Matematikos istorijos skiautiniai

Vilius Stakėnas

Molinukės

Tigras ir Eufratas: dvi kalnuose gimusios upės. Žemyn į Iraką. Čia šakojasi ir jungiasi kanalais, renka šiuolaikinių Iraqo politinių dramų atspindžius, susitinka ir skuba į Persų įlanką.

Kur galima išvysti prieš kelis tūkstančius metų tarp šių upių sukurtos kultūros atspindžius?

Rusvose dykumose karšti vėjai kelia dulkių sūkurius. Keliai iš viršaus panašūs į besiraitančius tarp kalvų driežus.

Tas lėkštas kalvas retai paliečia lietus, vien tik tvaskūs karštos vasaros saulės spinduliai. Po jomis – prieš tūkstančius metų pastatyti miestai, jų kultūros atspindžiai.

Atspindžiai, kur? Molinėse lentelėse – lyg veidrodėliuose.

Prieš gerus penkis tūkstančius metų trikampį primenančioje žemėje tarp Tigro ir Eufrato gyveno šumerai. Įsižiūrėjęs į išlikusių bareljefų ir mozaikų figūrėles įsivaizduoju juos taip: nedideli tačiau kresnoki žmogeliai išplėstomis akimis. Vaikščiojo neskubėdami, bet užtat visada žinojo, kur eina. Išplėstos akys, lyg iš nuostabos pakilę antakiai ir lengva, gudri šypsena aišku, rodo sumanumą ir susidomėjimą pasauliu. Todėl šumerus rašto dievas Nabu ir išmokė rašto pirmiausia.

Šumerų tekstas su iliustracijomis

Šumerai išmoko dar nesukietėjusioje molinėje lentelėje aštria nendre įspausti duobutes bei brūkšnius ir susitarė tarpusavyje dėl jų reikšmės. Tai labai modernus informacijos rašymo būdas. Į optinius diskelius rašoma ne kitaip – įspaudžiamos duobutės (arba duobutės imituojamos lazerio spinduliu išdeginant paviršių). Tik optiniai diskeliai daromi ne iš tokios patvarios medžiagos kaip šumerų molinukės.

Todėl, matyt, nėra ko tikėtis, kad optiniai diskeliai kaip šumerų lentelės išplauks per tūkstantmečius.

Lenteles, kurios jų nuomone, turėjo išliekamąją vertę, „iškepdavo“, t. y. išdegdavo krosnyse. Ir daugybė šių tokių informacijos laikmenų nesubyrėjo tūkstančius metų – iki mūsų dienų.

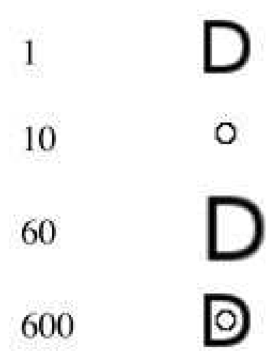
> *„Tose dienose, tose seniai prabėgusiose dienose, tose naktyse, tose tolimose naktyse, tais metais, tais nutolusiais metais, tais laikais šalyje gyveno išminčius, mokėjęs kalbėti išpuoselėtais žodžiais, Kurupagas, išminčius, mokėjęs kalbėti išpuoselėtais žodžiais gyveno šalyje...“*

Taip prasideda vienas seniausių mums žinomų šumerų tekstų... Išmintingų patarimų sąvadas, išraižytas molinėje lentelėje prieš kokius penkis tūkstančius metų. Šumerų gyvenimo ženklas.

Šumerai. Seniausia civilizacija Tarpupyje – žemėje tarp Tigro ir Eufrato. Jie išrado ratą, mokėjo statyti namus iš plytų. Gyveno miestuose-valstybėse, kurias skyrė natūralios ribos, kanalai. Sukūrė skaičių rašymo sistemą, kurią perėmė ir ištobulino vėlesnės Tarpupio civilizacijos.

Vėliau šumerus nugalėjo ir išstūmė akadai, tie buvo visai kitokie. Geriausiai žinomas atvaizdas – bronzinė jų karaliaus Sargono kaukė: pusę veido dengia garbanota barzda, valdingai sučiauptos lūpos... Kiti užkariautojai vėliau išstūmė ir akadus.

Skaičiavimas po 60



Senieji šumerų skaitmenys

Vienas iš šumerų kultūros dalykų – jų skaičių rašymo sistema. Minkštoje molio lentelėje šumerai nendre įspausdavo savo rašmenis: duobutes ir griovelius. Kaip jie rašė skaičius?

