dievų įgytos išminties bei žinių, kurias derėjo pagarbiai saugoti. Užtat energijos, smalsumo, nuovokos ir gudrumo tikrai nestokojo. Ir drąsos, beje. Egiptiečių ar babiloniečių žyniai kaip savo akį sergėjo šimtmečiais įgytą savąją patirtį ir skyrė kas sava, o kas svetima. O energingų imigrantų savasties saugojimo užduotis virš galvų nekybojo, neišmanėliais pasirodyti jie nebijojo, o progų pasimokyti iš bet ko nepraleisdavo. Viską, ko graikai išmoko iš senesniųjų tautų, jie pertvarkė, pakeitė ir pakylėjo į visai kitą lygį. Kodėl jiems tai pavyko per istoriškai trumpą laiką, o egiptiečių, pavyzdžiui, žinios mažai keitėsi išties tūkstantmečius?

Niekas neduos atsakymo, kurio nebūtų galima būtų užginčyti. O aš tik pateiksiu tokį negudrų pavyzdį. Jeigu jūs iš savo prosenelių paveldėjote seną

laikrodį, tai galbūt net surūdijusių rodyklių nedrįssite keisti. Tačiau jeigu jį pusvelčiui įsigijote sendaikčių turguje, tai ir rodykles tikriausiai pakeisite, ir rašmenis atnaujinsite, o gal ir iš viso – numoję ranka į naudą – išardysite norėdami suprasti, kaip jis sukonstruotas.

Naujųjų žmonių joks paveldas neslėgė, o troškimui įgyti, suprasti ir sužinoti nebuvo ribų.

Raidės

Graikai prie Trojos sienų: Agamemnonas, Menelajus, Achilas, Ajaksas – manau, jie mokėjo skaičiuoti. Tuo labiau Odisėjas. Bet ar mokėjo užrašyti skaičius? Tikriausiai ne. Viena vertus, išarto žodžio, matyt, pakako. Be to – per tuos karus ir kitus žygius vis nerasdavo laiko skaitmenų ženklams sukurti. Visai kaip mes: darbų ir žygių daug, pagalvoti nėra kada.

Praėjus keliems šimtmečiams po nemariųjų įvykių prie Trojos sienų į Graikiją atsibastė jūrų žmonės – finikiečiai ir atvežė, pasak Herodoto, įvairių naujovių. Viena iš nuostabiausių – abėcėlė garsams užrašyti. Graikams ji labai patiko. Mokėsi jie uoliai, galbūt ir todėl, kad mokymasis po visokių karų ir pramušgalviškų žygių irgi buvo naujas užsiėmimas. Perpratę finikiečių abėcėlę graikai ją pertvarkė, prisitaikė ir ėmė kurti raštus... Jei raidės tinka garsams žymėti, kodėl nepritaikius jų skaičiams? Taigi graikai buvo gana pragmatiški žmonės: kas buvo po ranka, tuo mokėjo ir pasinaudoti.

Žinoma, istorija nebuvo tokia paprasta, kaip aš čia ją dėstau. Tačiau, jeigu nesuprastinčiau, jei stengčiausi nusakyti visus motyvus, skirtumus ir aplinkybes, gal niekada iš antikinės Graikijos šimtmečių neištrūkčiau. Taigi...

Pirmiausia graikai nusprendė, kad skaičiams žymėti pakanka vos penkių raidžių ir vertikalaus brūkšnelio. Vertikalus brūkšnelis, aišku, žymi vienetą. Taigi

vienas → |, du → ||, trys → |||, keturi → ||||.

Penketui žymėti graikai nusprendė naudoti raidę Γ , dešimčiai – Δ , šimtui – H , tūkstančiui – X ir dešimčiai tūkstančių – M . Šių raidžių eilutėmis žymėjo visus skaičius, visai kaip egiptiečiai. Tiesa, kad užrašas būtų trumpesnis, penkias dešimtis, penkis šimtus, penkis tūkstančius ar penkiasdešimt tūkstančių žymėjo naudodami tik dvi raides:

$$\Gamma^{\Delta}, \Gamma^H, \Gamma^X, \Gamma^M.$$

Skaičių 27832 senovės graikas užrašytų taip:

$$MM\Gamma^X XX\Gamma^H HHH\Delta\Delta||.$$

Ilgos skaičius žyminčios raidžių eilės palaipsniui graikams nusibodo. Jonijoje pradėta naudoti skaičių žymėjimui visos abėcėlės raidės. Naujas sumanymas raidėmis žymėti skaičius labai paprastas: dvidešimt septynias abėcėlės raides jie padalijo į tris grupes. Pirmosios grupės raidėmis žymėjo vienetus, antrosios – dešimtis, trečiosios – šimtus. Beje, dvi graikiškos abėcėlės raidės yra išnykę, todėl vietoje jų ženklų užrašiau raidžių vardus (koppa ir sampi).

