$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 3, 90–94

Olimpiadų ir konkursų uždaviniai

Lietuvoje kasmet vyksta daug įvairių matematinių olimpiadų ir konkursų, mūsų moksleiviai varžosi tarptautinėse matematinėse varžybose. Žurnalo puslapiuose — 2004 *metų Lietuvos ir tarptautinių varžybų uždaviniai.*

Pasaulinė moksleivių matematikos olimpiada

Pirmoji diena, 2004–07–12. (Darbo trukmė: 4 val. 30 min. Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais.)

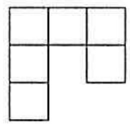
1. Tegul ABC — smailusis trikampis ir $AB \neq BC$. Apskritimas su skersmeniu BC kerta kraštines AB ir AC atitinkamai taškuose M ir N. Kraštinės AB vidurį pažymėkime O. Kampų BAC ir MON pusiaukampinės kertasi taške R. Įrodykite, kad apskritimai, apibrėžti apie trikampius BMR ir CNR, turi bendrą tašką, kuris yra kraštinėje BC.

2. Raskite visus polinomus $P(x)$, kurių koeficientai yra realieji skaičiai, tenkinančius lygybę

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c),$$

su visais tokiais realiaisiais skaičiais a, b, c, kad $ab+bc+ca=0$.

3. Kabliu vadinkime figūrą, sudarytą iš 6 langelių, kaip tat parodyta brėžinyje. Figūrą galima sukioti ir apversti. Raskite visus stačiakampius $m \times n$, kuriuos galima uždengti kabliais taip, kad:



1) stačiakampis būtų uždengtas be tarpų ir persiklojimų;
2) joks kablys neišlįstų už stačiakampio ribų.

Antroji diena, 2004–07–13. (Darbo trukmė: 4 val. 30 min. Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais.)

4. Tegul $n \geqslant 3$ — sveikasis skaičius ir $t_1, t_2, \ldots, t_n$ yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys nelygybę

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\cdots+t_n)(1/t_1+1/t_2+\cdots+1/t_n).$$

Įrodykite, kad t_i, t_j, t_k yra trikampio kraštinių ilgiai su visais i, j, k, tenkinančiais sąlygą $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

5. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainė BD nėra nei kampo ABC, nei kampo CDA pusiaukampinė. Taškas P yra keturkampio $ABCD$ viduje ir tenkina sąlygas:

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{ir} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Įrodykite, kad apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą tada ir tiktai tada, kai $AP = CP$.

6. Natūralųjį skaičių vadinsime alternuojančiu, jeigu jo dešimtainio užrašo kiekvieni du gretimi skaitmenys yra skirtingo lyginumo. Raskite visus tokius natūraliuosius n, kurie turi alternuojantį kartotinį.

XIX komandinė Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada

1. Dvylika skaičių — keturi vienetai, keturi penketai ir keturi šešetai — yra bet kaip surašyti ratu aplink apskritimą. Ar būtinai atsiras toks iš trijų greta stovinčių skaitmenų sudarytas triženklis skaičius (jo skaitmenys gali būti imami prieš arba pagal laikrodžio rodyklę), kuris dalijasi iš 3?

2. Išspręskite lygtį $2\cos(2\pi x) + \cos(3\pi x) = 0$.

3. Išspręskite lygtį $3x^{[x]} = 13$; čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

4. Įrodykite nelygybę
$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+5}} + \frac{b}{\sqrt{2b^2+5}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

5. Kokias reikšmes gali įgyti reiškinys
$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2},$$
kai a, b, c — realieji nenuliniai skaičiai?

6. Raskite visas realiųjų skaičių poras (x, y), su kuriomis
$$\begin{cases} x^6 = y^4 + 18, \\ y^6 = x^4 + 18. \end{cases}$$

7. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (m, n, r), kad $2001^m + 4003^n = 2002^r$.

8. Tegul m ir n yra natūralieji skaičiai. Įrodykite: jei $mn - 23$ dalijasi iš 24 be liekanos, tai $m^3 + n^3$ dalijasi iš 72 be liekanos.

9. Ar gali su kokia nors realiąja a reikšme skaičiai $(1 - 2a\sqrt{35})/a^2$ ir $a + \sqrt{35}$ abu būti sveikieji?

10. Įrodykite, kad tarp šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių visada atsiras toks, kuris yra reliatyviai pirminis su kitų penkių skaičių sandauga.

11. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti natūraliųjų skaičių sandauga, jei jų suma yra lygi 2004?

12. Natūralieji skaičiai a, b, c, u, v, w tenkina lygčių sistemą
$$\begin{cases} a + u = 21, \\ b + v = 31, \\ c + w = 667. \end{cases}$$
Ar gali būti teisinga lygybė $abc = uvw$?

13. Realusis skaičius u yra lygties $x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$ sprendinys, o realusis skaičius v — lygties $x^3 - 3x^2 + 5x + 11 = 0$ sprendinys. Raskite $u + v$.

14. Ar galima kvadratinės lentos 100×100 langeliuose surašyti visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 10 000 taip, kad kiekviename langelyje esantis skaičius būtų arba mažesnis, arba didesnis už visus skaičius, kurie surašyti visuose bendrą kraštinę su tuo langeliu turinčiuose langeliuose?

15. Ar egzistuoja toks daugianaris $P(x)$, kurio koeficientai yra sveikieji skaičiai, kad su visomis x reikšmėmis intervale $[\frac{4}{10}; \frac{9}{10}]$ būtų teisinga nelygybė $|P(x) - \frac{2}{3}| < 10^{-10}$?

16. Ar egzistuoja toks teigiamas skaičius a_0, kad visi begalinės sekos $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, apibrėžtos rekurenčiąja formule $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, nariai būtų racionalieji skaičiai?

17. Tegul a, b, c, yra trikampio kraštinių ilgiai, o x, y, z tokie realieji skaičiai, kad $x+y+z=0$. Įrodykite, kad

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy \leqslant 0.$$

18. Taškai M ir N priklauso trikampio ABC atitinkamai kraštinėms AB ir BC. Be to,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = 2 \quad \text{ir} \quad \angle ACB = 2\angle MNB.$$

Įrodykite, kad trikampis ABC — lygiašonis.

19. Trapeciją dvi jos įstrižainės dalija į keturis trikampius. Trijų iš jų plotai yra lygūs 1, 2 ir 4. Kokias reikšmes gali įgyti ketvirtojo trikampio plotas?

20. Rombo įstrižainių santykis yra $a : b$. Raskite to rombo ir į jį įbrėžto apskritimo plotų santykį.

Tarptautinė komandinė „Baltijos Kelio“ olimpiada

1. Neneigiamųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ visiems $n = 1, 2, \ldots$ tenkina sąlygas:
1) $a_n + a_{2n} \geqslant 3n$; 2) $a_{n+1} + 1 \leqslant 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}$.
a) Įrodykite, kad nelygybė $a_n \geqslant n$ teisinga su visais $n \in N$.
b) Pateikite bent vieną tokios sekos pavyzdį.

2. Tegu $P(x)$ — daugianaris, kurio koeficientai yra neneigiami skaičiai. Įrodykite: jeigu $P(\frac{1}{x})P(x) \geqslant 1$, kai $x = 1$, tai šita nelygybė teisinga visoms teigiamoms x reikšmėms.

3. Tegu p, q, r — teigiamieji skaičiai ir $n \in N$. Įrodykite: jeigu $pqr = 1$, tai

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leqslant 1.$$

4. Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — realieji skaičiai, kurių aritmetinis vidurkis lygus X. Įrodykite, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius k, kad kiekvienos iš aibių $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\{x_2, x_3, \ldots, x_k\}$, $\{x_3, \ldots, x_k\}, \ldots,$ $\{x_{k-1}, x_k\}$, $\{x_k\}$ elementų aritmetinis vidurkis yra ne didesnis už X.

5. Funkcija f apibrėžta sveikiesiems k formule

$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k,$$

čia $(k)_{2n+1}$ reiškia skaičiaus $2n+1$ kartotinį, artimiausią skaičiui k.
Nustatykite funkcijos f reikšmių sritį.

6. Kiekvienoje iš šešių kubo sienų parašyta po natūralųjį skaičių. Imdami kiekvieną kubo viršūnę, apskaičiuojame sandaugą skaičių, parašytų trijose į tą viršūnę sueinančiose sienose. Tų sandaugų suma lygi 1001. Kam lygi kubo sienose parašytų šešių skaičių suma?

7. Raskite visas aibes X, kiekvieną iš kurių sudaro mažiausiai du tokie natūralieji skaičiai, kad kiekvienai porai $m, n \in X$, čia $n > m$, egzistuoja toks $k \in X$, kad $n = mk^2$.

