# Matematikos istorijos skiautiniai

VILIUS STAKĖNAS

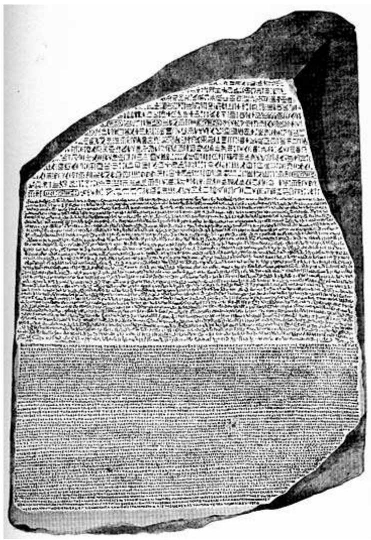
## Radiniai Egipto žemėje

Daug kartų sakiau sau: „Na, dabar imsiu ir parašysiu, ką žinau, apie egiptiečių skaičius“. Ir nieko, – negaliu suregzti nei sakinio. Kodėl? Nes nejaučiu nieko bendro su tais senojo Nilo slėnio gyventojais.

Bet kartą prisiminiau – mačiau du gal kokių penkerių metų berniukus, laksčiusius daugiau kaip prieš trejetą tūkstančių metų. Na ir kas, kad Frankfurto muziejuje po stiklu, – jie atrodė kaip gyvi, tik užmigę. Tik pamanykite sau: lakstė prieš kelis tūkstančius metų!

Ir iškart tapo lengviau pradėti.

Tai įvyko rugpjūčio dvyliktą dieną trisdešimt metų prieš Kristaus gimimą. Plykstelėjo dvišakas angies liežuvis ir pasiuntė Egipto karalienę Kleopatrą iš aistrų pasaulio į mirties tylą. Į užmarštį grimzdo ir visa Egipto civilizacija, jau ir šiaip gožiama Aleksandro Makedoniečio į visas puses išplėsto helėnų pasaulio spindesio. Kraujo lašelis ant Kleopatros krūtinės, suspindęs po angies liežuvėlio prisilietimo, irgi buvo veikiau graikiškas, nei paveldėtas iš senųjų Egipto giminių. Juk Ptolemajų dinastija Egipte atsirado tuomet, kai mirtis staiga sustabdė nesustabdomą, rodos, Aleksandrą Makedonietį.



*Rosetta akmuo. Ptolemajaus V įsakymas iškaltas jame 196 m. pr. Kr. trijų rūšių ženklais: senovės Egipto hieroglifais, demotiniu raštu (supaprastintais hieroglifais) ir graikų kalbos raidėmis.*

Tūkstantmetę egiptiečių pasaulio istoriją, patirtį ir žinias saugantys papirusai, išrašyti juodo suodžių rašalo ženklais palengva virto mįslėmis, kurios mažai kam rūpėjo. Laikas užvertė prirašytus Egipto puslapius, laikas iš lėto rašė Graikiją, Romą, arabų pasaulį, Europą...

Iki XVIII amžiaus Egiptą lankė tik pavieniai keliautojai europiečiai. Tačiau XVIII amžiaus pabaigoje ir XIX amžiaus pradžioje

Europoje kilo tikra Egipto mada. Ypač po to, kai buvo paskelbtas daugiatomis „Aprašymas, arba pastebėjimų ir tyrinėjimų, atliktų Egipte prancūzų kariuomenės ekspedicijos metu ir išspausdintų J.D. Imperatoriaus Napoleono įsakymu, rinkinys“ (1809-1822). Vienos tų karinių Napoleono ekspedicijų metu buvo surastas ir raktas egiptiečių rašmenims iššifruoti – juodo bazalto akmuo, ant kurio buvo iškaltas tas pats Ptolemajaus V (196 m. pr. Kr.) įsakas trimis būdais – egiptiečių hieroglifais, demotiniu raštu (greitaraščiu) ir graikų kalba. Šio Rozetės akmens (vietovės, kur jis buvo rastas pavadinimas) rašmenis būsimasis egiptologijos pradininkas Jeanas François Champollionas išvydo, kai jam buvo tik dvylika metų. Egiptiečių raštų skaitymas prasidėjo nuo Kleopatros ir Ptolemajaus vardų.