A, α	1	I, ι	10	P, ρ	100
B, β	2	K, κ	20	Σ, σ	200
Γ, γ	3	Λ, λ	30	T, τ	300
Δ, δ	4	M, μ	40	Y, ν	400
E, ϵ	5	N, ν	50	Φ, ϕ	500
F	6	Ξ, ξ	60	X, χ	600
Z, ζ	7	O, o	70	Ψ, ψ	700
H, η	8	Π, π	80	Ω, ω	800
Θ, θ	9	koppa	90	sampi	900

Žymėti skaičius iki tūkstančio – visai paprasta. O kaip žymėti didesnius skaičius? Tūkstančiams graikai naudojo tas pačias raides, kaip ir vienetams tik rašydami prieš raidę ženkliuką, panašų į kablelį. Taigi $2 \rightarrow \beta$, o

$$2000 \rightarrow, \beta \quad 3733 \rightarrow, \gamma \psi \lambda \gamma.$$

Idėja, kad ženklo reikšmė priklauso nuo vietos, graikams buvo žinoma! Tačiau jie jos neplėtojo, matyt, būdami visiškai patenkinti savo skaičių rašymo sistema.

Dešimties tūkstančių kartotinius jie rašė labai paprastai, atskirdami nuo mažesniųjų skaičių ženklų tašku:

$$30000 \rightarrow M\gamma, \quad 33733 \rightarrow M\gamma \cdot, \gamma \psi \lambda \gamma, \quad 1000001 \rightarrow M\rho \cdot \alpha.$$

Net didelius skaičius galima užrašyti trumpomis trumpomis graikiškų raidžių eilutėmis.

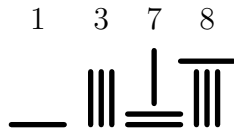
Kinų pagaliukai

Graikija – tik lopinėlis pasaulio, kurio civilizacija gimė Nilo, Tigro ir Eufrato upių slėniuose. O Kinija – visai kitas, didžiulis pasaulis... Jame irgi teka dvi upės, kurių pakrantėse žmonės kūrė mokslą ir kultūrą: Janczė ir Geltonoji.

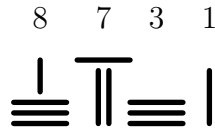
Kaip kinai rašė skaičius ir kaip skaičiavo, kai graikai žavėjosi savo raidėmis?

Kinai skaičiavo pagaliukais. Tuoj pamatysite, kad jų būdas anaip tol ne juokingas.

Anų laikų (tarkime, apie 400 m. pr. Kr.) kinų skaičiuotojas skaičių 1378 sudėliotų iš bambuko lazdelių taip:



O skaičių 8731 užrašytų taip:



Taigi ši skaičių žymėjimo sistema yra dešimtainė ir pozicinė. Be to kiekvienas skaitmuo iš lazdelių gali būti sudėtas dvejopai. Kinai skaičiavimams naudojo lenteles, suskirstytas skyriais: vienetų skyrius, dešimčių skyrius ir taip toliau. Tai patogiu: gretimų skyrių skaitmenims naudojant skirtingus vaizdavimo būdus visada juos atskirsi. Vertikalus brūkšnelis vienetų skyriuje reiškia vienetą, o dešimčių – jau penkis, horizontalus atitinkamai penkis ir vienetą. Jeigu kokio nors skyriaus skaitmens nėra, pavyzdžiui, 103 neturi dešimčių skaitmens, tai skyrelis paliekamas tuščias. Du skaičius sudėlioję eilutėse vieną po kito galime lengvai atlikti paprastus aritmetinius veiksmus.

Majų taškai ir brūkšneliai

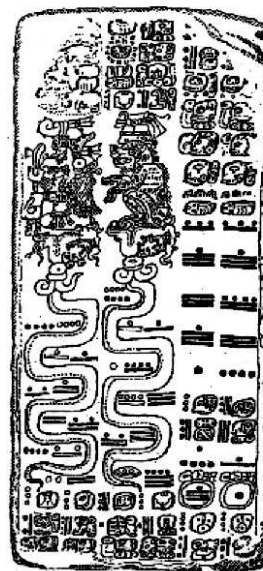
Kai antrojo tūkstantmečio viduryje į Ameriką atsibeldė ispanai, tūkstantmetė majų imperija jau buvo pavargusi. Dabartinės Gvatemalos ir pietų Meksikos žemėse majai buvo sukūrę valstybę ir savitą kultūrą. Ją primena didingų miestų liekanos, piramidės ir tiltai. Kas lėmė didžios civilizacijos nuosmūkį? Kas dabar bepasakys... Galbūt per dideli užmojai?