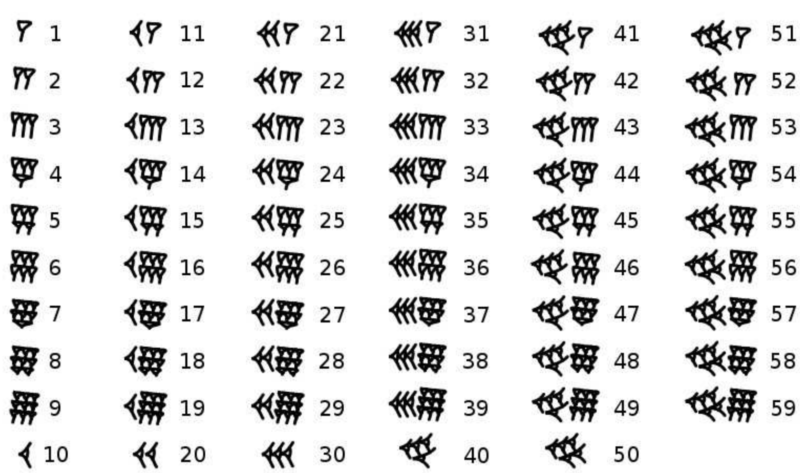
Vienetą žymėjo įspausdami trumpą brūkšnį įkypai plona nendre; ta pačia nendre laikydami ją statmenai lentelei pažymėdavo dešimtį; didesne nendre įspaustas įstrižas brūkšnys jau reiškė šešiasdešimt, o šiame brūkšnyje įspaudę duobutę mažąja nendre jau gautume šešių šimtų ženklą. Taigi šumerai išmoko skaičiuoti dešimtimis ir šešiasdešimtimis ir to išmokė kaimyninių žemių tautas.

Šumerai nekūrė imperijų, bet gyveno miestuose valstybėse. Praėjus geram tūkstančiui metų, kai buitis buvo, galima sakyti, sutvarkyta, iš pietų atkeliavo akadai. Jie su šumerais nesigiminiavo, tai matyti ir iš išvaizdos: akadai buvo liekni, barzdoti ir pikti. Jų karalius Sargonas įsikalė į galvą, kad nenurims, kol nesukurs didelės karalystės, taigi akadams nieko daugiau ir neliko tik kariauti ir griauti.

Štai šitaip šumerai ir išnyko. Akadai, aišku, vėliau irgi išnyko, nieko nepadarysi. Tačiau išstūmę šumerų gentis, nesunaikino jų palikimo. Reikia pripažinti, nuovokos akadams užteko. Jie ištobulino iš šumerų paveldėtą skaičių rašymo sistemą. Pirmiausia, akadai modernizavo rašymo įrankius: vietoje apvalių nendrių pradėjo naudoti pagaliukus ar plunksnas, kuriomis galima braižyti. Todėl matematinėse vėlesnių laikų lentelėse pasitaiko ir brėžinių.

Akadai irgi tik vienas Tarpupio žemės istorijos epizodas. Mes, nelabai tą istoriją išmanantys ir daug nesukantys dėl jos sau galvos, vadiname tą žemę Babilonija, o gyventojus – babiloniečiais. Taip leiskite ir man elgtis, nes, galų gale, nesupaisysi, kas sumanyta šumero, kas akado, o kas asiro ar perso...

Skirtingos tautos sukūrė skirtingus skaičiavimo būdus. Kitaip būti negalėjo, juk akademiniai mainai ir vizituojantys dėstytojai – naujausių laikų išradimas. Vienos tautos skaičiavo dešimtimis, kitos po dvi dešimtis, o štai babiloniečiai – po šešias dešimtis. Ir visus, net ir labai didelius skaičius rašė naudodami tik du ženkliukus: statmeno ir pasviro dančio. Kitaip tariant – babiloniečiai naudojo pozicinę skaičiavimo sistemą su pagrindu 60. Taigi jiems reikėjo penkiasdešimt devynių skaitmenų. Po kelių raidos šimtmečių skaitmenų forma nusistovėjo: visi jie vaizduojami naudojant du ženklus vertikaliai ir horizontaliai įspaustomis trikampio formos duobutėmis. Vertikali įspauda reiškia vienetą, horizontali – dešimtį. Skaitmenys atrodo kaip paukščių nutūpti krūmai arba lekiančios jų rikiuotės. Tačiau daugumai šie ženklai primena dantis, todėl raštas taip ir vadinamas – dantirasčiu.