Iš mados visada pelnomasi. Išaugus susidomėjimui Egipto senove, būriai nuotykių ieškotojų, senųjų kapų plėšikų ėmė rausti Egiptą... Prekyba senienomis suklestėjo, o vėl atrastam Egipto senovės palikimui kilo grėsmė būti sunaikintam, išsklaidytam.

Škotų antikvaro A.H. Raindo (A.H. Rhind) pirkinys – 1858 metais Luksore įsigytas papiruso ritinys – matyt, vienos iš tokių nelegalių senovės liekanų ieškojimo ekspedicijų grobis. Šiaip ar taip dabar šis papirusas, kurį raštininkas Ahmes surašė apie 1700 m. pr. Kr. yra pagrindinis mūsų žinių apie egiptiečių matematiką šaltinis. Tiesa, raštininkas prisipažįsta, kad jis jį perrašė nuo dar senesnio rašto. Taigi galima, matyt, daryti prielaidą, kad šiame papiruse išdėstytos ne mažiau kaip prieš keturius tūkstančius metų įgytos matematinės žinios.

Yra išlikę dar keletas mažesnių matematinių tekstų, iš jų svarbiausias – Maskvos papirusas. Tačiau jie neprilygsta Rhindo papirusui. Maždaug 30 cm pločio ir 5,4 m ilgio Raindo papiruso ritinėlio tekstas – pagrindinis mūsų žinių apie Egipto matematiką šaltinis. Jeigu tekstų turėtume daugiau ir iš įvairių laikotarpių, ar atsivertų kitoks egiptiečių matematikos vaizdas? Vargu.

Žinios – dievų patikėtos paslaptys – jas dera saugoti, o ne narstyti ir keisti. Taip galvojo senovės egiptiečiai... Ką gi – jų karalystė, gyvavusi kelis tūkstančius metų – ar ne įrodymas, kad galvojo teisingai?

## Skaičiavimas brūkšniais, lotoso žiedais ir buožgalviais

Taigi, egiptiečiai. Raindo papirusas ir jo autorius – Ahmes. Tai pirmas mums žinomas matematinio teksto autorius. Bet į puikybę jis nesikelia – prisipažįsta, kad didžiai vertingas žinias perrašė iš kito dar senesnio rašto. Jam, kaip ir kitiems stropiesiems Egipto raštininkams net į galvą neateidavo ką nors pridėti ar sukurti savo. Pakako įsisąmoninti ir perduoti kitoms kartoms brangųjį protėvių, o gal ir dievų sukurtą žinių paveldą.

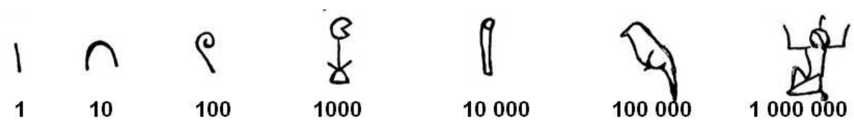
*Senovės Egipto raštininkas*

Įsižiūriu į egiptiečių raštininko statulos, sukurtos apie 2000 m. pr. Kr., o dabar saugomos Egipto muziejuje, nuotrauką ir žinau kaip atrodė Ahmes: sėdi rūmų pavėsyje, kojos sukryžiuotos, nugara tiesi, viena ranka laiko papiruso ritinį, kita – nendrę, didelių akių žvilgsnis tiesus, dėmesingas, veide pasirengimas tuoj pat pritaikyti savo žinias ir sugebėjimus uždaviniui, kuris bus suformuluotas... Nuostabus proto darbininko portretas.