O europiečiai tuomet anaipol nebuvo pavargę. Kaip tik priešingai – Europa rąžėsi ir dairėsi naujos veiklos. Veiklos radosi apščiai, vieni kūrė, kiti naikino, kas jau sukurta. Štai tokio naikinimo įkarščio buvo sklidiną ispanų vienuolis pranciškonas Diego de Landa (1524-1579), paskirtas užkariautos Jukatano žemės vyskupu. Jo požiūris į savo pareigas buvo labai paprastas: išvalyti šį velnio apsėstą kraštą. Šiai šventai veiklai tiko visos priemonės: kur nepakako aistringo žodžio, padėjo kankinimai ir ugnis. Žmogus jis buvo gabus: kad įgytų pasitikėjimą, stengėsi pažinti papročius ir kultūrą, o kai majai atverdavo savo paslaptis ir raštus, pasistengdavo, kad ugnis juos prarytų.

Kaip ir egiptiečiai, majai rašydavo ant ilgų iš tošies padarytų juostų, kurias sulankstydavo kaip armonikos dumples. Šios piešiniais ir ženklais išmargintų puslapių knygos gerai degė Diego de Landos laužuose, o užkastos ir išvengę ugnies – supuvo. Gerai pasidarbavo vyskupas: iš tūkstantmetės valstybės rašytinio palikimo liko vos keturi raštai, dabar vadinami kodeksais. Laimei, rašmenų yra daugiau – iškaltų akmenyje ant statinių sienų.

Štai tokia liūdna istorija apie stropumą. Ji baigėsi gana keistai: stropusis vyskupas gyvenimo pabaigoje nuveikė dar vieną darbą – parašė tikslų ir išsamų veikalą apie majų kultūrą, kurią taip stengėsi sugriauti!

O dabar apie majų mokslą. Majai buvo neprilygstami astronomai. Majai stebėjo dangų ir stengėsi išvelgti jame ženklus, rodančius, kaip gyventi žemėje. Jie jungė dienas į metus, metus į ciklus, taigi – skaičiavo atsidėję. Skaičiams rašyti naudojo dvidešimtainę skaičiavimo sistemą, ne bet kokią – bet pozicinę. Skaitmenis rašė stulpeliu: žemiau mažesniųjų, aukščiau – didesniųjų skyrių skaitmenis. Jeigu kurio nors skyriaus vienetų nebuvo – rašė „nebuvo“, kitaip tariant – nulio ženklą. Kitiems skaitmenims užrašyti jiems pakako dviejų ženklų: brūkšnelio ir taško.



Puslapis iš Drezdene saugomo majų kodekso

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
—	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
—	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
—	•	••	•••	••••

Majų skaitmenys

Tiesa, reikia paminėti, kad astronominiams skaičiavimams jie naudojo „negryną“ dvidešimtainę sistemą: vienetus skaičiavo iki devyniolikos, dvidešimtis vėl skaičiavo iki devyniolikos, o po to skaičiavo ne dvidešimčių dvidešimtis, bet dvidešimčių aštuonioliktukas... Kodėl? Skaičių rašymo būdą majai derino prie savo kalendoriaus. Jie turėjo net tris kalendorius, pagal vieną jų metus sudarė 18 mėnesių po 20 dienų, taigi $18 \times 20 = 360$ yra dienų skaičius majų kalendoriaus metuose.

Išreiškę skaičių taip:

$$d_0 \cdot 20^0 + d_1 \cdot 20^1 + d_2 \cdot (18 \times 20^1) + d_3 \cdot (18 \times 20^2) + \dots + d_n \cdot (18 \times 20^{n-1})$$

ir surašę skaitmenų d_i majų ženklus stulpeliu gautume skaičiaus užrašą majų sistemoje.

Jauno (iki 20 metų) žmogaus pragyventų dienų skaičių galime užrašyti trimis majų skaitmenimis. Pirmasis skaitmuo reikštų pragyventų metų, antrasis – mėnesių, trečiasis dienų skaičių.

Jeigu tokį būdą naudojo, matyt, buvo juo patenkinti. Tačiau matematiniu požiūriu jis turi vieną trūkumą: yra skaičių, kuriuos galima užrašyti ne vieninteliu būdu. Pavyzdžiui,

$$5 + 18 \cdot 20 + 6 \cdot (18 \times 20) = 5 + 0 \cdot 20 + 7 \cdot (18 \times 20).$$

Tokia nevienareikšmiškumo galimybė yra tik tuo atveju, kai antrasis (dvidešimčių) skaitmuo yra 18 arba 19.

Mes dabar manome, kad nulio skaitmenį, kuris taip supaprastina skaičavimus (prisiminkime babiloniečių sunkumus!) europiečiai gavo iš indų. Ką gi, tenka pripažinti, kad majų nulį europiečiai sudegino.



*Skaičiaus 12606
majų skaitmenys*

Šaltiniai

- Aleksandras Baltrūnas. *Nuo nulio iki...*, Vilnius, Vyturys, 1991.
- F. Cajori *A History of Mathematical Notations, Vol. I*, The Open Court Company, 1928; 2007.