8. Tegu $f(x)$ — daugianaris, kuris nėra pastovus ir kurio koeficientai yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius n, kad $f(n)$ turi bent 2004 skirtingus pirminius daliklius.

9. Aibę S sudaro $n-1$ natūralusis skaičius ($n \geqslant 3$). Šioje aibėje egzistuoja bent du elementai, kurių skirtumas nesidalija iš n. Įrodykite, kad galima sudaryti tokį aibės S netuščiąjį poaibį, kad jo elementų suma dalytųsi iš n.

10. Ar egzistuoja tokia begalinė pirminių skaičių seka $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$, kad kiekvienam $n \in N$ teisinga lygybė $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$?

11. Į kiekvieną $m \times n$ matmenų lentelės langelį yra įrašytas arba 1, arba -1. Iš pradžių lentelėje yra vienintelis -1, o kiti skaičiai yra 1. Vienu ėjimu yra leidžiama bet kuriame langelyje įrašytą -1 pakeisti 0, o visus gretimų langelių skaičius padauginti iš -1 (gretimais laikomi bendrą kraštinę turintys langeliai). Raskite visas tokias poras $(m; n)$, kad minėtais ėjimais būtų galima gauti lentelę vien iš nulių, kad ir kokiame langelyje iš pradžių buvo įrašytas vienintelis -1.

12. Eilutėje yra surašyta $2n$ skirtingų skaičių. Vienu ėjimu leidžiama arba sukeisti bet kuriuos du skaičius, arba cikliškai perstatyti bet kuriuos tris pasirinktuosius skaičius (pasirinkus tris skaičius a, b, c, skaičių a keičiame skaičiumi b, skaičių b keičiame skaičiumi c, o skaičių c — skaičiumi a). Koks yra mažiausias skaičius ėjimų, kurių visada užteks išdėstyti visus eilutės skaičius didėjimo tvarka?

13. Iš 25 Europos Sąjungos valstybių turi būti sudarytas komitetas, remiantis tokiomis taisyklėmis: 1) komitetas turi posėdžiauti kasdien; 2) kiekviename posėdyje turi dalyvauti bent viena valstybė; 3) bet kuriuose dviejuose posėdžiuose turi dalyvauti skirtingos valstybių aibės; 4) kiekvienam numeriui k, $k < n$, n-ajame posėdyje dalyvaujančių valstybių aibei turi priklausyti bent viena valstybė, dalyvavusi k-ajame posėdyje. Kiek daugiausiai dienų gali posėdžiauti komitetas?

14. Krūvele vadinsime aibę iš 4 ar daugiau riešutų. Du asmenys žaidžia tokį žaidimą. Pradedama nuo krūvelės, turinčios $n \geqslant 4$ riešutų. Vienu ėjimu žaidėjas turi vieną iš krūvelių padalyti į dvi netuščias aibes (tos aibės yra nebūtinai krūvelės — jose gali būti bet koks riešutų skaičius). Jeigu žaidėjas negali padaryti ėjimo, jis pralaimi. Kurioms n reikšmėms pirmasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją?

15. Apskritimas padalytas į 13 lankų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 13. Penkios blusos, kurių vardai yra A, B, C, D ir E, tupi lankuose 1, 2, 3, 4 ir 5. Blusai leidžiama šokti į bet kurį neužimtą lanką peršokant 5 lankus (pavyzdžiui, iš lanko 2 į lanką 8) į bet kurią pusę nuo tos vietos, kurioje ji yra. Bet kuriuo metu šoka tik viena blusa ir jokios dvi blusos negali atsirasti viename lanke. Po kelių šuolių blusos vėl atsidurs lankuose 1, 2, 3, 4, 5, tik galbūt kitokia tvarka?

16. Per apskritimo išorėje esantį tašką P išvesta apskritimo kirstinė ir liestinė. Kirstinė kerta apskritimą taškuose A ir B, o liestinė liečia apskritimą taške C, kuris yra į tą pačią, kaip ir kirstinė AB, pusę nuo skersmens, einančio per tašką P. Taško C projekcija į tą skersmenį yra Q. Įrodykite, kad QC yra kampo AQB pusiaukampinė.