Ahmes rankraštis prasideda pažadu, kad šis veikalas padės jo skaitytojams viską pasaulyje ištirti, atskleisti visas paslaptis. Tačiau iš tiesų tai tėra vadovėlis, iš kurio galima pasimokyti skaičiuoti taip, kaip skaičiavo senovės egiptiečiai. Tekste pateikiami 87 uždaviniai ir nurodoma, kaip juos spręsti.

Patyrinėkime, kaip egiptiečiai skaičiavo. O kad skaičiuoti jiems reikėjo, ir netgi labai daug, netiesiogiai rodo didieji jų statiniai – piramidės. Tos piramidės yra viso senojo Egipto simbolis. Taip pat kantrybės, vergiško darbo ir meistrystės...

Egiptiečiai, kaip ir daugelis kitų tautų, skaičiavo dešimtimis. Hieroglifai, žymintys skaičius, buvo sukurti įsižiūrėjus į tikrovės daiktus. Galėtume įžvelgti pirmųjų skaičiuotojų emocijų, kurias kėlė skaičių pasaulis, atšvaitus.




Vienetą egiptiečiai žymėjo brūkšneliu (ar buvo kokia nors tauta, kuri vienetą rašė kitaip?), dešimčiai žymėti buvo parinktas lankas, primenantis pantį gyvuliams rišti, šimtą žymėjo spirale susukta matavimo virvelė, tūkstantį reiškė lotoso žiedas – ant Nilo vandenų suposi tūkstančiai šių vandens lelijų – mėlynų ir baltų, dešimtį tūkstančių reiškė į viršų pakelto piršto piešinys, šimtui tūkstančių atstovavo varlė, o milijoną – sunkiai protu aprėpiamą skaičių – reiškė priklaupęs ir iš nuostabos į viršų rankas iškėlęs žmogus.

Egiptiečiai savo tekstų eilutes skaitė iš dešinės į kairę, rašant skaičius šia kryptimi buvo rikiuojami ir skaičiaus ženklai: po vienetų rašytos dešimtys ir taip toliau:

Be „iškilmingojo“ rašymo hieroglifais egiptiečiai naudojosi ir dviem paprastesniais bei greitesniais būdais: hieratiniu ir demotiniu raštais. Skaičiai šiuose raštuose taip pat paprastesni – nebe kruopščiai nupiešti paveikslėliai, bet greitaraščiu išrikiuoti įvairūs brūkšneliai, lankeliai ir virvutės.

## Dvigubinimo menas

„Pirmiausia išmok padvigubinti“, – galbūt šitaip senovės Egipto mokytojas pradėdavo skaičiavimo pamokas. Dvigubinimo veiksmas – visos egiptiečių aritmetikos pagrindas. Padvigubinti lengva: parašę dvigubai daugiau vieneto, dešimties ir kitų ženklų, skaičiuokime vienetus ir kiekvieną jų dešimtį keiskime dešimties ženklu, sugrupavę dešimčių ženklus po dešimt, žinosime, kiek susidaro šimtų ir t.t. Ne tik dvigubinti lengva, apskritai – nesunku sudėti bet kokiuos skaičius. Daugybą irgi galime paversti sudėtimi. Tačiau egiptiečiai elgdavosi gudriau. Daugindavo dvigubindami.

Panagrinėkime egiptietiškos daugybos pavyzdį. Tarkime, reikia apskaičiuoti sandaugą $21 \times 271$. Padvigubinkime antrąjį daugiklį, po to padvigubinkime gautą rezultatą ir t.t. Galime įsivaizduoti, kad šitaip apskaičiuojame sandaugas $1 \times 271$, $2 \times 271$, $4 \times 271, \ldots$ Surašykime gautus rezultatus į lentelę:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 271 | / | 1 | 271 |
| 2 | 542 | | 2 | 542 |
| 4 | 1084 | / | 4 | 1084 |
| 8 | 2168 | | 8 | 2168 |
| 16 | 4336 | / | 16 | 4336 |