Babiloniečių skaitmenys

Babiloniečių skaičių rašymo sistema pozicinė su pagrindu 60, tai reiškia, pavyzdžiui, kad ir skaičius 3, ir $3 \cdot 60$, ir $3 \cdot 60 \cdot 60$ rašomi vienodai, naudojant tą patį ženklą (skaitmenį). Mes irgi naudojame tą patį skaitmenį ir trejetui, ir trims šimtams, ir trims tūkstančiams užrašyti. Ką skaitmuo reiškia, mums pasako prirašytų nulių skaičius. Babiloniečiai tuščiai vietai žymėti ženklo nebuvo sugalvoję. Galima juos suprasti – kaip gali žymėti nieką? Jeigu sukūrei nieko ženklą, panaikini nieko prigimtį: kas turi vardą ar ženklą, nebėra niekas.

Kokį skaičių iš tikrųjų reiškia ženklų seka, babiloniečiai turėdavo nuspręsti iš konteksto.

Įsivaizduokite, kad mes praradome nulio simbolį. Tada, pavyzdžiui, skaitmenų seka, 4257 gali reikšti bent kuriuos iš skaičių (ir ne tik juos):

$$4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7,$$
$$4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10,$$
$$4 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7,$$

o taip pat ir

$$4 \cdot 10 + 2 + \frac{5}{10} + \frac{7}{10^2}, \quad \frac{4}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^6}.$$

Štai su kokiais sunkumais susiduriama vengiant niekui suteikti vardą! Žinoma, galima tarp skaitmenų palikti tarpus (babiloniečių raštinininkai taip ir darydavo), tačiau tada reikia stropiai juos matuoti – kelių skaitmenų nebuvimą atitinka paliktas tarpas.

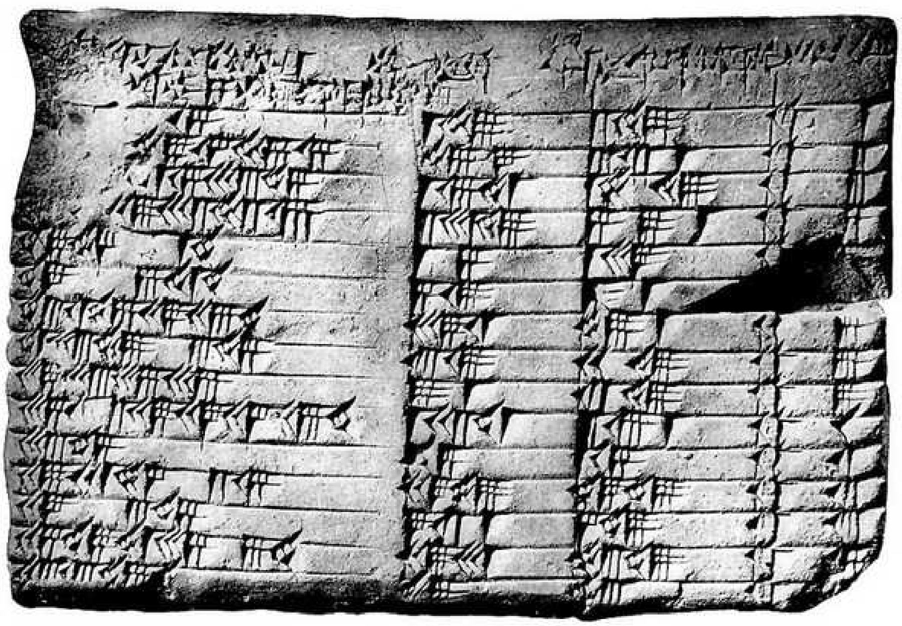
Babiloniečiai iš tikrųjų skaičiuodavo ne tik su sveikaisiais skaičiais, bet ir su trupmenomis. Jų trupmenos buvo, žinoma, šešiasdešimtainės.

Vienu požiūriu šešiasdešimtainės trupmenos pranašesnės už mūsiškes dešimtaines. Kokias paprastąsias trupmenas $\frac{m}{n}$ galime išreikšti baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis? Tik tas, kurių vardikliai yra gauti sudauginus dvejetus ir penketus, t.y. $n = 2^a 5^b$. O šešiasdešimtainėmis trupmenomis galima išreikšti paprastąsias trupmenas, kurių vardikliai $n = 2^a 3^b 5^c$.