17. Kiekvienoje stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai yra 3 ir 4, kraštinėje pasirinktas taškas. Paeiliui sujungus pasirinktus taškus atkarpomis, gaunamas keturkampis, kurio kraštinių ilgiai yra x, y, z ir u. Įrodykite, kad $25 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant 50$.

18. Spindulys, išeinantis iš trikampio ABC viršūnės A, kerta trikampio kraštinę BC taške X, o apie trikampį ABC apibrėžtą apskritimą — taške Y. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geqslant \frac{4}{BC}.$$

19. Taškas D yra trikampio ABC kraštinės BC vidurio taškas, o M yra toks kraštinės BC taškas, kad $\angle BAM = \angle DAC$. Taškas L yra antrasis taškas, kuriame apskritimas, apibrėžtas apie trikampį BAM, kerta kraštinę AC. Įrodykite, kad $KL \parallel BC$.

20. Trijų apskritimų lankai ω_1, ω_2, ω_3, kurių galai yra taškuose A ir B, yra toje pačioje tiesės AB pusėje; ω_2 yra tarp ω_1 ir ω_3. Du spinduliai, išvesti iš taško B, kerta tuos lankus atitinkamai taškuose M_1, M_2, M_3 bei K_1, K_2, K_3. Įrodykite, kad

$$\frac{M_1M_2}{M_3M_4} = \frac{K_1K_2}{K_3K_4}.$$

VI Lietuvos individualioji jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiada
V–VI klasės

1. Raskite tris tokius skaičius, kad juos sudėję visais galimais būdais po 2 gautume rinkinį 3, 2004 ir 2005.

2. Prie dviejų skaičių a ir b sumos $a + b$ pridėjome jų sandaugą ab ir gavome 23.
   a) Nurodykite vieną tokią skaičių a ir b porą $(a; b)$.
   b) Raskite visas galimas tokių skaičių a ir b poras.

3. Į lentelės 6×6 kiekvieną langelį įrašykite po sveikąjį teigiamą skaičių taip, kad visų kiekvieno stačiakampio 1×4 arba 4×1, kurį tik galima iškirpti iš tos lentelės langelių, skaičių suma būtų lyginė, o visų visos lentelės skaičių suma būtų nelyginė.

4. Keturženklis skaičius užrašomas 4 skirtingais skaitmenimis ir dalijasi iš visų 4 savo skaitmenų.
   a) Raskite vieną tokį 4-ženklį skaičių.
   b) Nurodykite patį didžiausią tokį 4-ženklį skaičių.
   c) Nurodykite patį mažiausią tokį 4-ženklį skaičių.

5. Popieriaus lape nubrėžus dvi statmenas tieses tas lapas iš pradžių buvo perlenktas išilgai vienos, o po to ir išilgai kitos tiesės. Tada viename taške lankstinys buvo perdurtas adata ir išlankstytas, o per kiekvienus du dūrio taškus buvo išvestos tiesės.
   a) Kiek gausime skirtingų tiesių?
   b) Kiek skirtingų tiesių būtų galima gauti pradūrus lankstinį ne viename, o dviejuose skirtinguose taškuose?

VII–VIII klasės

1. Septynženklis skaičius užrašomas 7 skirtingais skaitmenimis ir dalijasi iš visų 7 savo skaitmenų.
   a) Raskite vieną tokį 7-ženklį skaičių.
   b) Raskite patį didžiausią tokį 7-ženklį skaičių.
   c) Raskite patį mažiausią tokį 7-ženklį skaičių.

2. M ir N yra stačiakampio $ABCD$ kraštinių AB ir BC vidurio taškai, o P yra atkarpų CM ir AN sankirtos taškas. Yra žinoma, kad kampas $\angle NPC = 30°$. Raskite kampą MDN.

3. Neneigiami sveikieji skaičiai m ir n tenkina sąlygą $mn - n + m = 2004$.
   a) Raskite vieną tokią skaičių m ir n porą $(m; n)$.
   b) Raskite visas galimas tokias skaičių m ir n poras.

4. Ar galima į lentelės 10×10 kiekvieną langelį įrašyti po sveikąjį neigiamą skaičių taip, kad visų bet kurio stačiakampio 1×4 arba 4×1, kurį galima iškirpti iš tos lentelės langelių, skaičių suma būtų lyginė, o visų visos lentelės skaičių suma būtų nelyginė?

5. Kuris iš skaičių 79^{26} ar 244^{21} yra didesnis ir kodėl?