O dabar iš gautų rezultatų sudarykime reikalingą sandaugą. Kadangi

$$21 = 1 + 4 + 16 = 1 + 2^2 + 2^4,$$

tai atsakymą gausime sudėję įkypu brūkšnelių pažymėtus skaičius (šitaip reikalingus dėmenis žymėdavo ir egiptiečiai). Taigi

$$21 \times 271 = 271 + 1084 + 4336 = 5691.$$

Šį atsakymą gavome atlikę šešias nesudėtingas sudėties operacijas (dvigubinimas irgi yra sudėtis). Naudodamiesi dabartinėmis sąvokomis egiptiečių daugybos metodo esmę galime taip nusakyti: vienas iš daugiklių išreiškiamas dvejetainėje skaičiavimo sistemoje ir pasinaudojama daugybos paskirstymo (distributyvumo) savybe.

Sakome, kad dalyba yra veiksmas, atvirkštinis daugybai. Ir egiptiečiai puikiai tai žinojo. Dalydami skaičių $a$ iš $b$ jie naudodavo tą pačią lentelę su skaičiais $2^m b$, gautą dvigubinimo būdu. Pavyzdžiui, ieškodami dalybos $5691 : 271$ rezultato, jie užsirašytų tą pačią lentelę, kaip ir daugindami iš 271. Tačiau dalijant lentelė naudojama kitaip: sumuodami antrojo stulpelio skaičius bandome išreikšti dalinį. Mūsų atveju

$$4336 + 1084 + 271 = 5691,$$

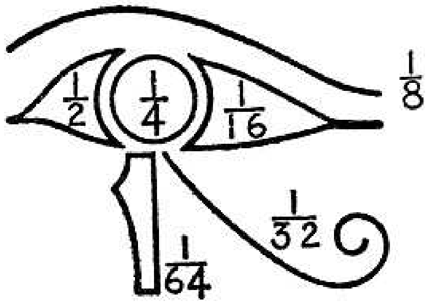
taigi sumuodami atitinkamus pirmojo stulpelio skaičius gauname dalmenį:

$$5691 : 271 = 16 + 4 + 1 = 21.$$

Šis būdas labai efektyvus: iš tiesų ieškant dalinio išraiškos antrojo stulpelio skaičių suma mums visai nereikia daug galvoti. Mūsų pavyzdyje $5691 > 4336$, todėl paskutinės eilutės skaičius būtinai reikalingas. Kadangi $5691 - 4336 = 1355$ ir $1355 < 2168$, bet $1355 > 1084$, tai ketvirtoji eilutė nereikalinga, tačiau trečioji būtina. Galų gale apskaičiavę skirtumą $1355 - 1084 = 271$ matome, kad į sumą dar būtina įtraukti pirmosios eilutės skaičių.

Tačiau kai dalinys nesidalija iš daliklio, šitaip sumuodami antrojo stulelio skaičius dalinio „nesurinksime". Gausime skaičių, mažesnį už dalinį; sudėję pirmojo stulpelio skaičius gautume tik sveikąją dalmens dalį. Kaip tokiu atveju elgdavosi egiptiečiai? Tokios dalybos rezultatui reikšti jie sukūrė keistoką, bet labai įdomų būdą.

## Egiptiečių trupmenos




*Dievo Horo akies dalių ženklais egiptiečiai žymėjo dvejetaines trupmenas. Pastebėkime: sudėję visas jas vieneto negausime!*

Kas yra trupmena? Padalykime vienetą į $n$ lygių dalių ir paimkime $m$ iš jų. Štai tas paimtas kiekis ir yra trupmena. Panašiai bandytume atsakyti mes, tačiau ne egiptietis. Jis sutiktų, kad norint gauti trupmeną, vienetą reikia padalyti į keletą lygių dalių. Tačiau trupmena yra tik viena iš tų dalių, o ne dvi ir ne trys! Taigi iš tų trupmenų, kurias mes naudojame trupmenomis egiptietis pavadintų tik tas, kurių skaitiklis lygus vienetui. Tiesa, yra viena išimtis – trupmeną 2/3 pripažino ir egiptiečiai ir turėjo jai specialų žymenį.