Pozicinė skaičių rašymo sistema – didingas matematinis išradimas. O dar ir šešiasdešimtainės trupmenos! Skaičiuodami laiką mes iki šiol jomis naudojamės. Tačiau nenuosekliai: jei reikia laiko vienetų, mažesnių už sekundę, naudojame šimtąsias, tūkstantąsias sekundės dalis. O reikėtų – šešiasdešimtąsias, trys tūkstančiai šešiašimtąsias...

322 Plimptono lentelė

Archeologai surado tūkstančius babiloniečių molinių lentelių. Daugelyje jų surašytos matematinės žinios bei skaičiavimai. Viena iš įdomiausių matematinių lentelių surasta pietinio Irako dykumoje ir patekusi į Niujorko kolekcionieriaus G. Plimptono rinkinį. Ji literatūroje vadinama 322-ąja Plimptono lentele.



322-oji Plimptono lentelė

Joje – penkiolikos eilučių ir keturių stulpelių skaičių lentelė. Paskutiniame stulpelyje užrašyti eilučių eilės numeriai. Kituose stulpeliuose surašyti mįslingi skaičiai. Štai kokie skaičiai užrašyti pirmųjų penkių eilučių antrame ir trečiame stulpeliuose:

119	169
3367	4825
4601	6649
12709	18541
65	97

Ką jie reiškia? Mįslę pabandė įminti žymus Babilonijos senųjų matematinių tekstų tyrinėtojas O. Neugebaueris. Pastebėkime, kad trečiojo stulpelio skaičiai yra didesni už antrojo stulpelio skaičius. Pažymėkime antrojo stulpelio skaičių b, o trečiojo c bei apskaičiuokime kvadratų skirtumą $c^2 - b^2$. Šis skirtumas vėl bus sveikojo skaičiaus kvadratas! Taigi kiekvienoje eilutėje užrašytas lygties

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

sprendinys, kitaip tariant – stačiojo trikampio statinio ir įstrižainės ilgiai. Šie trikampiai ypatingi tuo, kad visų jų kraštinių ilgiai reiškiami sveikaisiais skaičiais.

Kaip babiloniečiai sudarė šią lentelę ir kodėl išdėstė skaičių trejetus tokia tvarka?

Jeigu parinkę natūraliuosius skaičius $u > v \geqslant 1$ apibrėšime

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2,$$

tai skaičiai a, b, c tenkins (1) lygybę. Jeigu parinktume skaičius $v < 60$, be to imtume u, v sudarytus iš pirminių skaičių $2, 3, 5$ laipsnių, tačiau neturinčių bendrųjų daliklių, pavyzdžiui, $u = 24, v = 5$, tai apskaičiavę b, c gautume Plimptono eilutės skaičius. Pavyzdžiui, pirmoji eilutė gauta imant $u = 12, v = 5$.

O kas užrašyta pirmajame stulpelyje? Pirmojo stulpelio skaičius galima interpretuoti kaip stačiojo trikampio mažesniojo smailojo kampo tangento kvadratą, t.y. $\frac{b^2}{a^2}$. Pavyzdžiui, santykiai $\frac{b}{a}$, atitinkantys pirmųjų eilučių skaičius yra tokie:

$$\frac{119}{120} > \frac{3367}{3456} > \frac{4601}{4800} > \frac{12709}{13500} > \frac{65}{72}.$$

Taigi eilutes atitinkantys statieji trikampiai išdėstyti ne bet kaip, bet mažinant vieną smailųjį kampą.

Žinoma, mes negalime būti tikri, kad Neugebauerio teorija yra teisingas Plimptono lentelės mįslės įminimas. Kas gali būti tikras, kad įspėjo, ką galvojo raštininkas palinkęs virš lentelės prieš keturis tūkstančius metų?

Kvadratinės lygtys ir šaknys

Babiloniečių matematiką teisinga pavadinti taikomąja. Arba skaičiavimo matematika. Geometrinės figūros ir kūnai irgi pasirodo – skaičiavimo uždaviniuose.

Pavyzdžiui:

> *žmonės iškasė kanalą; žinomas jo ilgis, jo pjūvis – lygiašonė trapecija, jos kraštinės irgi žinomos, žinoma, kokį tūrį žemės žmogus iškasa per dieną, žinoma darbininkų skaičiaus ir dirbtų dienų skaičiaus suma. Kiek darbininkų dirbo ir kiek dienų?*

Kiek pagalvoję suprasime, kad uždavinį galima suvesti į lygčių sistemos

$$x + y = a, \quad xy = b$$

sprendimą, čia x reiškia žmonių, y dienų skaičius, o dydžių a, b reikšmės žinomos. Savo ruožtu sistemą galima pakeisti viena kvadratine lygtimi. Babiloniečiai žinojo tokių lygčių sprendimo receptus. Būtent receptus: pirma daryk tai, po to tai, galų gale gausi atsakymą. Kaip jie tai sugalvojo? Ir mes nelabai galime paaiškinti, kaip kilo viena ar kita gera mintis. Tiesiog gavome dovaną. Už ką? Už sutelktą dėmesį, už pastangas.

Štai dar vienas babiloniečių uždavinio pavyzdys: žinoma dydžio ir jam atvirkštinio suma. Kam lygus tas dydis? Ir šiuo atveju uždavinys ekvivalentus kvadratinės lygties

$$x + \frac{1}{x} = a$$

su žinoma a reikšme sprendimui.

Tačiau ką gi reiškia išspręsti? Dabar sakytume – pakanka užrašyti sprendinio formulę. O jeigu reikia skaičiaus, pavyzdžiui, stačiojo lygiašonio trikampio su vienetinio ilgio statiniais įžambinės ilgio? Kokia nauda būtų, jeigu staliui pasakytume, jog ilgis yra lygus $\sqrt{2}$?

Jeigu manote, kad šis praktinis staliaus uždavinys nevertas dėmesio, įsivaizduokite, kad neturite nei kokių nors pagalbinių lentelių, nei skaičiuoklio, tačiau vis dėlto, turite kuo tiksliau nustatyti, kam gi lygus įžambinės ilgis.

Lentelė su kvadratine šaknimi

Įsijautę į padėtį turėtume pajusti pagarbą prieš ketvertą tūkstančių gyvenusiems šumerams, kurie šio uždavinio sprendimą pavaizdavo išlikusioje molinėje lentelėje, kuri dabar saugoma Yale'o universitete. Joje pavaizduotas kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 30, o prie įstrižainės parašyti du skaičiai. Štai šie skaičiai:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} \approx 1.414212963,$$
$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = \frac{30547}{720} \approx 42.42638889.$$

Ką reiškia šie skaičiai? Pasinaudokime skaičiuokliu ir raskime apytikslę $\sqrt{2}$ reikšmę:

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562.$$

Antrasis skaičius – apytikslė kvadrato įstrižainės ilgio reikšmė.

Kaip babiloniečiai galėjo tai apskaičiuoti? Manoma, kad jie naudojo artinių metodą, kurį galima paprastai paaiškinti. Ieškodami apytikslės $\sqrt{2}$ reikšmės pradėkime nuo bet kokio teigiamo skaičiaus x_1. Jeigu $x_1^2 < 2$, t. y. $x_1 < \sqrt{2}$, tai

$$\left(\frac{2}{x_1}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{x_1^2}\right) > 2, \quad \frac{2}{x_1} > \sqrt{2}.$$

Jeigu $x_1^2 > 2, x_1 > \sqrt{2}$, tai analogiškai gauname $2/x_1 < \sqrt{2}$. Taigi abiem atvejais $\sqrt{2}$ yra tarp skaičių x_1 ir $2/x_1$. Galime tikėtis, kad imdami jų vidurkį priartėsime prie $\sqrt{2}$ dar arčiau. Šitaip galima sudaryti artinių seką:

$$x_2 = \frac{1}{2}\Big(x_1 + \frac{2}{x_1}\Big), \quad x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\Big).$$

Pradėdami nuo $x = 1$ gauname tokius artinius:

$$1; \ \frac{3}{2} = 1,5; \ \frac{17}{12} \approx 1.416666667; \ \frac{577}{408} \approx 1.414215686.$$

Molinės lentelės artinį gavome labai greitai.

Ar babiloniečiai iš tikrųjų taip skaičiavo? Ar tai, ką mes išskaitėme išlikusiose molinėse lentelėse yra geriausios babiloniečių žinios? Spėlioti galime, tikrai žinoti ne.