Galime tik spėlioti, kaip susiklostė tokia egiptietiška trupmenų sąvoka. Gali būti, kad ji yra vieno egiptiečių mito atspindys. Jis pasakoja apie dviejų dievų Horo ir Seto kovą. Dievas Setas išplėšė Horo akį ir sudraskė į gabaliukus. Laimė, atsirado kitas dievas, kuris tą akį iš gabalėlių surinko. Štai tų gabalėlių ženklais kadaise egiptiečiai žymėjo dvejetaines trupmenas:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad \frac{1}{32},\quad \frac{1}{64}.$$

Šių trupmenų sumomis buvo reiškiamos kitos trupmenos. Kadangi akyje yra tik viena dalis, atitinkanti $\frac{1}{2}$, tai šį dėmenį sumoje galima paimti tik kartą. Taip pat po kartą galima imti ir kitus dėmenis. Šis apribojimas išliko ir vėliau, kai buvo imta naudoti ir kitas trumpenas.

Trupmenas egiptiečiai žymėjo labai paprastai: virš vardiklį reiškiančio skaičiaus piešdavo lūpas ar pravirą burną primenantį ženklą. Galime įsivaizduoti, kad egiptiečių trupmenų ženklas primena maisto dalijimą išalkusiems.

Sudėdami trupmenas egiptiečiai reiškė kitus kiekius. Tačiau jie griežtai laikėsi vienos taisyklės: dviejų vienodų trupmenų suma neturi prasmės! Taigi norėdami paaiškinti senovės egiptiečiui, kokį dydį jūs turite galvoje rašydami $2/5$ jūs turėtumėte užrašyti ne

$$\frac{2}{5} \text{ reiškia } \frac{1}{5}+\frac{1}{5},$$

bet

$$\frac{2}{5} \text{ reiškia } \frac{1}{3}+\frac{1}{15}.$$

O štai paaiškinti, kas yra devyniasdešimt devynios šimtosios būtų gana sudėtinga. Nebent ilgai skaičiavę sugebėtumėte gauti išraišką

$$\frac{99}{100}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{73}+\frac{1}{9018}+\frac{1}{230409900}.$$

Ar kiekvieną trupmeną galima užrašyti egiptietiškųjų trupmenų suma, jei galima, tai ar vieninteliu būdu? Galima, be to – daugeliu būdų. Tai paprasta įrodyti, naudojantis tokia tapatybe:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}.$$

Ja pasinaudoję galime užrašyti trupmeną $\frac{2}{5}$ taip:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}.$$

Anksčiau įsitikinome, kad šiai trupmenai užrašyti pakanka dviejų egiptietiškųjų trupmenų. Jeigu naudodamiesi minėta tapatybe egiptietiškomis trupmenomis reikštume trupmeną $m/n$, prisireiktų

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m$$

dėmenų. Tai toli gražu ne mažiausias reikalingų dėmenų skaičius. Žinoma, kad pakaktų maždaug $\sqrt{n}$ dėmenų. Tačiau algoritmo, kuriuo naudojantis būtų galima rasti pačią trumpiausią trupmenos išraišką egiptietiškosiomis niekas iki šiol nežino.

## Egiptietiškos trupmenos – gyvos

Ko gero šios nepraktiškos trupmenos yra pats keisčiausias egiptiečių matematikos instrumentas. Ir kartu – gyvybingiausias, nes ir po kelių tūkstančių metų domina ne tik matematikos istorikus, bet ir jos kūrėjus.

Tačiau tos keistos ir nepraktiškos trupmenos ir dabar tyrinėjamos: formuluojami uždaviniai ir rašomi straipsniai.

Peršokime viduramžius, nes tų laikų žmonėms matematika nerūpėjo... Naujųjų laikų pradžioje sutiksime Leonardo Fibonačį (Fibonacci), kurio „Abako knyga“ (Liber Abaci, 1202) yra pirmas matematinių tyrinėjimų atgimimo daigas. Vienas jos skyrių skirtas egiptiečių trupmenoms. Nagrinėjami įvairūs paprastųjų trupmenų reiškimo egiptietiškomis būdai. Vieną iš jų dabar vadina „godžiuoju“ algoritmu. Jo idėja labai paprasta: *jeigu reikia išreikšti trupmeną* $\frac{m}{n}(m < n)$ *egiptietiškomis, pirmiausia imkime pačią didžiausią:*

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d} + \Big(\frac{m}{n} - \frac{1}{d}\Big), \quad \frac{1}{d} < \frac{m}{n}\frac{1}{d-1}.$$

Panagrinėkime „likutį“ $\frac{md-n}{dn}$. Iš nelygybių

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{d} = \frac{md-n}{dn} > 0, \quad \frac{1}{d-1} - \frac{m}{n} = \frac{m-md+n}{(d-1)n} > 0$$

gausime: $md - n > 0$ ir $m - md + n > 0$, t.y. $m > md - n$. Kitaip tariant, „likučio“ skaitiklis yra mažesnis.

Jeigu $md-n = 1$, darbas baigtas. Jeigu ne, – „godumo“ taisyklę taikysime šiam „likučiui“. Kadangi

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{d} < \frac{1}{d-1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{(d-1)d} \leqslant \frac{1}{d},$$

tai egiptietiškąją trupmeną gausime su didesniu už $d$ vardikliu, o „likutį“ – su dar mažesniu skaitikliu. Galų gale ir „likutis“ taps trupmena su skaitikliu, lygiu vienetui; reiškinys egiptietiškomis trupmenomis bus baigtas.

Kiek pagalvoję suvoksime, kad šie samprotavimai įrodo tokį teiginį:

*Trupmeną* $\frac{m}{n}(m, n > 1)$ *galima išreikšti nedaugiau kaip* $m$ *skirtingų egiptietiškų trupmenų suma.*

Tačiau ar būtinai $m$? Kartais imant mažiau, išreikšti nepavyks. Pavyzdžiui, visoms trupmenoms $\frac{2}{2k+1}$ būtinai reikia dviejų dėmenų. Trupmenoms $\frac{3}{n}$ būna visaip. Pavyzdžiui,

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10},$$

o trupmenos $\frac{3}{7}$ dviejų egiptietiškų trupmenų suma išreikšti nepavyks.

O kaip su trupmenomis $\frac{4}{n}$? Padėtis įdomi. Patikrinta, kad visas tokias trupmenas su nelyginiais vardikliais $n < 100000000000000$ galima išreikšti trijų skirtingų egiptietiškų trupmenų suma

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

1948 metais du matematikai: P. Erdiošas (P. Erdös) ir E. Strausas (E. Straus) iškėlė hipotezę, kad visoms tokioms trupmenoms išreikšti pakanka trijų egiptietiškų trupmenų. Spėjimo niekas nei paneigė, nei įrodė iki šiol.

Egiptiečių trupmenos vis dar sklidinos paslapčių. Kaip ir visa egiptiečių senovė.

## Šaltiniai


- Aleksandras Baltrūnas. *Nuo nulio iki...*, Vilnius, Vyturys, 1991.
- Marshall Clagett. *Ancient Egyptian Science a Source Book– Ancient Egyptian Mathematics.* American Philosophical Society, 1989.
- Roger L. Cooke. *The History of Mathematics– A Brief Course.* John Wiley & Sons, 2012.
- Wolfram MathWorld. Egyptian fractions.